

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Vedrana Barišić

Mjerenje

Diplomski rad

Osijek, 2014.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Vedrana Barišić

Mjerenje

Diplomski rad

MENTOR:

doc.dr.sc. Ivan Matić

KOMENTOR:

dr.sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2014.

Sadržaj

1	Uvod	4
2	Mjerenje u nastavi matematike	5
2.1	Razvoj koncepta mjerenja	5
2.2	Mjerenje u kurikulumu	5
2.3	Značenje i proces mjernja	8
2.4	Razvoj vještina u mjerenju	9
2.5	Mjerenje duljine	10
2.5.1	Izrada i upotreba ravnala	12
2.6	Mjerenje površine	12
2.6.1	Upotreba mreže	14
2.6.2	Problem zamjene površine i opsega	15
2.7	Mjerenje volumena i zapremine	15
2.7.1	Izrada i upotreba čaše za mjerenje	16
2.8	Mjerenje mase i težine	17
2.8.1	Izrada i upotreba skale	18
2.9	Mjerenje vremena	19
2.9.1	Čitanje sata	19
2.10	Mjerenje kutova	20
2.10.1	Izrada kutomjera	20
3	Mjerne jedinice	22
3.1	Uvođenje mjernih jedinica	22
3.1.1	Upotreba modela jedinica	22
3.2	Formalne i neformalne mjerne jedinice: Razlozi za upotrebu obaju	23
3.3	Savjeti za učenje procjene	24
3.4	Mjerne jedinice SI sustava	24
4	Učenje formula	26
4.1	Površina pravokutnika, paralelograma, trokuta i trapeza	26
4.2	Neke od osnovnih formula za računanje površine, oplošja i volumena	28
4.3	Cavalijerijev princip za određivanje volumena nepravilnih tijela	29
5	Razvoj razumijevanja u matematici	31
5.1	Utjecaj učionice na učenje i razumijevanje	31
5.2	Razvoj razumijevanja mjerenja	31

6 Zaključak	33
Sažetak	36
Životopis	37

1 Uvod

Proces mjerenja nije jednostavan i lako razumljiv svim učenicima, čak naprotiv, mnogima je apstraktan. Podaci iz više istraživanja pokazuju da od svih koncepata kurikuluma učenici pokazuju najslabije znanje i rezultate upravo u mjerenju i unatoč trudu nastavnika koji pomno razrađuju cjeline vezane uz mjerenje s učenicima, loši rezultati su i dalje prisutni.

Ne postoji jedinstven razlog zbog čega učenici ne shvaćaju proces mjerenja na pravi način, ali je sustav obrazovanja prilagođen tako da bi im mogao mjerenje u samom početku obrazovanja približiti kao nešto prirodno i razumljivo. Mjerenje je specifično jer se proteže kroz gotovo sva druga polja matematike i zato predstavlja pravi izazov u podučavanju. Istraživanje, modeliranje i rješavanje problema mjerenja povezuje stvarni život s matematičkim konceptima što se itekako može iskoristiti u podučavanju mjerenja. Naime, poznato je da veliki broj mlađih učenika lakše prihvaća materijale za učenje ako su oni dostupni u obliku radnih listića, slika ili igara. Zbog toga se i sam proces mjerenja unutar obrazovnog procesa počinje predstavljati upravo na taj način. Djeca na samom početku obrazovanja najprije uspoređuju objekte i nauče što znače odnosi veći - manji, teži - lakši, dulji - kraći, ... Isto tako, ne računaju i ne mjere površinu nego ju prekrivaju s kvadratima ili nekim drugim geometrijskim likovima. Na takav način učenici se prvi put susreću s pojmom mjerenja. Istovremeno, potrebno im je i dati do znanja da postoje mjerne jedinice te im pokušati nametnuti osjećaj veličine nekih osnovnih mjernih jedinica. Takva vrsta pristupa učenika će pripremiti na daljnje učenje.

U ovom diplomskom radu govorit ću o razvoju procesa mjerenja i shvaćanju mjerenja kod učenika. Također, nešto ću reći i o očekivanim učeničkim postignućima vezanim uz mjerenje kroz obrazovne cikluse. Objasnit ću mjerenje duljine, površine, volumena, kapaciteta, težine, mase, vremena i kuta te načine kako ih predstaviti u nastavi. Spomenuti ću standardne mjerne jedinice u SI sustavu i formiranje formula za računanje površine. Na samome kraju rada osvrćem se na razvoj razumijevanja mjerenja kod učenika.

2 Mjerenje u nastavi matematike

2.1 Razvoj koncepta mjerenja

Kako najbolje pomoći učenicima da razviju konceptualno razumijevanje procesa mjerenja, jedno je od ključnih pitanja u podučavanju mjerenja. Istovremeno, potrebno je učenike upoznati s formalnim i neformalnim načinima mjerenja. Kada započinjemo s mjerenjem moramo pojasniti što se mjeri i na koji način. Prema [13] značajno je sljedeće:

- Mjerenje uključuje usporedbu obilježja nekog predmeta ili situacije s jedinicom koja ima isto to obilježje. Duljine se uspoređuju s mjerinim jedincama za duljine, površine s mjernim jedincama za površine, vrijeme s jedincama za mjerenje vremena itd. Prije nego li krenemo sa samim procesom mjerenja, trebamo razumjeti obilježje koje mjerimo.
- Značaj mjerenja i smisao mjerenja ovisi o osobnom stavu prema mjernoj jedinici koja se koristi.
- Smisao mjerenja i razvoj osobnih mjerila za često upotrebljavane mjerne jedinice pomaže učenicima da povećaju svoje razumijevanje mjernih jedinica, smanje pogreške pri mjerenju i povećaju smislenu upotrebu mjerenja.
- Mjerni instrumenti su predmeti koji zamjenjuju potrebu za stvarnim mjernim jedinicama. Važno je razumjeti na koji način rade mjerni instrumenti, da bismo ih mogli ispravno koristiti.
- Formule za površinu i volumen omogućuju mjerenje tih obilježja (površine i volumena) samo uz pomoć mjerenja dužine.
- Površina, kao obilježje, i volumen su povezani međusobno, iako ne izravno preko formule [vidi: 13, str. 374].

2.2 Mjerenje u kurikulumu

Unutar kurikuluma uz brojeve, algebru i funkcije, oblik i prostor, podatke i infinitezimalni račun mjerenje je jedan od konceptata koji se obrađuje u sva četiri obrazovna ciklusa. Prvi obrazovni ciklus obuhvaća učenike od 1. do 4. razreda osnovne škole. Prema [10] učenici će po završetku prvog obrazovnog ciklusa znati:

- usporediti i procijeniti duljinu, obujam, masu, vrijeme i temperaturu te ih izmjeriti rabeći odgovarajuće mjerne uređaje

- navesti i rabiti standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme i temperaturu u svakodnevnomu životu
- računati s novcem (kune i lipe) u svakodnevnomu životu
- izračunati opseg jednostavnih likova, osobito trokuta, pravokutnika i kvadrata te površinu pravokutnika i kvadrata
- približno ili točno izmjeriti površinu jednostavnih likova prebrojavanjem jediničnih kvadrata
- odrediti mjeriva obilježja jednostavnoga objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema. vidi: [10, str. 118].

Po tome vidimo da će učenici već sa završena četiri razreda osnovne škole znati najosnovnije o mjerenju. Bit će im poznati pojmovi kao što su opseg i površina te će znati svoje znanje povezati sa stvarnim životom. U ovom obrazovnom ciklusu nužna je upotreba mnoštva primjera iz okoline učenika jer učenici u tom razdoblju nisu sposobni pratiti sve kroz suhoparnu teoriju. Drugi obrazovni ciklus koji obuhvaća učenike petog i šestog razreda osnovne škole zahtjeva nešto više upotrebe teorije. Prema [10] učenici će po završetku šestog razreda znati:

- usporediti, procijeniti i izmjeriti duljinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu i kut
- preračunati standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu i kut te ih primijeniti u svakodnevnomu životu
- računati s novcem u svakodnevnim situacijama
- približno i točno odrediti udaljenost dviju točaka, površinu likova i obujam jednostavnih tijela brojanjem jediničnih dužina, kvadrata i kocaka te prelijevanjem tekućine
- neizravno izmjeriti duljinu koristeći se proporcionalnošću (mjerilo karte)
- primijeniti formule za opseg, površinu i zbroj unutarnjih kutova trokuta i četverokuta te obujam kocke i kvadra
- odrediti mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema.

Između prvog i drugog obrazovnog ciklusa prilično je veliki iskorak, posebno u pogledu računanja. Naime, kako učenici u tom vremenskom razdoblju uče više računati s razlomcima i decimalnim brojevima, rade sa zemljovidom, osamostaljuju se u vlastitom domu, za očekivati je da će im biti lakše preračunavati mjerne jedinice, shvatiti pojam proporcije te znati računati sa stvarnim novcem. Znanje o formulama za opseg i površinu proširuje se novim

formulama, a veći je i broj obilježja određenog objekta koje učenici prepoznaju i mjere. Treći obrazovni ciklus prema [10] pred učenike stavlja slijedeće zadatke:

Učenici će:

- usporediti, procijeniti i izmjeriti duljinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu i kut te izračunati površinu i prosječnu brzinu
- preračunati standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu, kut i prosječnu brzinu te ih primijeniti u svakodnevnom životu
- neizravno izmjeriti duljinu primjenjujući proporcionalnost i sličnost
- primijeniti Pitagorin poučak i druge osnovne formule u svezi s mjerivim obilježjima jednostavnih likova i tijela
- odrediti mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama, odabrati primjerene mjerne jedinice i mjerne uređaje te primijeniti mjerenje pri rješavanju problema.

Ovaj obrazovni ciklus zahtjeva puno veću bazu znanja od prethodna dva ciklusa. Znanje matematike dopunjuje se u sedmom i osmom razredu znanjem iz fizike i kemije. Posebno je presudno znanje iz fizike koje postupno uključuje nove mjerne jedinice i opisuje odnose mjernih jedinica i istovremeno ih povezuje sa stvarnim životom učenika. Četvrti obrazovni ciklus koji obuhvaća srednju školu nešto se razlikuje za četverogodišnje i trogodišnje škole. Učenici strukovnih škola prema [10] po završetku svog školovanja trebaju znati isto što i na kraju trećeg obrazovnog ciklusa, dok se od učenika gimnazija očekuje više. Učenici na kraju gimnazije trebaju znati:

- preračunati standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme, temperaturu, kut i brzinu te ih primijeniti u svakodnevnom životu
- odrediti mjeriva obilježja likova i tijela primjenjujući osnovne formule, proporcionalnost, sličnost, Pitagorin poučak, trigonometrijske omjere i poučke o sinusima i kosinusu te ih rabiti u računanju duljine, mjere kuta, površine i obujma
- odrediti mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnoj situaciji te primijeniti mjerenje pri rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima svakodnevnom životu.

Prva tri obrazovna ciklusa najviše su usmjerena na razumijevanje i primjenu mjerenja u svakodnevnom životu. Četvrti obrazovni ciklus (dio koji se odnosi na gimnazije) očekuje dobro poznavanje osnova mjerenja te pred učenike stavlja nešto složenije matematičke probleme i zahtjeva njihovo rješavanje bez da se previše razmišlja o samim osnovama - one su već dobro naučene i uvježbane.

2.3 Značenje i proces mjernja

Pretpostavimo da ste upitali učenike da izmjere praznu posudu. Prva stvar koju bi htjeli znati jeste što mjere kod prazne posude. Mogu mjeriti visinu ili dubinu, promjer ili obujam. Sve ovo su duljine različitih mjera. Može biti definirana površina jedne određene strane posude. Posuda također može imati i zapreminu i težinu. Svaka stavka od tih nabrojanih je zapravo jedno obilježje posude. Kada se jednom definira obilježje koje se mjeri, mora se odabrati mjerna jedinica u kojoj se mjeri. Ta jedinica mora imati to obilježje koje se mjeri. Duljina je mjerena u mjernoj jedinici za duljinu, volumen u mjernoj jedinici za volumen, i tako dalje. Tehnički gledano, izmjereni broj je broj koji pokazuje odnos između određenog obilježja objekta (situacije, događaja) i istog tog obilježja određene mjerne jedinice. Za mjerenje koristimo često male mjerne jedinice. Na primjer, možemo imati izrezanu jediničnu dužinu nečega te pomoću nje mjeriti objekt, odnosno obilježje nekog objekta. Recimo, kada bismo mjerili težinu, koja je zapravo snaga kojom zemlja privlači tijelo, odnosno sila teža, težina objekta mora se prvo staviti na oprugu. Tada uspoređujemo, koliko bi morali staviti jedinica težine na oprugu da bismo izazvali isto rastezanje opruge. Za najviše svojstava ili obilježja objekta koja se mjere u školi, možemo reći da *izmjeriti* nešto znači provjeriti koliko je jediničnih duljina s istim obilježjem potrebno da bi se to obilježje *ispunilo*, *prekrilo* ili *povezalo*. To s *ispunom* ili *prekrivanjem* nečega je zapravo vrlo dobar način za razgovor s učenicima o mjerenju.

Obilježje: TEŽINA	Radnja: Objekti rastežu oprugu po određenoj skali. Koliko jediničnih veličina treba da bi se opruga razvuče kao kada bismo okačili posudu o tu istu oprugu?
Obilježje: VOLUMEN	Radnja: Kocke, kugle ili čaše vode. Koliko jediničnih veličina treba da bismo ispunili posudu?
Obilježje: DULJINA	Radnja: Postavljamo štapove, čačkalice, uže ili žicu da vidimo koliko jediničnih dužina trebamo da bismo dobili objekt visok kao posuda? Ili, koliko nam je potrebno jediničnih dužina čačkalice, štapa, užeta ili žice da bismo okružili posudu?
Obilježje: POVRŠINA	Radnja: Kartice, komadi papira (kvadratni), pločice, koliko njih je potrebno da bismo prekrili površinu posude?

Tablica 2.1: Mjerenje različitih obilježja posude

Ukratko, da bismo nešto izmjerili, mjerenju mora prethoditi slijedeće:

1. Odlučimo koje obilježje mjerimo.
2. Odaberemo mjernu jedinicu u kojoj ćemo mjeriti odabrano obilježje.
3. Uspoređujemo jedinicu ispunom, prekrivanjem, povezivanjem ili nekom drugom metodom sa obilježjem objekta kojeg mjerimo. Mjerni instrumenti i mjerna pravila kao što su skale, kutomjeri i satovi su uređaji koji rade to ispunjavanje, prekrivanje ili povezivanje. Oni nam olakšavaju proces mjerenja. Nešto više o njima reći ću u nastavku rada.

2.4 Razvoj vještina u mjerenju

Prosječna grupa učenika trećega razreda mjeri svoju učionicu tako što polažu 1 metar dugačke komade užeta od kraja do kraja. Ali uže nekada nije odgovarajuće dužine i malo nedostaje da bi učionica bila točno izmjerena. Razumiju li učenici koncept mjerenja duljine učionice? Razumiju li oni da svaki komad užeta duljine 1 metar predstavlja upravo duljinu (to obilježje)? Razumiju li svoj zadatak da jednu mjernu jedinicu uklope u učionicu koja je puno dulja? Najvjerojatnije je da oni shvaćaju, pretpostavljaju da rade liniju od užeta od zida do zida. Zastanimo na trenutak i osvrnimo se na svoje mjerenje kuta pomoću kutomjera. Kada ne bismo imali kutomjer, kako bismo odredili veličinu kuta? Ako se u školi ne nauči kako izmjeriti kut bez kutomjera, malo je vjerojatno da će se to uopće naučiti jer se vještina mjerenja mora započeti vrlo rano, odnosno jako je važno da se koncept mjerenja razumije što ranije.

Osnovni plan uputa za mjerenje - primjer rada s učenicima:

Osnove kod razumijevanja mjerenja predlažu kako pomoći djeci da što lakše nauče mjeriti.

1. korak:

CILJ: Učenici razumiju obilježje koje mjere.

TIP AKTIVNOSTI: Napraviti usporedbu temeljenu na obilježjima. Na primjer: kraće - dulje, niže - više, teže - lakše. Upotrijebiti izravne suprotnosti kad god je to moguće.

BILJEŠKE: Kada je jasno da je obilježje razumljivo, nije potrebno dalje raditi aktivnosti usporedbe pomoću suprotnosti.

2. korak:

CILJ: Učenici će razumjeti kako ispunjavanje, prekrivanje ili povezivanje, odnosno bilo koja radnja koju radimo da bismo odredili koliko jediničnih duljina trebamo za određeno obilježje znači zapravo izmjeriti obilježje, a sam proces mjerenja kao rezultat daje broj.

TIP AKTIVNOSTI: Uzeti opipljiv model za mjerenje veličine 1 (ovisno o kojoj mjernoj

jedinici se radi) za ispunu, prekrivanje ili povezivanje da bi se lakše napravila usporedba jedinice s veličinom mjerenog obilježja.

BILJEŠKE: U najviše primjera je prikladno početi s neformalnim mjernim jedinicama. Napredak ka upotrebi standardnih mjernih jedinica napraviti tek kad učenici shvate što mjere, ali zasigurno prije upotrebe formula i alata za mjerenje.

3. korak:

CILJ: Učenici samostalno i s razumijevanjem mogu mjeriti koristeći pripadne alate i formule.

TIP AKTIVNOSTI: Izraditi neke alate za mjerenje, usporediti te alate koje učenici izrađuju od jediničnih duljina (npr, komadi žice dugi po 10 *cm*, usporediti spoj 4 takva s ravnalom duljine 40 *cm*) sa standardnim alatima te im pokazati kako je to jedno te isto. Uvjeriti se da su učenici alate izradili ispravno.

BILJEŠKE: Alati koje su učenici izradili su najčešće najbolje napravljeni kada nisu formalno rađeni od standardnih jediničnih duljina. Bez pažljive usporedbe učenici će možda krivo shvatiti da su njihovi alati potpuno točni, pa je potrebno pažljivo provjeriti sve i usporediti.

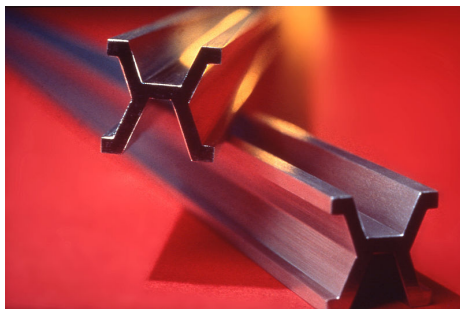
(primjer preuzet iz [1], [vidi: 13, str. 376].)

2.5 Mjerenje duljine

Mjerenje duljine je uglavnom prvo obilježje koje učenici uče mjeriti. Od samih početaka obrazovnog procesa, čak i u vrtiću djeca će znati usporediti nešto po duljini. Primjerice, u bojkama će bojati drvenim bojicama koje se troše, boju koju najčešće koriste će najviše i šiljiti pa će ona biti kraća od neke druge boje. Neka djeca će možda bojice u svojoj pernici posložiti od najdulje do najkraće. Tada djeci treba osvijestiti pojmove: dulji, kraći, jednake duljine. Važno je i usporediti dva ili više objekata koji nisu na istom pravcu. Učenicima se može postaviti zadatak da pronađu predmet u svojoj okolini koji je približno jednak duljini njihove ruke ili prsta. Za mjerenje duljine učenici će najprije koristiti neformalne mjerne jedinice. Nastavnik može biti kreativan pa izrezati papir u obliku stopala te napraviti 20-ak kopija tog papira. Učenici tada mogu slagati te papirnate stope i "izmjeriti" koliko stopala je nešto dugačko. Također, može se s raditi i sa slamkama koje su jednake duljine te sa pregršt drugih pomagala. Na taj način nećemo uvesti centimetre, metre i milimetre, ali će svaki učenik shvatiti da smo koristili jedinicu - bila to jedna slamka ili stopa od papira. Za bolje shvaćanje i učenje te kao izazov učeniku može se postaviti zadatak da učenik procjeni koliko je nešto dugačko. Na primjer, ako odrežemo komad užeta, zadatak može glasiti: Koliko je takvih komada potrebno da bismo došli s jednog kraja učionice na drugi? Isprva učenici

pogađaju koliko otprilike misle da je potrebno, a na kraju izmjerimo tako da uže postavljamo od jednog kraja učionice do drugog (premještamo našu jedinicu duljine).

Sve te aktivnosti kod prvog susreta učenika s mjerenjem su ključne za napredovanje. Ako učenik u samom početku mjerenja tu aktivnost shvati kao blisku i zabavnu, lakše će svoje znanje proširiti s mjernim jedinicama koje su cilj nastavniku u toj početnoj fazi. Mjerenje duljine je izrazito važno i zbog toga što se pomoću duljine kasnije računaju druga obilježja poput površine i volumena. Kada učenici savladaju ove osnove, treba im postaviti teže zadatke. Primjerice, uzmemo dvije jedinice tako da je jedna dvostruko veća od druge. S obje jedinice mjerimo duljinu nečega. Učenici na kraju trebaju zapisati ono što su dobili mjerenjem te uočiti da su rezultati u omjeru kao i mjerne jedinice. Također, možemo uzeti neku mjernu jedinicu te tražiti od učenika da napravi dvije dvostruko manje mjerne jedinice od te. Učenici često mogu biti razdražljivi ako ne dobiju iste rezultate kao njihovi kolege i mogu si zakomplicirati mjerenje. Potrebno je pripaziti na svakog pojedinačno i vidjeti radi li netko od učenika neku veliku grešku te greške popraviti. Ako nešto ne možemo izmjeriti upotrebom jedinične duljine (fali nam malo ili imamo ostatak od jedinične duljine koju koristimo) učeniku treba predložiti uporabu razlomka ili decimalnog broja (ovisno o tome je li učenik upoznat s razlomcima), ali svakako će i mlađi učenik shvatiti što znači "polovica" ili "jedna i pol" jedinična duljina. Upoznavanje s duljinom jednog metra kao standardne mjerne jedinice za duljinu može započeti u fazi kada učenik shvati pojam duljine. Vrlo dobar uvod u upoznavanje metra može biti kratka priča o povijesti nastanka te mjerne jedinice. Još 1668. godine britanski filozof John Wilkins započeo je proces standardizacije duljine metra. U osamnaestom stoljeću bila su poznata dva pristupa definiranju metra: Jedan pristup je metar definirao kao put koji prijeđe njihalo s polu-periodom od jedne sekunde. Drugi pristup definirao je metar kao $\frac{1}{10000000}$ duljine od Sjevernog pola do Zemljinog ekvatora. 1791. godine prihvaćena je definicija metra uz pomoć drugog pristupa, pri čemu je bila korištena duljina meridijana koji prolazi kroz Pariz. 1889. godine izrađen je i prototip metra. Radilo se o šipki izrađenoj od posebne slitine sa 90% platine i 10% iridija, koja ima karakterističan poprečni presjek u obliku slova X. Te godine u sklopu internacionalne konferencije CGPM (*Conférence générale des poids et mesures*) izrađeno je 30 šipki koje imaju duljinu $0.9999984m \pm 0.2\mu m$. Svoj današnji oblik definicija metra dobila je 1983. godine i kaže da je jedan metar put koji prijeđe svjetlost u vakuumu tijekom $\frac{1}{299792485}$ sekunde. Ova definicija nije promijenila duljinu metra koja je do tada bila poznata nego je stvorena kao težnja da se točno definira koliko jedan metar iznosi. Ovisno o uzrastu učenika nastavnik bi trebao što jasnije približiti definiciju metra.



Slika 2.1: Prototip metra izrađen od platine i iridija

2.5.1 Izrada i upotreba ravnala

Prijelaz sa neformalnih mjernih jedinica kao što su stopa, slamčica ili komad užeta na ravnalo predstavlja izazov učenicima. Jedan od najboljih načina da učenici shvate čemu služi ravnalo i kako ga pravilno upotrijebiti jeste da sami naprave vlastita ravnala. Slažući jedinične duljine jednu do druge, shvatit će da je ravnalo zapravo niz uzastopno poslaganih jednakih duljina. Pri izradi ravnala ne treba odmah uzeti točno određenu jediničnu duljinu od centimetar ili pet centimetara, ali je važno da učenici shvate da su sve jedinične duljine jednake. Na kraju izrade učenici će najbolje shvatiti da jedinice na njihovim ravnalima možemo povezati sa stvarnim veličinama, odnosno stvarnim mjernim jedinicama. Dobro je pred učenike staviti neki predmet koji je duži nego njihovo ravnalo te ih navesti da zakluče kako bi izmjerili takav predmet. Isto tako, može ih se upitati što bi se dogodilo kada bismo počeli mjeriti od sredine ravnala. Učenici mogu ubaciti i brojeve u svoje jedinične duljine. Brojeve zapisuju u centar jedinične duljine. Standardni način označavanja ravnala od nule treba posebno objasniti. Prikladna je vježba mjerenja s prelomljenim ravnalom. Ako imamo ravnalo kojemu nedostaje 0 i 1 na početku i zahtijevamo od učenika da mjere uz pomoć takvog ravnala, učenici koji ne shvaćaju mjerenje će reći da s takvim ravnalom ne mogu mjeriti jer mu nedostaje početna točka. Učenici koji su shvatili mjerenje znati će mjeriti udaljenost i s takvim ravnalom. Na kraju svega, učenici koji shvaćaju mjerenja predstaviti će si ravnalo kao niz jediničnih duljina. Učenicima se treba objasniti i razlika između standardnog i ručno izrađenog ravnala. Potrebno je reći što znače brojevi na ravnalu i što znače sve te crtice između brojeva te ostale oznake koje se eventualno mogu na ravnalu naći.

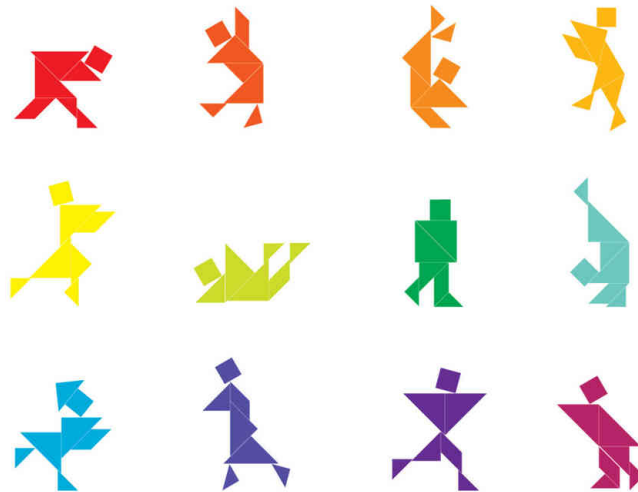
2.6 Mjerenje površine

Površina je dvodimenzionalan prostor unutar određenog područja. Kao i kod drugih obilježja, učenici najprije moraju shvatiti samo obilježje površine prije nego počnu površini mjeriti. Istraživanje koje su je proveo odsjek za procjenu znanja i obrazovnog procesa NAEP

(*National Assessment of Educational Progress*) dovelo je do podatka da učenici osmih razreda (13 - 14 godina starosti) ne shvaćaju u potpunosti pojam površine (podaci iz *Martin i Strutchens, 2000*). Pojam površine se obrađuje na način da učenici kao i kod duljina shvate da postoje predmeti veće i manje površine. Počinje se s uspoređivanjem, ali i tu se znaju dogoditi greške. Naime, učenici vrlo lako usporede dva kvadrata, dva kruga, dva pravokutna trokuta ili bilo koja dva predmeta jednakog oblika i mogu s određenom sigurnošću ustvrditi koji ima veću površinu, ali ako im damo krug i trokut slične površine teško će moći ustanoviti čija je površina veća. Također, možemo izraditi predmete različitog oblika, ali iste površine i onda ustanoviti da je njihova površina jednaka iako su im oblici različiti.

Pogledajmo primjer: Izrežemo veliki broj pravokutnika. Za svaki par učenika potrebno ih je 6. Učenici trebaju prepoloviti pravokutnik po dijagonali. Na taj način će od jednog pravokutnika dobiti dva identična pravokutna trokuta. Te pravokutne trokute mogu na različite načine složiti jedan do drugoga. Svi novi likovi imati će jednaku površinu, a različit oblik od pravokutnika s početka vježbe. Učenici mogu poslagane likove i zalijepiti u svoje bilježnice.

Kao dobra vježba za učenike u ovoj fazi učenja i shvaćanja pojma površine te njezina mjerenja, vrlo dobro mogu poslužiti tangrami. Pojam tangrama obuhvaća 7 geometrijskih tijela različite veličine i oblika izrezanih iz kvadrata. Imamo 5 pravokutnih trokuta, 1 kvadrat i 1 paralelogram. Učenici tangrame mogu slagati u željene oblike i važno je da shvate da tih sedam dijelova zajedno uvijek ima jednaku površinu.



Slika 2.2: Tangrami složeni u različite oblike, ali svi s jednakom površinom

Kada završi uspoređivanje površina, učenici počinju mjeriti. Prvi doticaj s mjerenjem biti će pomoću prekrivanja površine. Učenicima se izrežu papirnati kvadrati jednake veličine (sa stranicom duljine od 5 do 10 centimetara) i kaže im se najprije da izmjere neku pravokutnu

površinu. Oni će tu površinu prekrivati svojim kvadratima od papira te će na taj način shvatiti da im treba određen broj kvadrata za neku površinu. Nadalje, učenicima nakon toga treba dati da izmjere površinu nekog nepravilnog lika. Već kod ovog zadatka oni shvaćaju da površinu ne mogu izmjeriti u potpunosti točno na način na koji rade i težit će točnijem rezultatu. Htjet će prekriti male dijelove površine pa će shvatiti da im je potreban nekakav drugačiji oblik od kvadratića. Već u trećem ili četvrtom razredu, učenici će uvidjeti da na nekom mjestu može pristati pola kvadrata, polukrug ili nekakav drugi oblik, ovisno o obliku površine koju mjere. Jedna dobra vježba je dati učenicima nepravilne oblike te ih redom pitati što misle, koja je površina najmanja, koja najveća te im zadati da prekriju nepravilne oblike pomoću pravokutnika. U ovoj početnoj fazi učenja nikako ne treba dati učenicima formule za računanje površine. Ako radimo s učenicima u grupama, često će se razlikovati izmjerena površina za isti zadani oblik. Poželjno je s učenicima razmisliti o tim razlikama te vidjeti što oni misle, zašto se razlike događaju te poticati daljnje razmišljanje o odgovoru koji je najbliži "ispravnom" odgovoru. Tek kada su učenici peti ili šesti razred uvodi se pojam množenja širine i visine za računanje površine pravokutnika. Tada nam slijedeća aktivnost može pomoći u boljem shvaćanju: Učenicima damo dva pravokutnika koja su slična po površini te jedno ravnalo. Pustimo ih da razmisle i uz pomoć ravnala odgovore na pitanje koji je pravokutnik veći i zašto. Učenici od ranije moraju biti upoznati s upotrebom ravnala i svoje zaključke trebaju objasniti pomoću brojeva, riječi ili crteža. Cilj ove aktivnosti nije naučiti formulu, nego uvesti množenje kao računsku operaciju koja se koristi pri mjerenju površine. Mnogi učenici će doći do rješenja tako da ucrtaju sve male kvadrate 1 puta 1. Neki će upotrijebiti svoja ravnala da bi zaključili koliko ima kvadratića sa svake strane pravokutnika i iz toga će množenjem doći do rezultata. Na kraju aktivnosti učenici objašnjavaju na koji su način riješili problem te oni koji se nisu dosjetili množenja lakše prisvajaju tu ideju.

2.6.1 Upotreba mreže

Ako izuzmemo upotrebu računala, ne postoji uređaj koji mjeri površinu. Ipak, različite vrste mreža mogu biti svojevrsno "ravnalo" za mjerenje površine. Mreža kvadrata za površinu znači isto što i ravnalo za duljinu. Osim mreža s kvadratima postoje i mreže s trokutima. Kada se učenicima pokaže mreža za pomoć pri mjerenju površine, treba obratiti pozornost na to shvaćaju li oni na koji način mjere površinu (treba im najprije biti vrlo jasna uporaba ravnala).

2.6.2 Problem zamjene površine i opsega

Učenici često imaju problema s razlikovanjem pojma površine i opsega. Te pojmove upoznaju u različito vrijeme, ali ako računaju primjerice opseg i površinu pravokutnika, znaju da moraju izmjeriti dvije strane tog pravokutnika - širinu i visinu te ih vrlo vjerojatno zbunjuje to što i za računanje (mjerenje) opsega i površine trebaju isto. Nerjetko se učenici iznenade i ako shvate da dva pravokutnika imaju jednaku površinu, a različit opseg. Također, dva geometrijska lika koja imaju jednak opseg ne moraju imati i jednaku površinu.

2.7 Mjerenje volumena i zapremine

Volumen i zapremina su pojmovi koji mjere *veličinu* trodimenzionalnog prostora. Riječ volumen uglavnom se koristi kada želimo reći koliki prostor zauzima neko tijelo, dok se zapremina koristi u značenju koliko se u neki spremnik može pohraniti. Kada govorimo o volumenu, najčešće koristimo kubične metre (metar drva, metar kukuruza, ...), dok o zapremini najčešće govorimo u litrama (boca s pola litre vode, rezervoar od 40 litara,...). Početak učenja mjerenja volumena i zapremine dobro je raditi pomoću uspoređivanja. Djeci će biti teško usporediti volumene dvaju tijela koji nemaju jednak oblik, ali će zato bolje shvatiti pojam zapremine. Ako imamo dvije posude i jednu ispunimo nečime, pretresanjem u drugu shvatit ćemo ima li druga posuda manju ili veću zapreminu. Većina učenika već u trećem razredu shvaćaju što znači da jedna posuda *sadrži više* nego druga. Za aktivnosti uspoređivanja zapremina dobro je imati što više različitih posuda, čaša, boca, kanti, po mogućnosti različitih oblika jer će učenici tako moći mjeriti koliko boca stane u kantu ili koliko čaša stane u bocu što će nadalje samo pospješiti njihovo razumijevanje (za mjerenje i uspoređivanje može poslužiti riža ili neke druge žitarice, voda, pijesak,...). Ako učenicima damo da vide dvije posude različitog oblika, ne možemo očekivati da će oni znati reći koja je posuda većeg, a koja manjeg volumena. Čak i odrasli s dosta iskustva mogu pogriješiti u toj prosudbi. Zgodna aktivnost kod učenja mjerenja volumena je uzeti dva jednaka papira pravokutnog formata te napraviti od oba oblik valjka spojivši im dvije stranice.

Dva valjka će se razlikovati po tome što ćemo prvi napraviti tako da spojimo dulje stranice pravokutnika, a drugi uzimanjem kraćih stranica pravokutnika (*Slika 3.3*). Kada ih postavimo uspravno, koji valjak ima veći volumen? Je li njihov volumen jednak? Ovo je dobar zadatak i za starije učenike kojima treba

postaviti pitanje i reći im da se odluče bez upotrebe formule za računanje volumena valjka. Prije nego im se otkrije rješenje, treba zapisati koliko njih je mislilo da prvi ili drugi valjak ima veći volumen, a koliko njih misli da imaju jednak.

Kod učenja mjerenja volumena ili zapremine bez uporabe standardnih mjernih jedinica, mogu se upotrebljavati dvije vrste mjerenja: mjerenje pomoću raznih predmeta kao što su



Slika 2.3: Slika dva valjka napravljenih od papira A4 formata

na primjer teniske loptice, male drvene kocke i mjerenje pomoću manjih kutija koje slažemo u veću dok ju u potpunosti ne ispunimo. Dobri pomagači u mjerenju mogu biti plastične čaše i mali dozeri, ako mjerimo precizno i želimo koristiti male mjerne jedinice, isto tako, jednake drvene kocke ili jednaki kvadri mogu biti od pomoći dokle god ih imamo veliku količinu. Aktivnosti koje provodimo pri mjerenju volumena ili zapremine prilično su slične onima kada mjerimo duljinu i površinu. Razlika između tih aktivnosti jeste samo ta što je mjeriti volumen zahtjevnije, ali i zanimljivije. Pronaći način kako što preciznije izmjeriti volumen velikog valjka može biti jako dobra aktivnost za učenike u četvrtom i petom razredu i ta aktivnost se može odraditi daleko ranije nego što se uvodi formula za izračunavanje volumena. Također, ako učenicima damo veliku količinu jednakih kocaka i kažemo im da izmjere volumen kutije za cipele, oni će u većini slučajeva posložiti sve redove kocaka u kutiju. Vrlo mali broj njih će posložiti jedan red pa vidjeti koliko redova bi još mogli posložiti, no to ne treba biti obeshrabrujuća činjenica jer sama aktivnost pozitivno utječe na kognitivni razvoj svakog učenika.

2.7.1 Izrada i upotreba čaše za mjerenje

Pomoć pri mjerenju zapremine u većini slučajeva su plastične čaše ili posude s kojima ispunimo mjereni objekt vodom, rižom ili sličnim materijalom. Te *alate* za mjerenje uglavnom možemo pronaći u svakoj kuhinji, ali kao i s ostalim alatima, učenici će ih bolje shvatiti i osjetiti što znači izmjeriti zapreminu ako koriste one koje su sami izradili. Aktivnost izrade i uporabe čaša za mjerenje može početi tako da izaberemo veliku posudu čiju zapreminu mjerimo

te manju posudu ili čašu pomoću koje ćemo mjeriti. Ispunimo čašu s rižom ili grahom i

istresemo njezin sadržaj u veliku posudu. Označimo na velikoj posudi nivo

do kojeg smo ju ispunili. Ako je čaša mala i razlika se ne primijeti nakon sipanja samo jedne, označimo svakih 5 ili više čaša. Postupak ponavljamo dok velika posuda nije gotovo puna. Ne trebaju se posebno pisati brojevi kraj oznaka nivoa na velikoj posudi: dovoljno je povlačiti crtice koje će učenicima pomoći da bolje shvate prave čaše za mjerenje koje na sebi imaju oznake. Ovu aktivnost treba iskoristiti da bi učenici shvatili kako nisu sve čaše za mjerenje jednake pa

može doći do pogrešaka u računanju zapremine. Isto tako, učenici u tom trenutku nakon aktivnosti uočavaju je važno imati dobro kalibriranu (baždarenu) mjernu jedinicu jer je mjerenje u tom slučaju preciznije i s manje pogrešaka.

2.8 Mjerenje mase i težine

Težina je snaga kojom gravitacijska sila privlači tijelo. Masa je količina neke tvari u objektu i sila koja je potrebna da bi se objekt ubrzao. Na Mjesecu gdje je gravitacija slabija nego na Zemlji je težina objekta manja, ali je masa objekta jednaka kao na Zemlji. Kako bismo usporedili težinu dvaju objekata koje možemo podignuti, najčešće koristimo vlastite ruke. Uzmemo jedan objekt u jednu, a u drugi u drugu ruku te *po osjećaju* zaključujemo koji je objekt teži. Već i na samom početku obrazovnog procesa djeca razumiju što znači *teže*, *lakše*, ... To osobno iskustvo s težinama može biti prevedeno u dvije različite vrste mjerenja težine: mjerenje pomoću opruge i mjerenje pomoću vage.



Slika 2.4: Opruga i dvije različite vrste vage

Učenici će procijeniti koji je od dva objekta teži pomoću ruku, a nakon toga ih mogu staviti na vagu da bi točno znali koji objekt je teži, jer će strana vage na kojoj je teži objekt otići niže nego strana vage na kojoj je lakši objekt. Učenici shvaćaju da je strana s težim objektom otišla niže jer *drži* teži objekt. Isto se događa ako objekte stavljamo

na oprugu. Više će se rastegnuti opruga s težim objektom. Kod učenika mlađeg uzrasta dobre su vježbe usporedbe, a kod učenika viših razreda ovakve usporedbe nisu potrebne zato što oni već počinju razumijevati mjerne jedinice te znaju da bi težinu i masu objekta trebali izmjeriti u stvarnoj vrijednosti neke mjerne jedinice. Za mjerenje mase može poslužiti bilo koja kolekcija jedinstvenih objekata s jednakom masom. Za lakše objekte mogu dobro poslužiti male drvene ili plastične kockice. Velike metalne ploče mogu biti od pomoći ako se mjeri masa težeg objekta. S vremena na vrijeme dobro je pri mjerenju se osloniti na upotrebu prave vage da bi se odredilo je li nešto teže ili lakše od kilograma. Kada uvodimo sam pojam kilograma, korisno je učenicima dati predodžbu o tome kako je nastao kilogram. Još 1795. godine određeno je koliko iznosi jedan gram. Masa jednog grama bila je jednaka masi jednog kubičnog centimetra vode na 4°C. Prototip kilograma izrađen je 1799. godine i njegova masa iznosi jednako kao masa 1.000025 litara vode. Učenici će tada moći prihvatiti koliko teži jedan kilogram jer većina njih zna koliko je *teška* litra vode. Vrlo je vjerojatno da su svima nama u djetinjstvu postavljali pitanje: "Što je teže: 1 kilogram željeza ili 1 kilogram vune?". To pitanje se odraslima čini jednostavno, ali je zapravo vrlo smisljeno. Ukoliko učeniku postavimo to pitanje i on nam zna odgovoriti: "Kilogram željeza teži isto kao kilogram vune.", to nam govori da on razumije koncept mjerenja mase. Ukoliko učenik odgovori pogrešno (uglavnom to bude odgovor "Kilogram željeza je teži od kilograma vune.") onda vidimo da on zna da je željezo samo po sebi teže od vune, ali ne razumije da se ovdje radi o istoj masi, pa mu se dodatno mora pojasniti. Procijena mase nekog objekta je nešto drugačija od dosada sagledanih procjena duljine, površine ili volumena. Ona ovisi o materijalu koji sačinjava objekt čiju masu želimo procijeniti. Nespretno je govoriti o masi pune kutije, ako ne znamo što se nalazi unutra: vuna ili željezo. Također, možemo stavljati na vagu jednaku masu vune i željeza te pogledati koliko različit je njihov volumen, a vagu pritišću jednakom silom.

2.8.1 Izrada i upotreba skale

Većina vaga u današnje vrijeme pokazuje masu ako objekt stavimo u ili na vagu, ovisno o vrsti vage. Mjerne jedinice za mjerenje mase ili težine ne možemo vidjeti, pa se često zapitamo, kako vaga pokaže ispravan broj? Izradom skale koja daje nekakav određeni broj bez obzira na mjernu jedinicu, možemo predočiti na kojem principu mjerimo masu i težinu. S učenicima provedemo aktivnost. Iza vage smjestimo prazan papir. Na vagu stavimo jednake kockice od drveta (ili neke druge objekte za koje znamo da su jednake mase) i nakon svakih pet kockica označimo na papiru iza vage razinu do koje se vaga spustila. Na papiru ćemo tada dobiti skalu i znat ćemo da je između svake crtice jednaka udaljenost. Iako na skali nema brojeva, na ovaj način ćemo pokazati učenicima kako se ona izradi. I moderne vage počivaju na ovakvom principu.

2.9 Mjerenje vremena

Vrijeme je pomalo neobično svojstvo za mjerenje. Nema osobe koja vrijeme konstantno osjeti ili ga može dodirnuti. Učenici u pravilu ne znaju kako povezati jedinice za vrijeme ili kako su one povezane s nekim određenim vremenskim periodom. Vrijeme možemo shvatiti kao period između početka i kraja neke pojave. Kao i kod mjerenja drugih obilježja, ovdje možemo napraviti usporedbu dvaju vremenskih perioda različite duljine. Nakon te vježbe, učenici znaju reći da je neka pojava *dulje trajala* od neke druge. Ako dva događaja počnu istovremeno, onda znamo da je kraći onaj događaj, koji prije završi. Isto tako, korisno je pogledati situaciju u kojoj periodi ne započnu u isto vrijeme, ali završe istovremeno, u tom slučaju će onaj događaj koji je kasnije počeo biti dulji. Jedna neformalna mjerna jedinica za vrijeme može biti vrijeme odbijanja teniske loptice od zid, padanje kapi vode u neku posudu ili presipanje pijeska na pješčanom satu.

2.9.1 Čitanje sata

Sat je instrument za mjerenje vremena. Čitanje analognog sata zahtijeva veće vještine mjerenja vremena nego čitanje digitalnog sata. Za čitanje digitalnog sata potrebno je samo znati čitati brojeve. Analogni sat djeci može predstavljati problem radi načina učenja o vremenu. U nekim školama se najprije uči da dan ima 24 sata, zatim da se govori da svaki sat ima polovice, pa četvrtine i tek onda se spominju minute. Djeci su tada u udžbenicima dani zadaci gdje je vrijeme uvijek na punom satu, na polovini ili na četvrtini sata. Kada im se nakon toga objasne vremenski intervali od 5 minuta do 1 minute, oni često rade greške pri čitanju sata. Upotreba digitalnog sata nije loša, ali ako je primjerice na satu 17:56 sati, može se dogoditi da netko tko to vrijeme pročita ne shvaća da je do punoga sata još preostalo 4 minute, zato jer ne zna da sat ima 60 minuta. Postoje vježbe koje mogu olakšati učenje čitanja digitalnog sata. Učenicima se može najprije dati analogni sat koji ima samo kazaljku za sate te koristiti izraze kao što su "Sada je oko 7 sati." , "Uskoro će pola 8", "Ima negdje između 2 i 3". Kada koristimo analogni sat s dvije kazaljke, učenicima trebamo davati najprije jednostavnije pozicije sata, a tek onda one kod kojih vrijeme nije zaokruženo na 15, 30, 45 minuta ili na punom satu. Treba koristiti izraze kao što su "Sada je 1 i 20", "Uskoro će 15 do 6",... Na kraju učenja, dobro je učenicima dati analogni i digitalni sat. Zadatak se sastoji u tome da vrijeme koje je na digitalnom satu treba namjestiti i na analognom i obrnuto. Također, nije loše ako učenici trebaju izračunati koliko je vremena prošlo od njihovog dolaska u školu do sata matematike, ili koliko je vremena prošlo od pola 10 do 1 i 15. Vezano uz osnove o mjerenju vremena, potrebno je i na neki način prikazati koliko traje jedna sekunda, koliko minuta ili neki dulji vremenski period. Dobro je zahtijevati od učenika da sa standardnim analognim satom (tri kazaljke - sat, minuta i sekunda) izmjere trajanje

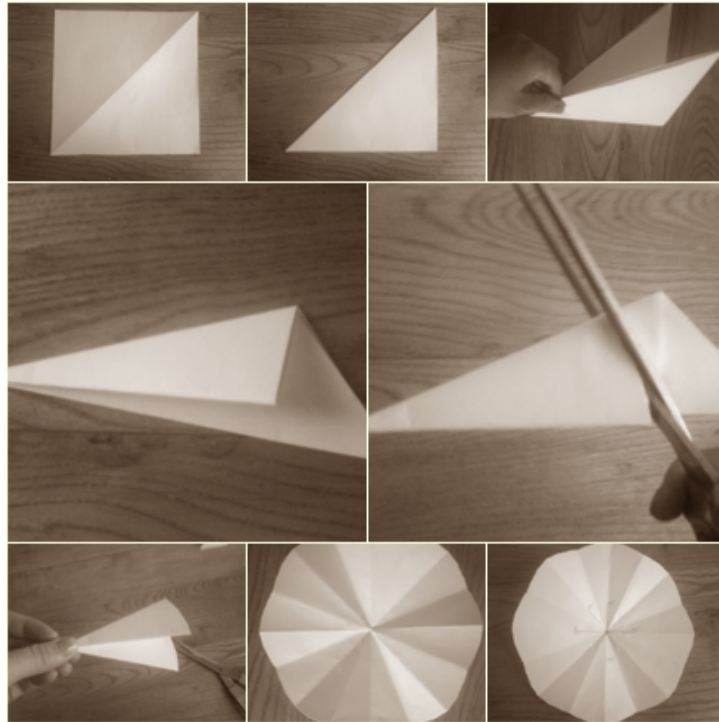
neke TV reklame ili video spota. U našim osnovnim školama učenici izrađuju analogne satove od kartona te na njima uče mjeriti vrijeme. Starijim učenicima dobro je postavljati pitanje koliko ima do punog sata, ako im se pokaže digitalni sat. Iz jednog istraživanja [vidi: 13, str.392] poznato je da čak 58% učenika osmog razreda ne zna bez duljeg razmišljanja reći koliko sati je jednako kao 150 minuta. Na kraju učenja na sat treba upozoriti na satove koji su naređeni tako da pokazuju vrijeme u 12 satnom formatu, i na one kojim imaju format 24 sata.

2.10 Mjerenje kutova

Mjerenje kutova je učenicima teško iz nekoliko razloga: često im je nepoznato kako se uopće kut mjeri i što se to kod kuta mjeri, a drugi problem je uvođenje kutomjera bez prethodnog ranijeg upoznavanja. U samom početku učenici trebaju naučiti da se kod kuta mjeri prostor između dvaju polupravaca koji su beskonačni, a imaju zajednički vrh. Mjerenje kuta je zapravo vrlo povezano s mjerenjem vremena jer kao i kod vremena imamo sate (stupnjeve), minute i sekunde. Jedna minuta i ovdje ima 60 sekundi, a jedan stupanj (kao i sat) ima 60 minuta. Jedina novost jeste ta da puni krug nema 24 stupnja, nego 360 stupnjeva. Neki od autora udžbenika za djecu smatraju da je dobro učiti učenike da kut shvaćaju kao rotirani polupravac odnosno udaljenost tog rotiranog polupravca od njegovog originala. Bilo kako bilo, da ne bismo došli do zbunjenih lica učenika, u ovom početnom trenutku obrade mjerenja kuta bolje je ne spominjati rotaciju nego jednostavno krenuti od dva kraka koja su već raširena i treba izmjeriti koliko su oni udaljeni jedan od drugoga. Kada se želi izmjeriti veličina nekog kuta, jedinica za mjerenje mora biti manji kut. Ništa drugo nema svojstvo kuta i ne može bolje opisati kut i njegovo mjerenje. Ne treba odmah uvoditi stupnjeve kao mjernu jedinicu, ali treba učenike pripremiti i na taj dio.

2.10.1 Izrada kutomjera

Kutomjer je najmanje shvaćen instrument za mjerenje u školi. Jedna od poteškoća jeste ta što su jedinice na njemu vrlo malene. Naprosto je nemoguće izrezati jedan stupanj i pokazati ga učenicima. Druga poteškoća je ta što na kutomjeru nema nacrtan niti jedan određeni kut, nego je samo stavljena hrpa tih malih oznaka za stupnjeve. Na kraju, problem je i to što na jednom kutomjeru imamo brojeve od 0 pa do 180 (ili 360, ovisi o vrsti kutomjera), a ispod toga od 180 (ili 360) do 0. To učenike poprilično zbunjuje, i oni koji nisu vješti u mjerenju tada ne znaju koji broj od ta dva izabrati za mjereni kut. Izrada kutomjera s većim jedinicama i njegova usporedba sa standardnim kutomjerom uvelike će povećati razumijevanje ovog mjernog instrumenta. U slijedećih nekoliko rečenica opisana je izrada kutomjera.



Slika 2.5: Izrada kutomjera od papira

Svaki učenik dobije papir kvadratnog oblika. Njega se presavije na pola, pa zatim opet na pola kako je pokazano na slici. Kada taj postupak ponovimo 4 puta, obrežemo širi dio koji nije presavijen i rastvorimo naš kutomjer. Ako je napravljen ispravno, kutomjer će imati 16 jednakih kutova koji se spajaju u vrhu. Naš kutomjer dovoljno je transparentan da njime možemo prekriti ili izmjeriti neki kut. Polovina tih kutova - njih 8 čine ispruženi kut, a svih 16 čine puni kut. Kutomjer se lako presavija po potrebi, pa možemo učenicima zorno dati do znanja što znači izmjeriti kut.

3 Mjerne jedinice

3.1 Uvođenje mjernih jedinica

Puno je razloga zbog kojih učenike pri samom početku mjerenja ne treba zamarati sa standardnim mjernim jedinicama, ali mjerenje samo po sebi zahtijeva da to u određenom trenutku nastavnik uvede. Učenici se kroz svoje školovanje trebaju upoznati sa mjernim jedinicama obilježja koja smo prethodno opisivali.

3.1.1 Upotreba modela jedinica

Učenici trebaju shvatiti koje mjerne jedinice odgovaraju kojim obilježjima i kako će nam te mjerne jedinice koristiti pri procesu mjerenja. Neovisno o razredu u kojem se učenici nalaze, ne bismo trebali stvoriti predrasudu o njihovom razumijevanju mjernih jedinica obilježja kojeg trenutno gledamo. Za većinu elementarnih obilježja koja se rade u osnovnoj školi, možemo imati i stvarni model jedinice za mjerenje. Jedina iznimka je vrijeme i temperatura jer njih ne možemo pokazati. Na primjer, kada mjerimo duljinu, možemo učenicima vrlo zorno prikazati na koji način ćemo duljinu mjeriti pomoću slamki za piće: Slamka će nam biti jedna jedinična duljina, pa ćemo izmjeriti koliko *slamki* nam je nešto dugačko. Za najbolje razumijevanje jedinice pomoći će nam što više primjera upotrebe jedinice da bismo nešto ispunili ili prekrili. Učenici će takve stvari razumjeti bilo da se radi o formalnim ili neformalnim mjernim jedinicama (slamka ili centimetar). Nešto zahtjevniji način mjerenja mlađoj populaciji bit će prekrivanje nečega, odnosno ispuna nečega samo uz pomoć jedne jedinične duljine ili veličine. Npr: Učenici će lakše shvatiti da je stol površine 24 igraće karte ako imamo 24 igraće karte te prekrijemo stol s njima, nego li da imamo jednu igraću kartu pa ju 24 puta stavimo na stol, označivši gdje je prethodno bila da bi smo shvatili koliko smo karata *postavili* (ali i maknuli). Korisno je i mjeriti iste stvari s više različitih objekata. Na primjer, već spomenuti stol pokušat ćemo izmjeriti s komadom papira formata A4, pa ćemo vidjeti, koliko *papira* nam treba da prekrijemo stol, a koliko karata nam treba da prekrijemo stol. Na taj način postići ćemo razumijevanje različitih mjernih jedinica za isto obilježje nekog objekta (primjerice mjere za površinu ar, jutro, hektar). Takve radnje su učenicima zanimljive jer pred njih stavljaju izazov u mjerenju, a istovremenu potežu i kvalitetnu diskusiju na satu nastave, koja mjerna jedinica je *bolja, pravilnija, jednostavnija*. Učenicima može biti zanimljivije mjeriti ako su sami izradili neki mjerni instrument. Na primjer, mogu položiti dugačku olovku od 15 cm kraj ravnala te označiti svaki centimetar na olovci. Tada će moći mjeriti neke manje udaljenosti ili duljine i uz pomoć svoje olovke što će im pomoći u razumijevanju. Mjerni instrumenti koje su izradili učenici su dobar doprinos

u učenju mjerenja, ali se naravno trebaju koristiti i standardni mjerni instrumenti da bi se razvila pedantnost i točnost u mjerenju.

3.2 Formalne i neformalne mjerne jedinice: Razlozi za upotrebu obaju

U nižim razredima se često pojavljuju neformalne mjerne jedinice, ali na žalost, u višim razredima mjerenje često ne započinje na taj način.

- Neformalne mjerne jedinice omogućuju učeniku da svoju pozornost maksimalno usmjerava na obilježje koje mjeri, a manje na samu mjernu jedinicu.
- Korištenje neformalnih mjernih jedinica može rezultirati izbjegavanjem sukoba oko mjernih jedinica: npr: kod mjerenja površine, je li bitno shvatiti kako i što znači izmjeriti površinu, ili je važno uvidjeti koliko izgleda kvadratni centimetar?
- Korištenje neformalnih mjernih jedinica u grupama učenika koje su ga prakticirale pokazalo je da učenici nakon njih lakše shvaćaju formalne mjerne jedinice.
- Znanje o formalnim mjernim jedinicama je ono do čega učenici svakako trebaju doći bilo da su započele svoje shvaćanje mjerenja pomoću neformalnih mjernih jedinica ili ne. Učenici moraju shvatiti mjerne jedinice, znati procjenjivati pomoću njih, ali isto tako i međusobno ih usporediti i preračunavati.
- Jednom kada je koncept mjerenja već jasan, razumijevanje formalnih mjernih jedinica je vrlo jednostavno.

Lakšem razumijevanju mjernih jedinica mogu pomoći brojne aktivnosti. Opišimo dvije.

Aktivnost 1.

Za lakše razumijevanje neke standardne mjerne jedinice, možemo učenicima dati jednu jedinicu kao uzorak i reći im da pomoću nje mjere. Na primjer, želimo li da nam učenici izmjere duljinu učionice u metrima, potrebno je dati im komad užeta ili ravnalo za ploču duljine jednog metra. Dobro je učenike potaknuti da i u svom svakodnevnom životu potraže stvari koje su otprilike dugačke 1 metar, jer se na taj način razvija njihova sposobnost procijene duljine.

Aktivnost 2.

Obrađujući mjerne jedinice vezane za različita obilježja, kod svakog obilježja možemo učenicima dati zadatak da se prisjete 5 stvari iz svoje okoline koje imaju 1 ili više jedinica te mjerne jedinice (primjerice, jedna ili više litara zapremine, jedan ili više kvadratnih metara površine, jedan ili više kilograma mase).

3.3 Savjeti za učenje procjene

1. Upoznati učenike sa raznim strategijama procjene mjerenja te im kasnije dopustiti da razviju strategiju koja njima osobno najviše odgovara. Primjerice, ako vršimo procjenu površine neke prostorije, možemo procijeniti najprije širinu pa dužinu i onda izračunati procijenjenu površinu, ali možemo i odmah gledati koliko bi otprilike kvadratnih metara u prostoriju stalo.
2. S vremena na vrijeme treba upitati učenike koje metode procijene koriste zato jer pomoću ideja snalažljivijih učenika možemo pojasniti procjenu učenicima koji se kod mjerenog obilježja nisu snašli.
3. Prihvatiti velike greške kod procijene. Neki će učenici znati obilježje procijeniti bolje, neki lošije. Kod procjene duljine i površine greške smiju biti unutar 10%, a kod volumena i mase do 30% u odnosu na ispravan rezultat.
4. Nekada je dobro učenicima ponuditi odgovore na procjenu među kojima je i točan odgovor. To je dobro zato jer će se učenici na taj način naučiti procjenjivati preciznije.
5. Dobro je raditi vježbe procjene na aktivnostima koje su tekuće a nisu vezane za mjerenje. Također, učenici po grupama mogu smišljati predmete čija obilježja mjere.

Na procjenu veličina nekih određenih obilježja gleda se s previše predrasuda. Primjerice, ako učeniku damo da procjeni veličinu nekog kuta koji nije ni pravi ni ispruženi, on će se buniti i misliti da je to preteško, ali ako shvati da sam zna koliki je kut od 90° , te da je kut od 45° samo upola manji, vrlo lako će moći izvršiti traženu procjenu. Zbog toga na procjenu ne treba gledati kao na nešto nerazumljivo.

3.4 Mjerne jedinice SI sustava

Prije ili kasnije tijekom obrazovnog ciklusa, učenici trebaju biti upoznati sa svim osnovnim veličinama i mjernim jedinicama SI sustava. Naziv Međunarodni sustav jedinica i kraticu SI (od francuskog naziva *Systeme International d'Unités*) odredila je 11. Opća konferencija za utege i mjere (CGPM) 1960. godine. Osnovne veličine (i pripadne mjerne jedinice) koje se upotrebljavaju u Međunarodnom sustavu jedinica jesu duljina (metar), masa (kilogram), vrijeme (sekunda), električna struja (amper), termodinamička temperatura (kelvin), količina tvari (mol) i svjetlosna jakost (kandela). Izvedene SI jedinice tvore se kao umnošci potencija osnovnih jedinica, naravno, u skladu s algebarskim odnosima kojima su definirane odgovarajuće izvedene veličine pomoću osnovnih veličina. Kada umnožak potencija ne uključuje

brojčani faktor različit od jedinice, izvedene se jedinice nazivaju suvislim izvedenim jedinicama. Unutar osnovnog obrazovanja u Republici Hrvatskoj učenici su u pravilu upoznati sa svim osnovnim veličinama i pripadnim mjernim jedinicama SI sustava.

4 Učenje formula

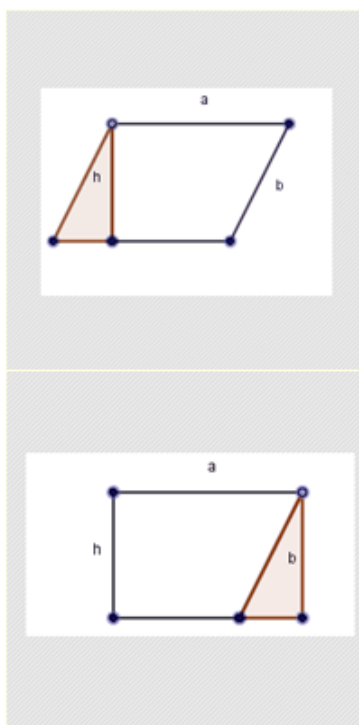
Unatoč kurikulumu koji u pojedinim razdobljima obrazovanja dozvoljava upotrebu podsjetnika za razne formule za vrijeme ispita, ne treba izvode i učenje izvođenja formula zaobići u širokome luku. Učenjem formula na pamet učenici neće znati zašto te formule izgledaju tako kako izgledaju te će ih u kratkom roku i zaboraviti. Kada učenici sami razviju neku formulu, to znači da oni dobro razumiju sadržaje mjerenja. Manje je vjerojatno da će učenici zamijeniti opseg i površinu ako sami znaju odrediti formulu za oboje. Učenici koji znaju odakle dolaze formule, neće matematiku smatrati misterioznom znanošću, a kada jednom formule zapamte i ponavljaju ih s razumijevanjem tokom izrade zadataka, za njih matematika doista ima smisla. Rezultati istraživanja [prema: 13, str. 399] koje je provela NAEP govore da je sasvim očigledno da djeca ne shvaćaju formule. Među učenicima četvrtog razreda samo njih 19% znalo je odrediti površinu prekrivača koji je bio 4 metra širok i 6 metara dugačak. Poražavajuća činjenica je i to da je taj zadatak uspješno riješilo manje od 60% učenika osmog razreda. Zajednička pogreška koja se događala objema skupinama učenika bila je ta što nisu znali razliku između opsega i površine. Zašto se to događa? Vrlo je vjerojatno da je uzrok tome pretjerano pretrpavanja učenika sa nevažnim formulama, samo da bi ih se što više obradilo te da bi oni više naučili. No, je li gradivo na taj način više naučeno? Sve činjenice govore upravo suprotno. Učenici bi lakše krenuli ka rješenju ovog banalnog problema da su svojevremeno izveli formulu za opseg i površinu pravokutnika.

4.1 Površina pravokutnika, paralelograma, trokuta i trapeza

Formula za površinu pravokutnika je jedna od prvih formula s kojom se susreću učenici i uglavnom je dana izrazom $P = a \cdot b$. Učenici ju pamte tako da izgovaraju da je *površina jednaka umnošku duljina stranica*. Kada gledamo dalje ostale formule za računanje površine nekih drugih likova, možda bi bilo bolje da smo djeci od početka govorili da je *površina jednaka umnošku baze i visine* lika jer se to više podudara s ostalim površinama za volumen. **Pravokutnik:** Prije početka obrade površine pravokutnika, važno je znati da učenici razumiju koncept površine. Istraživanja govore da je učenicima ključan prijelaz sa prekrivanjem kvadratićima na konkretnu formulu za računanje površine. Važno je na neki način učenicima pomoći da uvide kako im je za izračunavanje površine potrebno množenje. Učenicima treba pokazivati retke i stupce sa kružićima ili kvadratićima te ih navesti da izbroje samo koliko redaka, odnosno stupaca imaju te da na taj način izračunaju koliko je kružića ili kvadratića. Ako učenici pri tome shvate da će morati pomnožiti broj redaka i broj stupaca za konačan rezultat, tada će laše razumjeti i formulu za računanje površine kada im se prikaže i objasni. Učenicima koji svaćaju to s recima i stupcima možemo dati zadatak, izazvati ih da samo pomoću ravnala odrede površinu pravokutnika. Treba ih navoditi da izmjere jednu stranu pravokutnika i učine nešto s tim brojem kojega su dobili. Ukoliko učenici dobro svladaju

površinu pravokutnika i formulu za njezin izračun, u budućnosti će puno lakše savladati površinu nekih drugih geometrijskih likova.

Paralelogram: Ako učenici dobro shvaćaju površinu pravokutnika, izračun površine paralelograma neće im biti pretežak. Umjesto formule dobro je provesti aktivnost s premještanjem dijela paralelograma kao na slici.

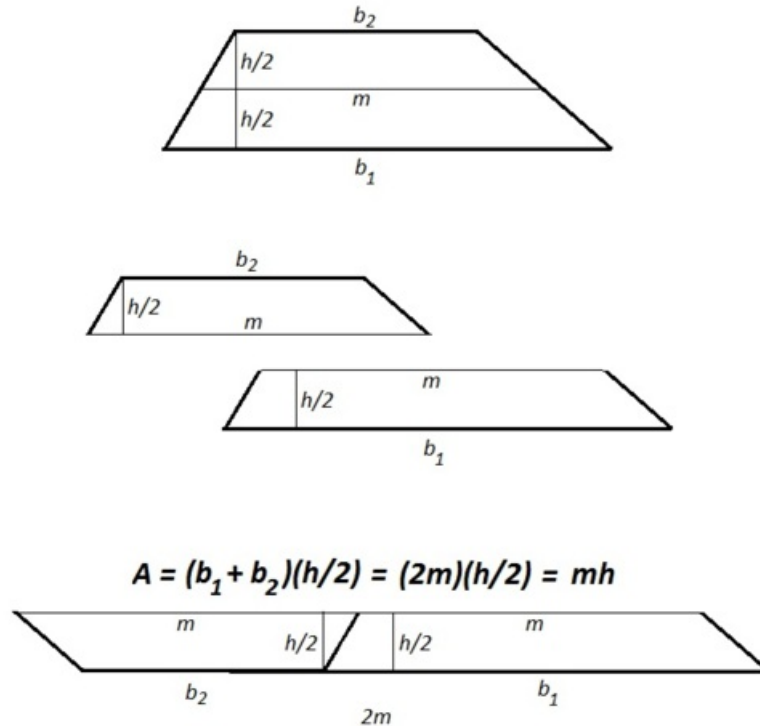


Slika 4.6: Pomoć pri računanju površine paralelograma

U ovom slučaju, površinu ćemo odrediti množeći bazu paralelograma s visinom. Taj koncept računanja će se kasnije koristiti u brojnim formulama za računanje površine.

Trokut: Površina trokuta povezana je s površinom paralelograma. Ako imamo trokut, jednostavno ga dopunimo do paralelograma. Učenicima je takav postupak dosta blizak i vrlo brzo shvaćaju da će tražena površina trokuta biti dvostruko manja od površine paralelograma.

Trapez: Površina trapeza će se računati kombinirajući znanje o površini pravokutnika, trokuta i paralelograma. Možemo na razne načine doći do te površine, a ovdje je objašnjen jedan način. Umjesto jednoga trapeza čiju površinu trebamo odrediti uzet ćemo dva i okrenuti ih suprotno da u paru jedan do drugoga daju paralelogram. Poznavajući površinu paralelograma, neće nam biti teško doći do formule za računanje površine trapeza.



Slika 4.7: Kako odrediti površinu trapeza

4.2 Neke od osnovnih formula za računanje površine, oplošja i volumena

Općenito kada se radi o geometrijskim likovima za koje znamo formule, mala slova s početka abecede označavaju stranice (a, b, c, \dots), visine su označene sa slovom v (v_a, v_b, v_c, \dots). U formuli za računanje površine romba slovima e i f označene su duljine dijagonala. Kada se s učenicima obrađuje površina kruga potrebno je posebno objasniti na koji način se određuje broj π . Broj π definira se kao omjer opsega i promjera kružnice ($\pi = \frac{O}{2r}$). Naziva se još i

POVRŠINA TROKUTA	$P = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$ $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, s-poluopseg
POVRŠINA PRAVOKUTNIKA	$P = ab$
POVRŠINA KVADRATA	$P = a^2$
POVRŠINA TRAPEZA	$P = \frac{a+c}{2}v$
POVRŠINA PARALELOGRAMA	$P = av_a = bv_b$
POVRŠINA ROMBA	$P = av = \frac{ef}{2}$
POVRŠINA KRUGA	$P = r^2\pi$

Tablica 4.2: Formule za računanje površine geometrijskih likova

OZNAKE:	B -površina baze, P -površina pobočja, v -duljina visine, s -duljina izvodnice, r -duljina polumjera
PRIZMA	<i>Oplošje:</i> $O = 2B + P$, <i>Volumen:</i> $V = Bv$
PIRAMIDA	<i>Oplošje:</i> $O = B + P$, <i>Volumen:</i> $V = \frac{Bv}{3}$
KRNJA PIRAMIDA	<i>Oplošje:</i> $O = B_1 + B_2 + P$, <i>Volumen:</i> $V = \frac{v}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$
VALJAK	<i>Oplošje:</i> $O = 2r\pi(r + v)$, <i>Volumen:</i> $V = r^2\pi v$
STOŽAC	<i>Oplošje:</i> $O = r\pi(r + s)$, <i>Volumen:</i> $V = \frac{1}{3}r^2\pi v$
KRNJI STOŽAC	<i>Oplošje:</i> $O = r_1^2\pi + (r_1 + r_2)\pi s + r_2^2\pi$, <i>Volumen:</i> $V = \frac{v\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
KUGLA (SFERA)	<i>Oplošje:</i> $O = 4r^2\pi$, <i>Volumen:</i> $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

Tablica 4.3: Formule za računanje oplošja i volumena geometrijskih tijela

Ludolfov broj ili Arhimedova konstanta. U osnovnoj školi se taj broj zaokružuje na dvije decimale i iznosi 3.14.

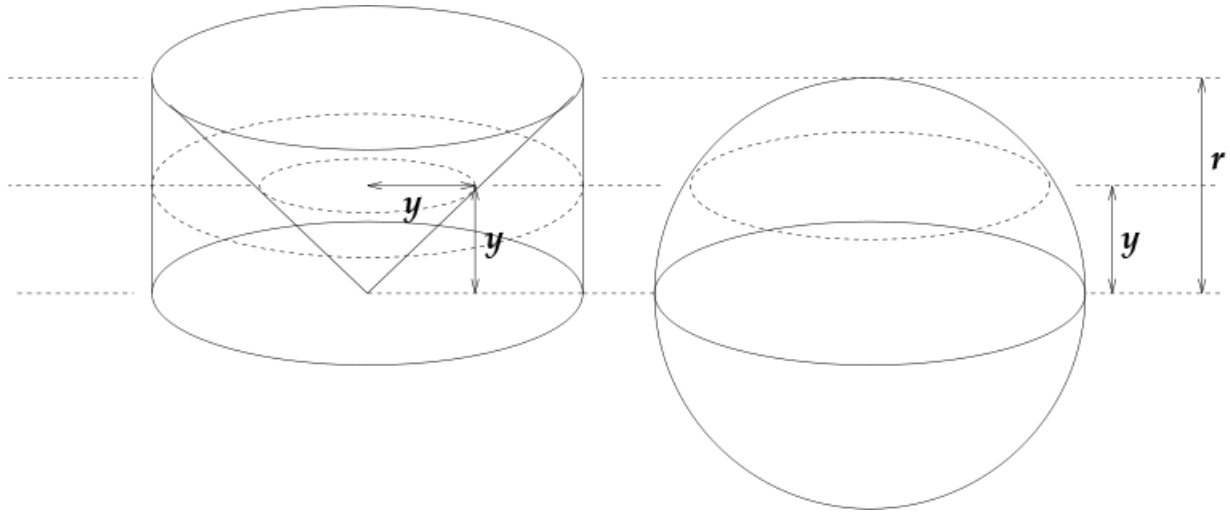
Oplošje geometrijskog tijela je ukupna površina svih ploha tijela. Oplošje poliedra je zbroj površina svih njegovih strana. Nešto složeniji je izračun oplošja kugle. Volumen geometrijskog tijela je mjera prostora kojeg tijelo zauzima. Kod određivanja formula za volumen, opet ćemo koristiti izraz *baza puta visina* koja će učenicima do tada već biti poznata. Formule za oplošje lako će se izvoditi ako znamo odrediti površinu svake stranice geometrijskog tijela. Neke od formula za izračunavanje oplošja volumena poznatih tijela dane su u tablici 5.3.

U formulama za računanje oplošja i volumena krnje piramide i krnjeg stošca oznake B_1 i B_2 , odnosno r_1 i r_2 odnose se na površine veće i manje baze, odnosno duljine većeg i manjeg polumjera baze.

4.3 Cavalijerijev princip za određivanje volumena nepravilnih tijela

Cavalijerijev princip omogućuje računanje površina i volumena mnogih tijela za koja bi inače trebali posezati za dosta kompliciranim metodama integralnog računa. Uglavnom se ne obrađuje kao redovni dio gradiva unutar osnovne ili srednje škole, ali je prilično zanimljiv kao dodatni sadržaj. Cavalijerijev princip nam kaže da ako se dva tijela mogu postaviti tako

da njihovi presjeci s ravninama paralelnima jednoj zadanoj ravnini imaju jednake površine, onda ta dva tijela imaju jednake obujme.



Slika 4.8: Cavalijerijev princip

Pomoću Cavalijerijevog principa može se na jednostavan način odrediti volumen sfere. Ako netko razumije da je površina stošca jednaka trećini umnoška baze i visine, vrlo lako može doći do formule ($V = \frac{3}{4}r^3\pi$) za obujam sfere. Kroz povijest su se mnogi matematičari zanimali ovom tematikom, tek je Buenaventura Cavalieri (17. st.) u potpunosti točno definirao ovakav način računanja volumena, pa je i nazvan po njemu.

5 Razvoj razumijevanja u matematici

Zajednička želja svih predavača matematike u konačnici je da učenici na kraju obrazovnog procesa matematiku razumiju, ali bez obzira na sav trud koji određeni predavač ulaže u svoju nastavu, on ne može razumjeti umjesto učenika. Teorija konstruktivizma u nastavi nalaze da učenik mora biti aktivni sudionik u razvoju vlastitog razumijevanja, dakle, po ovoj teoriji u prvome planu je samodjelatnost učenika (najprije kognitivna). Često smo tijekom odrastanja i obrazovanja bili svjedoci slučaja u kojima roditelji postavljaju djeci pretjerane zahtjeve i dogodi se upravo suprotno, pa djeca steknu odbojnost prema tome što roditelj želi. Nastavu matematike ne smijemo predstavljati kao nešto pregrubo i teško, jer djeca prema matematici već imaju određene predrasude. Upravo zbog toga, nastavnik kao središnji transporter znanja u obrazovnom procesu treba utjecati na učenika tako da se i učenik želi, može i zna potruditi oko vlastitog razumijevanja. Matematičke ideje ne mogu se samo umetnuti u pasivnog promatrača nastave. One se postepeno razvijaju od lakših ka težim. U učionicama se učenici trebaju pohvaliti i ohrabriti za stvaranje novih ideja.

5.1 Utjecaj učionice na učenje i razumijevanje

Dobar predavač treba prepoznati atmosferu u učionici i znati prilagoditi svoje predavanje određenoj situaciji. Predavač koji želi kod učenik postići određeni efekt, treba ohrabrivati ideje, prihvaćati manje dobre ideje da bi u konačnici dobio od učenika ono najbolje što oni mogu dati. To ne znači da se učenike treba pustiti da rade nered u razredu i čekaju da im iznenada nekakva matematička ideja padne na um, ali u velikoj mjeri znači da učenicima treba dati određenu slobodu u razmišljanju i zaključivanju. Isto tako, dobro je za učenike da u razvoju određene ideje surađuju s onima koji rade na toj istoj ideji. Oluja misli i spoznaje koja se može postići u kvalitetnoj raspravi između učenika ne može se zamijeniti niti jednim dobrim udžbenikom. Zbog toga učenike treba poticati na međusobnu suradnju. Bogata interakcija u razredu značajno podiže šanse da će se razviti neka zanimljiva matematička ideja.

5.2 Razvoj razumijevanja mjerenja

Kako je već rečeno na samome početku, mjerenje je matematički koncept sadržan u svim obrazovnim ciklusima. Iz tog razloga, kada govorimo o razumijevanju, trebamo određenu pozornost usmjeriti i na razumijevanje mjerenja. Kada se malo dijete u svojoj petoj, šestoj ili sedmoj godini prvi put susreće s brojem, taj broj je njemu apstraktan. Isto tako, kada učenik počinje zbrajati lakše će mu biti zbrojiti dva broja ako umjesto njih zamisli bombone ili novac. Mjerenje je koncept koji sam po sebi nije jasan ako ga se pravilno ne uvede. Razvoj razumijevanja mjerenja može se postići samo ako se pri učenju mjerenja koriste primjeri iz svakodnevnog života koje učenici shvaćaju i mogu vidjeti svakodnevno. Učeniku ne znači

ništa ako mu se kaže da je težina sila kojom tijelo pritišće podlogu, ali ako mu se ta ista težina opiše pomoću njemu jednostavnog primjera, on će to shvatiti. *Slika 6.9* prikazuje ručno izrađen sat. Učenje mjerenja vremena znatno je olakšano ako djeca samostalno izrade sat i takva jednostavna naprava ima znatan doprinos u razumijevanju mjerenja vremena. Ključno je shvaćanje u dijelu života kada se osoba obrazuje jer je tada fizički i mentalno najsposobnija i to znanje koje se tada stječe je znanje koje traje čitav život. Kroz razna obilježja koja se mjere i čije je mjerenje opisano u ovom radu, opisani su primjeri i metode kojima se mjerenje čini lakše razumljivim. Međutim, tijekom nastave u kojoj se koriste



Slika 5.9: Ručno izrađen sat

materijali, predavač treba biti oprezan da ne radi pogreške. Čest je slučaj da nastavnik pri obavljanju nekog zadatka kaže učenicima da rade isto što radi i on (primjerice, ako žele izmjeriti svoju visinu) i onda im redom pokazuje korake u mjerenju. U takvim prilikama učenici će slijepo pratiti pokrete nastavnika i raditi isto što i on, ali kada ih se zatraži da postupak ponove, oni to neće biti u stanju jer se ne sjećaju što trebaju učiniti. Kod takvog učenja i podučavanja nije potaknuto učenikovo mišljenje niti razumijevanje.

6 Zaključak

Unutar osnovnog i srednjeg obrazovanja matematika ima veliki značaj. Sama po sebi zahtjeva koncentraciju i razumijevanje. Kao jedan od koncepata u nastavi matematike, mjerenje je prisutno i u osnovnoj i u srednjoj školi. Značaj nastavnika u podučavanju mjerenja je velik. Nastava mjerenja mora biti zanimljiva i bogata primjerima, jer u protivnom neće biti dobro shvaćena. Gradivo vezano uz mjerenje omogućuje uključivanje povijesnih činjenica u nastavu, pa se koristeći materijale koji su dostupni na webu sve što se obrađuje može zorno prikazati.

Kroz različita obilježja koja učenici uče mjeriti, provlači se stalna potreba za aktivnošću učenika te suradnjom nastavnika i učenika, učenika međusobno. Za nastavni proces je od velike važnosti razvijati razumijevanje te potaknuti učenike da rade na sebi i svome razumijevanju.

Uvođenjem formula za računanje površine, volumena i drugih obilježja objekta ne prestaje razvoj razumijevanja mjerenja nego se samo nadograđuje. Učenje mjerenja ne prestaje završetkom obrazovanja nego se nastavlja tokom čitavog života, pa je upravo zato ključno da se to učenje započne i ostvari na ispravan način.

Literatura

- [1] Casey, N.B., Nuttall, R. and Pezaris, E. (2001). Spatial-mechanical reasoning skills versus mathematics self-confidence as mediators of gender differences on mathematics subtests using cross-national gender-based items. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 28–57.
- [2] Coad, L. (2006). Paper folding in the middle school classroom and beyond. *The Australian Mathematics Teacher*, 62(1), 6–13.
- [3] Dreyfus, T., Hershkowitz, R. and Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. *Cognitive Science Quarterly*, 1, 307–68.
- [4] Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (ed.). *Mathematics teaching: The state of the art*, 249-53, New York: Falmer.
- [5] Hancock, C., Kaput, J. and Goldsmith, L. (1992). Authentic inquiry into data: Critical barriers to classroom implementation. *Educational Psychologist*, 27(3), 337–64.
- [6] Hayes, D., Lingard, B. and Mills, M. (2000). Productive pedagogies. *Education Links*, 60, 10–13.
- [7] Henningsen, M. and Stein, M.K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroombased factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 524–49.
- [8] Pearn, C. and Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. In I. Putt, R. Faragher and M. McLean (eds). *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*, pp. 430–7.
- [9] Peressini, D. (1997). Parental involvement in the reform of mathematics education. *Mathematics Teacher*, 90(6), 421–7.
- [10] Quinlan, C. (2004). Sparking interest in trigonometry. *The Australian Mathematics Teacher*, 60(3), 17-20.
- [11] Raymond, A. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematical beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education* 28, 550-76.
- [12] Ryan, M. (1992). What is a mathematician?, *The Australian Mathematics Teacher*, 48(4), 36-37.

- [13] Van de Walle, *Elementary and Middle School Mathematics, Sixth edition*, Pearson, Boston, 2007.
- [14] Woodbury, S. (1998). Rhetoric, reality, and possibilities: Interdisciplinary teaching and secondary mathematics. *School Science and Mathematics*, 98(6), 303–7
- [15] Zbiek, R. and Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understanding of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 89–112.
- [16] Zbiek, R. and Heid, M.K. (2001). Dynamic aspects of function representation. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent, *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Vol. 2, pp. 682–89.
- [17] *Međunarodne jedinice SI sustava*, www.wikipedia.org (pristupljeno 1.12.2013.)
- [18] *Metar*, |www.en.wikipedia.org/wiki/Metre | (pristupljeno 26.12.2013.)
- [19] *Nacionalni okvirni kurikulum (NOK)*, www.mzos.hr (pristupljeno 28.10.2013.)

Sažetak

Sažetak. *Mjerenje je matematički sadržaj ili koncept koji je sastavni dio svih obrazovnih ciklusa. Kako bi učenici lakše shvatili mjerenje, uloga nastavnika je primjerima olakšati učenje i učenike naučiti vještinama mjerenja. Kao i ostali matematički koncepti i mjerenje je u nastavi apstraktno, ali kako se u gradivu kojeg mjerenje obuhvaća mogu pronaći brojni primjeri iz svakodnevnog života, ne postoji razlog zbog kojega svi učenici ne bi ovladali upravo tom vještinom.*

Ključne riječi: *mjerenje, obilježja koja se mjere, mjerni instrumenti, formalne i neformalne mjerne jedinice, razumijevanje*

Summary. *Measurement is a mathematical branch or concept which is an integral part of all educational cycles. To ensure easier understanding, it is the duty of the teacher to use examples in order to make learning easier and to bestow upon the student the skills of measuring. As with other mathematical concepts, measurement in lecture is abstract. However, considering the curriculum which envelops measurement also contains numerous examples from everyday life, there is no reason all students should not master precisely this skill.*

Key words: *measuring, measurement concepts, measuring instruments, formal and informal units, understanding*

Životopis

Rođena sam 2. srpnja 1989. godine u Brčkom. Sa svojom obitelji živim u Drenovcima, gdje sam u razdoblju od 1996. do 2004. pohađala osnovnu školu Ivana Meštrovića. Opću gimnaziju završila sam u Županji 2008. godine i nakon toga upisala Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Želja mi je po završetku studija podučavati matematiku jer smatram da svi koji žele, matematiku mogu voljeti i znati, samo ako se dovoljno potrude i ako imaju nastavnika koji voli svoj posao.

Uz zahvale mojim roditeljima i mentorici, ovaj diplomski rad posvećujem baki Veri.