Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni studij financijske matematike i statistike

Aleksandra Bijelić

Hipergeometrijske funkcije

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni studij financijske matematike i statistike

Aleksandra Bijelić

Hipergeometrijske funkcije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu upoznat ćemo se s hipergeometrijskim funkcijama, odnosno funkcijama pomoću kojih možemo prikazati određene beskonačne, konvergentne redove te koje spadaju u grupu specijalnih funkcija. Pojam hipergeometrijskog reda prvi put koristi J. Wallis 1655. godine kao generalizaciju geometrijskog reda. Mnogi matematičari 18. i 19. stoljeća kao što su Euler, Gauss, Jacobi, Kummer, Fuchs, Riemann, Schwarz i Klein svojevremeno su dali doprinos razvoju ovoga reda. Schwarz je 1873. odredio vrijednosti parametara a, b, c takozvane Gaussove hipergeometrijske funkcije $F(a, b; c; x)$ i tako izveo njenu restrikciju na algebarsku funkciju. To je rezultiralo rješavanju hipergeometrijskih diferencijalnih jednadžbi i njenih primjena. U drugom poglavlju bavit ćemo se određenim tipovima hipergeometrijskih funkcija. Najpoznatija i najčešće korištena hipergeometrijska funkcija jeste Gaussova hipergeometrijska funkcija i njen generalizirani oblik. Gaussova hipergeometrijska funkcija igra značajnu ulogu u matematičkoj analizi i njenoj primjeni te u rješavanju mnogih problema drugih srodnih znanosti. Većina funkcija koje se javljaju u analizi posebni su slučajevi hipergeometrijskih funkcija, a neke od primjera vidjet ćemo u poglavlju 3.4. Gauss je među prvima proučavao hipergeometrijsku funkciju dajući posebnu pažnju slučajevima u kojima se hipergeometrijske funkcije mogu sažeti u elementarne funkcije poput trigonometrijskih, eksponencijalne, logaritamske ili binomne. Predstavljajući svaku od ovih funkcija kao hipergeometrijsku funkciju, možemo prepoznati svojstva koja se primjenjuju na sve funkcije ove vrste. Jedan od značajnih prikaza Gaussove hipergeometrijske funkcije jeste Eulerova integralna reprezentacija, odnosno integralni zapis Gaussove funkcije. Takav zapis će nam omogućiti lakši razvoj hipergeometrijskih identiteta te dovesti do Gaussove sumacijske formule. Pomoću Gaussove sumacijske formule hipergeometrijsku funkciju možemo zapisati uz pomoć gama funkcija. Hipergeometrijska funkcija može biti prikazana i kao rješenje diferencijalne jednadžbe, što ćemo vidjeti na primjeru kako Gaussove funkcije tako i još jednog u praksi bitnog specijalnog slučaja hipergeometrijskih funkcija što je takozvana Kummerova funkcija ili konfluentna hipergeometrijska funkcija. U četvrtom poglavlju proučit ćemo neke hipergeometrijske funkcije s dvije varijable kao što su Appelove funkcije, Hornovi redovi, konfluentna funkcija s dvije varijable i Kampé de Fériet funkcija. Pokazat ćemo veze između Appelovih funkcija, kao i veze između drugih bitnih, specijalnih funkcija s dvije varijable. Izrazit ćemo Kampé de Fériet funkciju uz pomoć generaliziranih hipergeometrijskih funkcija i vidjeti uz koje uvjete funkcija konvergira.

2 Osnovno o specijalnim funkcijama

Svijet oko nas se svakim danom sve više razvija i napreduje, a usporedno s njim razvijaju se i prirodne i društvene znanosti pa tako i matematika sa svojim mnogobrojnim primjenama. Osvrnemo li se na primjenu matematike u problemima fizike kao što je na primjer protok elektromagnetske, akustične ili toplinske energije, možemo primijetiti da rješenje fizikalnog problema s matematičkog gledišta, ovisi o konfiguraciji fizičkog sustava. Tako, na primjer, kod širenje topline u metalnoj šipci razlikujemo šipke pravokutnog, okruglog, eliptičnog ili čak složenijeg presjeka, ravne ili zakrivljene što ukazuje da isti fizikalni problem matematički opisujemo različitim diferencijalnim jednadžbama. Kako nam osnovne elementarne funkcije nisu dovoljne za rješavanje problema, javlja se potreba za posebnim oblikom funkcija koje jednim imenom zovemo specijalne funkcije.
Dakle, specijalne funkcije su rješenja mnogih diferencijalnih jednadžbi kojima interpretiramo promjene u fizikalnim i drugim sustavima. Osim rješenja diferencijalnih jednadžbi, neke od specijalnih funkcija predstavljaju određene često korištene integrale poput beta i gama funkcije te funkcija koje računaju beskonačne konvergentne redove kao što su Riemannova zeta funkcija, hipergeometrijske funkcije, Besselove funkcije. Većina specijalnih funkcija može se zapisati u oba oblika, odnosno u obliku konvergentog reda te određenog integrala te se najčešće nazivaju po matematičarima koji su ih proučavali i prvi put definirali.
Definirajmo neke od specijalnih funkcija koje ćemo koristiti u ovom radu.

2.1 Gama funkcija

Gama funkciju, u oznaci Γ, otkrio je Euler prilikom proširenja domene faktorijela na realne brojeve. Euler nam također daje dvije glavne definicije gama funkcije.

Definicija 2.1.1. *Gama funkcija je funkcija $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadana formulom*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{1}$$

Definicija 2.1.2. *Za sve kompleksne brojeve $x \neq 0, -1, -2, \dots$ vrijedi:*

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k! k^{x-1}}{(x)_k},$$

gdje je $(x)_k$ Pochhammerov simbol, o kojem ćemo više reći u poglavlju 2.3.

Integriranjem gama funkcije (1) dobivamo:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \tag{2}$$

odnosno

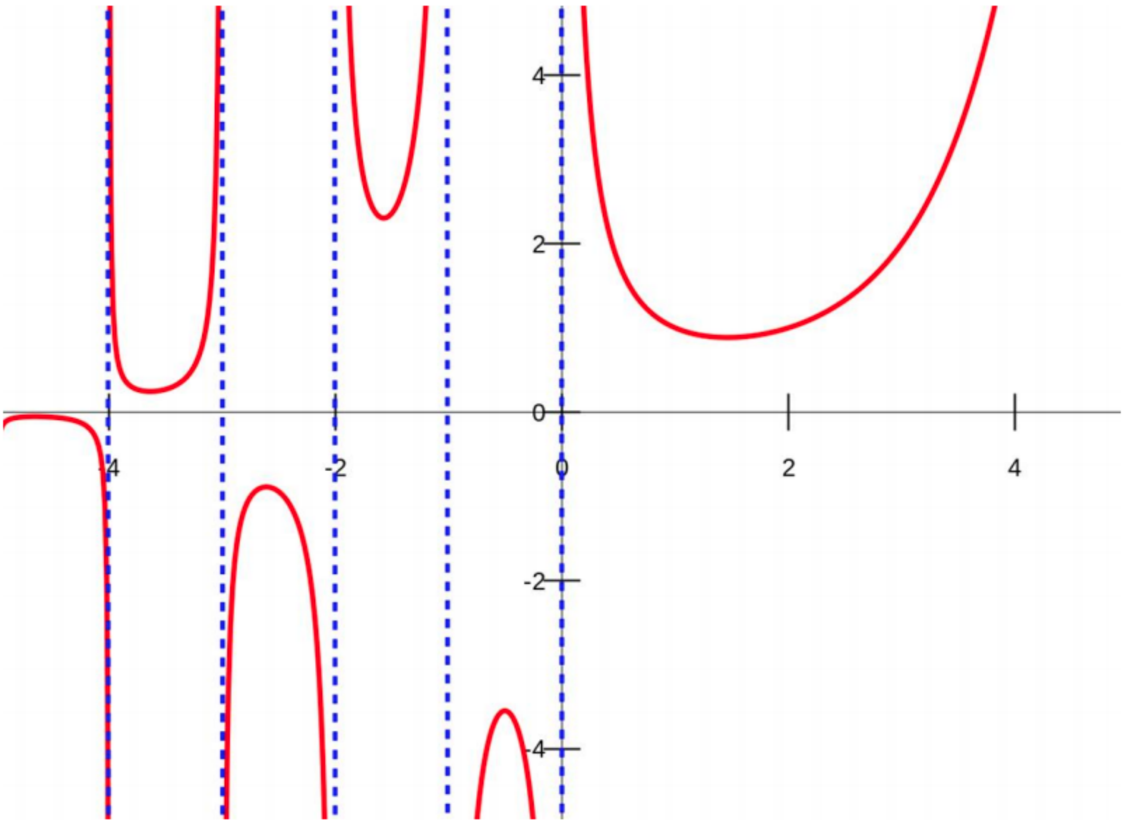
$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

Iterativnim postupkom također slijedi da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Lema 2.1.1. *Za prirodan broj n i nenegativni realni broj a vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^a}{\Gamma(a+n)} = 1.$$



Slika 1: Graf gama funkcije

2.2 Beta funkcija

Beta funkciju zovemo još i Eulerov integral prve vrste.

Definicija 2.2.1. *Beta funkcija je specijalna funkcija* $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *zadana formulom:*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, Re(x), Re(y) > 0. \tag{3}$$

Beta funkcija je usko vezana uz gama funkciju, što je pokazao Euler 1730. godine. Naime, vrijedi

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x,y)}. \tag{4}$$

2.3 Pochhammerov simbol

Pochhammerov simbol $(a)_n$ poznat je i kao rastući ili uzlazni faktorijel i definirao ga je Leo August Pochhammer na sljedeći način:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1 & , \text{ za } \quad n=0, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & , \text{ za } \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{5}$$

pri čemu se podrazumjeva da je $(0)_0 = 1$.
Iz prethodne formule vidimo da je

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1 \\ (a)_1 &= a \\ (a)_2 &= a(a+1) \\ (a)_n &= a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1). \end{aligned}$$

Pochhammerov simbol također zadovoljava

$$(-a)_n = (-1)^n(a-n+1)_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

3 Hipergeometrijske funkcije

Skoro sve elementarne funkcije u matematici su ili hipergeometrijske ili se mogu zapisati kao omjer hipergeometrijskih funkcija. Kažemo da je red $\sum c_n$ *hipergeometrijski red* ako je $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ racionalna funkcija u varijabli n, tj. $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{P(n)}{Q(n)}$, pri čemu su $P(n)$ i $Q(n)$ polinomi u varijabli n. Faktorizacijom polinoma u varijabli n dobivamo

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)x}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)}. \tag{6}$$

Postoji mogućnost da polinom nije normiran te se stoga može pojaviti x u brojniku. Faktor $(n+1)$ može se pojaviti u nazivniku prilikom faktorizacije, ali i ne mora. Za proizvoljni indeks $i \in \mathbb{N}$, $a_i = 1$ osigurava pojavljivanje faktora $(n+1)$ u brojniku. Uz pomoć faktora $(n+1)$ u nazivniku možemo uvesti $n!$ u hipergeometrijski red. Rekurzivno iz (6) vrijedi

$$c_n = c_0 \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n x^n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n n!}, \tag{7}$$

pri čemu su $(a_i)_n$ i $(b_j)_n$, $i = 1,2,\ldots,p$, $j = 1,2,\ldots,q$ Pochhammerovi simboli. Pomoću dobivene rekurzije (7) dolazimo do konačnog oblika hipergeometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n x^n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n n!},$$

pomoću kojega definiramo hipergeometrijske funkcije.

3.1 Generalizirane hipergeometrijske funkcije

Definicija 3.1.1. *Neka su $(a_i)_n$ i $(b_j)_n$, $i = 1,2,\ldots,p$, $j = 1,2,\ldots,q$ Pochhammerovi simboli, $p,q \in \mathbb{N}$ broj parametara te $a_i, b_j, x \in \mathbb{C}$ takvi da $b_j \neq 0,-1,-2,\ldots$ za $j = 1,\ldots,q$. Tada je generalizirana hipergeometrijska funkcija definirana izrazom*

$${}_pF_q(a_1,a_2,\ldots,a_p;b_1,b_2,\ldots,b_q;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n x^n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n n!}.$$

Ispitajmo konvergenciju generalizirane hipergeometrijske funkcije D'Alembertovim kriterijem, tj. zanima nas limes

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|,$$

koji možemo pojednostaviti na sljedeći način:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|(a_1+n)(a_2+n)\cdots(a_p+n)x|}{|(b_1+n)(b_2+n)\cdots(b_q+n)(n+1)|}$$
$$= \frac{|x|n^p(1+|a_1|/n)\cdots(1+|a_p|/n)}{n^{q+1}|(1+1/n)(1+b_1/n)\cdots(1+b_q/n)|}.$$

Iz prethodnog dobivamo nejednakost

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leqq \frac{|x|n^{p-q-1}(1+|a_1|/n)\cdots(1+|a_p|/n)}{|(1+1/n)(1+b_1/n)\cdots(1+b_q/n)|}. \tag{8}$$

Pretpostavimo da je $a_i \neq 0, -1, -2\ldots$ za $i = 1, \ldots, p$ (u suprotnom ne bi mogli ispitati konvergenciju) te koristeći D'Alembertov kriterij za konvergenciju reda iz (8) slijedi:

Teorem 3.1.1. *Generalizirana hipergeometrijska funkcija:*

i) konvergira za svaki $|x| < \infty$, ako je $p \leqq q$,

ii) konvergira za svaki $|x| < 1$, ako je $p = q+1$,

iii) divergira za svaki $x \neq 0$, ako je $p > q+1$.

Dokaz:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, ako je $p \leqq q$,

ii) ako je $p = q+1$, tada $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x|$,

iii) ako je $p > q+1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty$.

□

Teorem 3.1.2. *Neka je $|x| = 1$ i $p = q+1$. Tada red*

$${}_{q+1}F_q(a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}; b_1, b_2, \ldots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_{q+1})_n x^n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n n!}$$

- *apsolutno konvergira ako je $Re\left(\sum b_i - \sum a_i\right) > 0$,*

- *divergira ako je $Re\left(\sum b_i - \sum a_i\right) \leqq -1$.*

Dokaz: Neka je

$$\delta = \frac{1}{2} Re \left(\sum b_i - \sum a_i \right) > 0.$$

Usporedimo naš red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(a_1)_n \cdots (a_{q+1})n x^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} \right|$$

s konvergentnim redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Kako je $|x| = 1$, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_1)_n \cdots (a_{q+1})_n \cdot n^{1+\delta}}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n \cdot n!} \right| \\
=& \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_1)_n}{(n-1)! n^{a}} \cdots \frac{(a_{q+1})_n}{(n-1)! n^{a_{q+1}}} \cdot \frac{(n-1)! n^{b_1}}{(b_1)_n} \cdots \frac{(n-1)! n^{b_q}}{(b_q)_n} \cdot \frac{(n-1)! n^{1+\delta}}{n! n^{\sum b_i - \sum a_i}} \right| \\
=& \left| \frac{\prod \Gamma(b_i)}{\prod \Gamma(a_i)} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n^{\sum b_i - \sum a_i - \delta}} \right| = 0,
\end{aligned}$$

jer je $Re\left(\sum b_i - \sum a_i - \delta\right) = 2\delta - \delta > 0$. Ovime smo dokazali da naš red apsolutno konvergira za $|x| = 1$ ako je $Re\left(\sum b_i - \sum a_i\right) > 0$. U zadnjoj jednakosti koristili smo jednakost (5) te Lemu 2.1.1.

Kako bi dokazali divergenciju neka je

$$\delta = \frac{1}{2} Re \left(\sum b_i - \sum a_i \right) \leqq -1.$$

Slijedeći iste korake kao za dokaz konvergencije, dobivamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_1)_n \cdots (a_{q+1})_n \cdot n^{1+\delta}}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n \cdot n!} \right| = \left| \frac{\prod \Gamma(b_i)}{\prod \Gamma(a_i)} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n^{\sum b_i - \sum a_i - \delta}} \right| = \infty,$$

jer je $Re(\sum b_i - \sum a_i - \delta) = 2\delta - \delta \leqq -1$, čime smo dokazali da naš red divergira za $|x| = 1$ ako je $Re(\sum b_i - \sum a_i) \leqq -1$. $\square$

3.2 Gaussova hipergeometrijska funcija

Razmotrimo sljedeći fizikalni problem. Postoji plin čije se čestice nasumično kreću unutar dvodimenzionalne rešetke koja u sebi sadrži određeni broj čvorova s nasumičnim brojem zamki. Unutar zida rešetke određeni broj čestica se međusobno veže dok se neke odbijaju. Na koji je način najbolje izračunati kako će se čestice ponašati unutar rešetke, tj. koliko njih će se međusobno povezati? Ovo je samo jedan od mnogih slučajeva u fizici i matematici koji za svoje rješenje koristi *Gaussovu hipergeometrijsku funkciju.*
Uzimajući specijalne vrijednosti parametara p, q dolazimo do modificiranih oblika hipergeometrijskih funkcija. Za fiksne parametre $p = 2$ i $q = 1$ dobivamo Gaussovu hipergeometrijsku funkciju nazvanu po slavnom njemačkom matematičaru Carlu Friedrich Gaussu koji je uveo oznaku F za ove specijalne funkcije te nam ostavio brojne zanimljive teoreme i dokaze vezane uz njih. S nekima od njih ćemo se upoznati u ovom poglavlju.

Definicija 3.2.1. *Neka su $(a)_n$, $(b)_n$, $(c)_n$ Pochhammerovi simboli, $x \in \mathbb{C}$ te a, b, c realni ili kompleksni brojevi. Tada je Gaussova hipergeometrijska funkcija definirana izrazom*

$$_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, c \neq 0, -1, -2, \ldots.$$

Prema Teoremu 3.1.1. Gaussova hipergeometrijska funkcija definirana je za svaki $|x| < 1$.
Neki specijalni oblici i svojstva Gaussove hipergeometrijske funkcije:

- Gaussova hipergeometrijska funkcija je simetrična s obzirom na parametre u brojniku, tj.

$$_2F_1(a, b; c; x) = {}_2F_1(b, a; c; x). \tag{9}$$

- Za $a = c$ iz Definicije 3.2.1 dobivamo

$$\begin{aligned} _2F_1(c, b; c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n x^n}{n!} \\ &= {}_1F_0(b; -; x). \end{aligned}$$

S obzirom na simetričnost Gaussove funkcije (9) uz pretpostavku da je $b = c$, analogno dobivamo ${}_2F_1(a, c; c; x) = {}_1F_0(a; -; x)$.

- Kada je $a = c$ i $b = 1$ ili $a = 1$ i $b = c$ dobivamo

$$\begin{aligned} {}_2F_1(c, 1; c; x) = {}_2F_1(1, c; c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (c)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}, \end{aligned}$$

uz prethodnu pretpostavku da je $|x| < 1$.
Ukoliko se sjetimo binomnog teorema koji daje razvoj ν-te potencije izraza $(a+b)^\nu$, gdje je $\nu \in \mathbb{N}$, možemo uočiti da je desna strana prethodne jednakosti zapravo specijalni slučaj generaliziranog binomnog teorema gdje su potencije općenito kompleksni brojevi, $\nu \in \mathbb{C}$, no u prethodnom izrazu je očito $\nu = -1$.
Ukoliko u Gaussovu funkciju umjesto parametra 1 stavimo proizvoljni cijeli broj $-n$, $n \in \mathbb{N}$ dobit ćemo specijalni oblik binomnog teorema. Preciznije, tada vrijedi

$$ {}_2F_1(-n, c; c; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r (c)_r}{(c)_r r!} x^r, $$

gdje je

$$\begin{aligned} (-n)_r &= (-n)(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+r-1) \\ &= (-1)^r n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$ {}_2F_1(-n, c; c; x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!}{r!(n-r)!} x^r = (1-x)^n. $$

Nadalje, može se pokazati da za proizvoljan $a \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$ {}_1F_0(a; -; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{n!} = (1-x)^{-a}. \tag{10} $$

- U slučaju da je jedan od parametara u brojniku negativan cijeli broj $-n$, za $n \in \mathbb{N}$ dobivamo konačni hipergeometrijski polinom sa $(n+1)$ parametrom u varijabli x, pa nemamo problema sa konvergencijom. Dakle:

$$ {}_2F_1(-n,b;c;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \frac{(b)_k}{k!(c)_k} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(b)_k}{(c)_k} x^k. $$

- Neka je sada jedan od brojnika negativan cijeli broj i $x = 1$. U tom slučaju zaključujemo da je ${}_2F_1$ konačna suma, odnosno

$$ {}_2F_1(-n,a;c;1) = \frac{(c-a)_n}{(c)_n}. \tag{11} $$

- U slučaju kada je $a = -m$ i $c = -m-n$, pri čemu su $n, m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi sljedeće:

  - Ako je $n = 0$, tada je $a = c$ čime smo naš red sveli na geometrijski red

  $$ {}_2F_1(-m,b;-m;x) = {}_1F_0(b;-;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n x^n}{n!}. $$

  - Ako je $n > 0$, naš red ${}_2F_1(-m,b;-m-n;x)$ reduciramo do konačnog polinoma oblika

  $$ {}_2F_1(-m,b;-m-n;x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{(b)_k (m+n-k)!}{(m+n)!} x^k. $$

  - Ako je sada $m, n \in \mathbb{N}, k \leqq m$, tada $\dfrac{(-m)_k}{(-m-n)_k}$ možemo zapisati kao

  $$ \frac{m!}{(m+n)!}(m+n-k)(m+n-k-1)\cdots(m-k+1), $$

  odakle slijedi, za $b \neq 0, -1, \ldots$

$${}_2F_1(-m,b;-m-n;x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(1-\frac{k}{m+n}\right)\left(1-\frac{k}{m+n-1}\right)\dots\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\frac{(b)_k x^k}{k!}.$$

Kao rezulat uočimo da se naš red završava kod m-tog stupnja, ali počinje ponovo kod $(m+n+1)$ stupnja. Na primjer,

$${}_2F_1(-2,1;-5;x) = 1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}x^6 - \frac{2}{5}x^7 - x^8 + \dots$$

Proučimo konvergenciju Gaussovog hipergeometrijskog reda.

Teorem 3.2.1. *Neka je $|x| = 1$. Tada red ${}_2F_1(a,b;c;x)$*

- *apsolutno konvergira ako je $Re(c-a-b) > 0$,*
- *divergira ako je $Re(c-a-b) \leqq -1$.*

Dokaz Teorema 3.2.1. jednak je dokazu Teorema 3.1.2. □

Euler nam je 1769. dao dokaz teorema danas poznatog kao *Eulerova integralna reprezentacija*. Integralni zapis Gaussove hipergeometrijske formule omogućit će nam lakši razvoj transformacije te funkcije kao i drugih hipergeometrijskih identiteta.

Teorem 3.2.2 (Eulerova integralna reprezentacija)**.** *Neka je $Re(c) > Re(b) > 0$ i $|x| < 1$. Tada je*

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt. \tag{12}$$

Dokaz: Izraz $(1-xt)^{-a}$ možemo raspisati na sljedeći način (vidi (10))

$$(1-xt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n t^n}{n!}. \tag{13}$$

Kako je $|x| < 1$, ako binomni zapis (13) uvrstimo u jednakost (12), sa desne strane dobivamo

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt. \tag{14}$$

Dobiveni integral je beta integral (3) koji možemo zapisati uz pomoć gama funkcija kao (vidi (4))

$$\frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)}. \tag{15}$$

Napokon, ako izraz (15) uvrstimo u (14) slijedi

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\Gamma(n+b)}{n!\Gamma(n+c)}x^n.$$

Kako je, prema definiciji Pochhammerova simbola (5)

$$\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}=(b)_n \quad \text{i} \quad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}=\frac{1}{(c)_n}$$

odmah uočavamo da je prethodni izraz jednak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}={}_2F_1(a,b;c;x),$$

što daje traženu jednakost. □

Primjetimo da prethodna integralna reprezentacija, koja je još poznata i kao *Pochhammerov integral*, vrijedi za $|x|<1$. No, ona se može transformirati kako bi dobili odgovarajuće integralne reprezentacije Gaussove hipergeometrijske funkcije i za druge vrijednosti argumenta, preciznije, vrijedi

- uz supstituciju $-s=t/(t-1)$ dobivamo

  $${}_2F_1(a,b;c;1-x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}s^{b-1}(1+s)^{a-c}(1+sx)^{-a}ds,$$

  pri čemu je $Re(c)>Re(b)>0$ i $|\arg x|<\pi$.

- Slično, neka je $t=1/s$, tada vrijedi

  $${}_2F_1(a,b;c;1/x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_1^{\infty}(s-1)^{c-b-1}\ s^{a-c}\ (s-1/x)^{-a}ds,$$

  za sve $1+Re(a)>Re(c)>Re(b)$ i $|\arg(x-1)|<\pi$.

- U slučaju kada je $t=e^{-t}$, imamo

  $${}_2F_1(a,b;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^{\infty}e^{-bt}\ (1-e^{-t})^{c-b-1}(1-xe^{-t})^{-a}dt,$$

  za $Re(c)>Re(b)>0$.

Pogledajmo još nekoliko supstitucija koje vrijede uz uvjet $Re(c) > Re(b) > 0$.

- Ako je $t = \sin^2 t$, tada

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\sin t)^{2b-1}(\cos t)^{2c-2b-1}}{(1-x\sin^2 t)^a} dt. $$

- Uzmimo sada $t = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}$. Tada je

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{2^{1-c}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\pi} \frac{(\sin t)^{2b-1}(1+\cos t)^{c-2b}}{(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\cos t)^a} dt. $$

- Ako je $t = 1/(\cosh^2 t)$, tada je

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} \frac{(\cosh t)^{2a-2c+1}(\sinh t)^{2c-2b-1}}{\{(\cosh t)^2 - x\}^a} dt. $$

- Slično, za $t = 1/\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh t\right)$ vrijedi

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{2^{b-a}\,\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} \frac{(\sinh t)^{2a-2c+1}(\cosh t - 1)^{2c-a-b-1}}{\left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}\cosh t\right)^a} dt. $$

- Neka je $t = \tanh^2 t$. Uz takvu supstituciju dobivamo

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{2\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} \frac{(\sinh t)^{2b-1}(\cosh t)^{2a-2c+1}}{\{(\cosh t)^2 - x(\sinh t)^2\}^a} dt. $$

Iz uvjeta apsolutne konvergencije, Gauss je izveo jednostavniji zapis hipergeometrijske funkcije pomoću gama funkcije koju danas zovemo *Gaussova sumacijska formula.*

Teorem 3.2.3 (Gaussova sumacijska formula)**.** *Uz uvjet $Re(c-a-b) > 0$ vrijedi sljedeći identitet*

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. $$

Dokaz: U svrhu dokaza najprije treba dokazati jednakost

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}\, {}_2F_1(a,b;c+1;1). $$

Ako je $A_n = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}$ i $B_n = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c+1)_n n!}$, tada je

$$c(c-a-b)A_n - (c-a)(c-b)B_n = \frac{(a_n)(b)_n}{n!(c+1)_{n-1}}\left[c-a-b-\frac{(c-a)(c-b)}{c+n}\right]$$

i

$$c(nA_n-(n+1)A_{n+1}) = \frac{(a_n)(b)_n}{n!(c+1)_{n-1}}\left[c-a-b-\frac{(c-a)(c-b)}{c+n}\right].$$

Uočimo da su nam desne strane u zadnje dvije jednakosti jednake iz čega slijedi

$$c(c-a-b)A_n = (c-a)(c-b)B_n + c(nA_n-(n+1)A_{n+1})$$

te

$$c(c-a-b)\sum_{n=0}^{N} A_n = (c-a)(c-b)\sum_{n=0}^{N} B_n - c(N+1)A_{n+1}.$$

Za $N\to\infty$, slijedi $(N+1)A_{N+1}\sim 1/N^{c-a-b}\to 0$, jer je $Re(c-a-b)>0$, što smo dokazali u Teoremu 3.2.2. Ponavljanjem postupka n puta dobivamo

$$\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c+n-a)\Gamma(c+n-b)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c+n-a-b)}\ {}_2F_1(a,b;c+n;1).$$

Uočimo da desna strana $\to 1$ kada $n\to\infty$. Ovime smo dokazali naš teorem za sve $Re(c-a-b)>0$. Iz Eulerove integralne reprezentacije kada pustimo $x\to 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned}$$

za $Re(c)>Re(b)>0$ i $Re(c-a-b)>0$, pri čemu kao što smo se iznad uvjerili, uvjet $Re(c)>Re(b)>0$ možemo izostaviti. $\square$

3.3 Konfluentna hipergeometrijska funkcija

Matematičar Ernst Eduard Kummer proučavao je *konfluentnu hipergeometrijsku funkciju* te 1836. godine objavljuje svoj rad o istoj za koju se od tada često koristi i naziv *Kummerova funkcija.* Ova funkcija pronašla je svoju primjenu u mnogim granama fizike. Problemi difuzije i sedimentacije, kao u primjeru odvajanja izotopa i određivanju molekularne težine proteina u ultracentrifugi, riješeni su upotrebom ovih funkcija. Rješenje jednadžbe za distribuciju brzine elektrona u pražnjenju plina visoke frekvencije može se također izraziti u obliku Kummerove funkcije, čime je omogućeno predviđanje električnog polja proboja visoke frekvencije za plinove.

Definicija 3.3.1. *Neka je $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Tada je konfluentna hipergeometrijska funkcija definirana s*

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(c)_n n!}, \quad |x| < \infty. $$

Kummerova funkcija $\omega = {}_1F_1(a;c;x)$ rješenje je diferencijalne jednadžbe poznate i po nazivu *Kummerova jednadžba*

$$ x\frac{d^2\omega}{dx^2} + (c-x)\frac{d\omega}{dx} - a\omega = 0. $$

Kummerovu jednadžbu dobivamo iz hipergeometrijske jednadžbe

$$ x(1-x)\frac{d^2\omega}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{d\omega}{dx} - ab\omega = 0 $$

tako da x zamjenimo sa x/b i na kraju pustimo $b \to \infty$. U slučaju da c nije cijeli broj, dobivamo dva nezavisna rješenja Kummerove hipergeometrijske jednadžbe oko $x = 0$ pri čemu je:

- prvo riješenje ${}_2F_1(a,b;c;x)$.
  Uočimo ukoliko x zamjenimo sa x/b i pustimo $b \to \infty$ dobivamo

$$ \lim_{b\to\infty} {}_2F_1(a,b;c;x/b) = {}_1F_1(a;c;x). $$

- drugo riješenje $x^{1-c}\ {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$.
  Zamjenom x sa x/b te pogledajmo što dobivamo u slučaju kada $b \to \infty$

$$ \lim_{b\to\infty} x^{1-c}\ {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x/b) = x^{1-c}\ {}_1F_1(a+1-c; 2-c; x). $$

Rješenje Kummerove jednadžbe oko $x = \infty$ je

$$x^{-a}\ {}_2F_1(a, a+1-c; a+1-b; 1/x).$$

Ukoliko x zamjenimo sa x/b te pustimo $b \to \infty$ dobit ćemo

$$x^{-a}\ {}_2F_0(a, a+1-c; -; -1/x).$$

Predhodni red divergira te prema tome na ovaj način ne možemo dokazati rješenje Kummerove jednadžbe. Stoga, zapišimo naše rješenje pomoću Eulerove integralne reprezentacije:

$$x^{-a}\ {}_2F_1(a+1-c, a; a+1-b; b/x)$$

$$= x^{-a}\ \frac{\Gamma(a+1-b)(-b)^{-a}}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \int_0^{-b} \left(1+\frac{t}{x}\right)^{c-a-1} t^{a-1} \left(1+\frac{t}{b}\right)^{-b} dt.$$

Ukoliko pustimo $b \to -\infty$, na desnoj strani imamo

$$\frac{x^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} \left(1+\frac{t}{x}\right)^{c-a-1} dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt.$$

Prethodni integral konvergira za sve $Re(a) > 0$ i $Re(x) > 0$.
U slučaju da su $Re(a) < 0$ i $Re(x) < 0$ vrijedi

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(a)} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(-s)\Gamma(-x)^s}{\Gamma(c+s)} ds, \quad |arg(-x)| < \pi/2.$$

Teorem 3.3.1 (Prva Kummerova formula)**.** *Ako je* $c \neq 0, -1, -2, \ldots,$ *tada vrijedi*

$${}_1F_1(a; c; x) = e^x\ {}_1F_1(c-a; c; -x).$$

Dokaz: Dana formula slijedi iz jednakosti

$$\begin{aligned}
e^{-x}{}_1F_1(a;c;x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n x^n}{(c)_n n!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-k}(a)_k x^n}{(c)_k k!(n-k)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k (a)_k}{(c)_k k!}\cdot\frac{(-1)^n x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}{}_2F_1(-n,a;c;1)\frac{(-1)^n x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c-a)_n(-x)^n}{(c)_n n!},
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili formulu (11). □

Teorem 3.3.2 (Druga Kummerova formula)**.** *Neka je* $2a$ *paran pozitivan cijeli broj različit od nule. Tada vrijedi*

$$e^{-x}\ {}_1F_1(a;2a;2x) = {}_0F_1\left(-;a+\frac{1}{2};\frac{1}{4}x^2\right).$$

Dokaz: Ako je $c-a=a$, tada je $c=2a$, pa koristeći prvu Kummerovu formulu 3.3.1 imamo

$${}_1F_1(a;2a;x) = e^{x}\ {}_1F_1(a;2a;-x).$$

Također, može se pokazati da je $e^{-x}\ {}_1F_1(a;2a;2x)$ parna funkcija od x. Više o samom dokazu parnosti funkcije zainteresirani čitatelj može pronaći u knjizi [8] na strani 125.
Sada je

$$\begin{aligned}
e^{-x}\ {}_1F_1(a;2a;2x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(-1)^{n-k}2^k x^k}{(2a)_k k!(n-k)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(-n)_k 2^k}{(2a)_k k!}\cdot\frac{(-x)^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}{}_2F_1(-n,a;2a;2)\frac{(-x)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Kako je lijeva strana prethodne jednakosti parna funkcija od x, uočimo da za nenegativan cijeli broj k vrijedi

$$ {}_2F_1(-2k-1, a; 2a; 2) = 0 $$

te slijedi

$$ e^{-x}\ {}_1F_1(a; 2a; 2x) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_2F_1(-2k, a; 2a; 2)\frac{x^{2k}}{(2k)!}. $$

Pronađimo sada diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava funkcija $e^{-x}\ {}_1F_1(a; 2a; 2x)$. Pokazali smo da je $\omega = {}_1F_1(a; c; x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe

$$ x\frac{d^2\omega}{dx^2} + (c-x)\frac{d\omega}{dx} - a\omega = 0. \tag{16} $$

Zamjenimo parametre u jednadžbi (16) tako da je $c = 2a$, $x = 2x$ i $\omega = e^x\omega$. Tada dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$ x\frac{d^2\omega}{dx^2} + 2a\frac{d\omega}{dx} - x\omega = 0, \tag{17} $$

čije barem jedno rješenje mora biti $\omega = e^{-x}{}_1F_1(a; 2a; 2x)$. Zamjenimo sada u jednadžbi (17) varijablu x varijablom $\sigma = \frac{1}{4}x^2$, čime dobivamo

$$ \sigma^2\frac{d^2\omega}{d\sigma^2} + \left(a + \frac{1}{2}\right)\sigma\frac{d\omega}{d\sigma} - \sigma\omega = 0. \tag{18} $$

Dobivena jednadžba (18) je diferencijalna jednadžba funkcije ${}_0F_1$, čije je rješenje oblika

$$ \omega = A\ {}_0F_1\left(-; a + \frac{1}{2}; \frac{1}{4}x^2\right) + B\big(x^2\big)^{\frac{1}{2}-a}{}_0F_1\left(-; \frac{3}{2} - a; \frac{1}{4}x^2\right), $$

ali jednadžba (17) zadovoljava i $\omega_1 = e^{-x}\ {}_1F_1(a; 2a; 2x)$. Ukoliko uzmemo da je konstanta $A = 1$ i $B = 0$ dobit ćemo $e^{-x}\ {}_1F_1(a; 2a; 2x) = {}_0F_1\left(-; a + \frac{1}{2}; \frac{1}{4}x^2\right)$.

3.4 Neki bitni specijalni slučajevi generalizirane hipergeometrijske funkcije

Već smo spomenili da se mnoge elementarne funkcije mogu prikazati pomoću generaliziranih hipergeometrijskih funkcija. Pogledajmo još neke primjere. Jedne od nama zanimljivih veza jesu veze između trigonometrijskih i hipergeometrijskih funkcija:

$$\begin{aligned}\sin x &= x \cdot {}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)\\ \cos x &= {}_0F_1\left(-; \frac{1}{2}; \frac{-x^2}{4}\right).\end{aligned}$$

Dokažimo prvu jednakost:

$$x \cdot {}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; \frac{-x^2}{4}\right) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n \; n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \; x^{2n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)_n 2^{2n} \; n!}. \tag{19}$$

Kako je

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)_n 2^{2n} \; n! &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+n-1\right)2^{2n} \; n!\\ &= 3\cdot 5\cdot 7\cdots(3+(2n-2))\frac{2^n}{2^n} \; n!\\ &= 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) \; 2^n\\ &= 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = (2n+1)!,\end{aligned} \tag{20}$$

uvrštavanjem (20) u (19) slijedi

$$x \cdot {}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; \frac{-x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$$

U svrhu dokazivanja druge jednakosti, primjetimo da je

$${}_0F_1\left(-; \frac{1}{2}; \frac{-x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{x^2}{4})^n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n \; n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\left(\frac{1}{2}\right)_n \; 2^{2n} n!}. \tag{21}$$

Budući da je

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)_n 2^{2n} n! &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)2^{2n}n! \\
&= 1(1+2)(1+4)\cdots(1+(2n-2))\frac{2^n}{2^n}n! \\
&= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)2^n \\
&= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n) = (2n)!,
\end{aligned} \tag{22}$$

kada uvrstimo (22) u (21) dobivamo

$${}_0F_1\left(-;\frac{1}{2};\frac{-x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

Na sličan način može se pokazati da vrijedi:

- Za svaki $x^2 < 1, -\pi/2 < \sin^{-1} x < \pi/2$

$$\sin^{-1} x = x\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right) = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots$$

- Za svaki $x^2 < 1$

$$\tan^{-1} x = x\cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

U slučaju kada su nam $p, q = 0$ dobivamo eksponencijalnu funkciju

$${}_0F_0(-;-;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Za kraj pogledajmo kako logaritam $\log(1+x)$ možemo zapisati pomoću hipergeometrijske funkcije:

$$\begin{aligned}
x\cdot {}_2F_1(1,1;2;-x) &= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n n!}(-x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)_n}{(2)_n}x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\frac{(1)_n}{(2)_n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n(n+1)} = \frac{1}{1+n},$$

pa slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1)_n}{(2)_n} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots = \log(1+x),$$

odnosno vrijedi

$$\log(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1,1;2;-x).$$

4 Hipergeometrijske funkcije dvije varijable

Hipergeometrijske funkcije jedne varijable definirane od strane matematičara 19. stoljeća postižu ogroman uspjeh upravo zbog širine svoje primjene. No, ubrzanim razvojem znanosti i tehnike pokazalo se da hipergeometrijske funkcije jedne varijable nisu uvijek dovoljne za opisivanje čestih, specijalnih matematičkih i fizikalnih pojava te se pojavila potreba za daljnjim istraživanjem. To je dovelo do hipergeometrijskih funkcija dvije i više varijabli. Kronološki gledano, još krajem 19. stoljeća (1880. godine) Appel objavljuje svoje 4 tzv. Appelove funkcije dviju varijabli: F_1, F_2, F_3, F_4. Početkom 20. stoljeća (1920.-1921.) Humbert zapisuje 7 konfluentnih hipergeometrijskih funksija s dvije varijable: $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Xi_1, \Xi_2$. Sve njih objedinjuju Appel i Kampé de Fériet u monografiji iz 1926. godine. Jakob Horn 1931. upotpunjuje spomenutu monografiju s još svojih 10 funkcija: $G_1, G_2, G_3, H_1, \ldots, H_7$ te zaključuje da ih ukupno ima 34. Ovo poglavlje donosi kratak pregled hipergeometrijskih funkcija s dvije varijable: Appelove funkcije, Hornovi redovi, konfluentna hipergeometrijska funkcija s dvije varijable i Kampé de Fériet funkcija te njihove međusobne odnose. Budući da hipergeometrijske funkcije više varijabli nisu prioritetna tema ovoga rada, čitatelj o njima može pročitati više u knjigama [2] i [4].

4.1 Appelove funkcije

Želja za znanjem pokreće svijet. Ona nas gura da istražujemo nove hipoteze i pokušamo dokazati njihovu istinitost. Istraživanje elementarnih čestica veličine atoma, gibanja tijela, otkivanje svemira samo su neke od zanimljivosti koje proučava teorija relativnosti, kvantna mehanika, molekularna fizika. Kako bi došli do konačnih odgovora potrebne su nam složenije matematičke funkcije kao što su *Appelove funkcije.* Appelove funkcije su hipergeometrijske funkcije dviju varijabli ali i generalizacija Gaussove funkcije. Kako bi razumeli Appelove funkcije najprije promotrimo produkt dvije Gaussove funkcije

$$ {}_2F_1(a_1, b_1; c_1; x) {}_2F_1(a_2, b_2; c_2; y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m (a_2)_n (b_1)_m (b_2)_n x^m y^n}{(c_1)_m (c_2)_n m! n!} $$

te pogledajmo kako izgleda zapis kada produkt jednog ili sva tri para $(a_1)_m(a_2)_n$, $(b_1)_m(b_2)_n$, $(c_1)_m(c_2)_n$ zamjenimo sa $(a)_{m+n}$, $(b)_{m+n}$, $(c)_{m+n}$. Na ovaj način, ovisno o parovima koje mijenjamo, dobit ćemo pet funkcija. Jedna kombinacija čini Gaussovu funkciju ${}_2F_1$, dok nam druge četiri kombinacije daju potpuno nove funkcije koje zovemo *Appelove funkcije*.

(i) Gaussova funkcija

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;x+y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}x^m y^n}{(c)_{m+n}m!n!} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}\frac{(a)_N(b)_N x^m y^{N-m}}{(c)_N(N-m)!m!} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(a)_N(b)_N(x+y)^N}{(c)_N N!}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
F_1(a,b,b_1;c;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b_1)_n x^m y^n}{(c)_{m+n}m!n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\frac{x^m}{m!}{}_2F_1(a+m,b_1;c+m;y),
\end{aligned}$$

pri čemu su a,b,b_1,c,x,y realne ili kompleksne vrijednosti, $c \neq 0,-1,-2\ldots$ i $\max\{|x|,|y|\} < 1$.

(iii)

$$\begin{aligned}
F_2(a,b,b_1;c,c_1;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b_1)_n x^m y^n}{(c)_m(c_1)_n m!n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\frac{x^m}{m!}{}_2F_1(a+m,b_1;c_1;y),
\end{aligned}$$

pri čemu su a,b,b_1,c,c_1,x,y realne ili kompleksne vrijednosti, $c,c_1 \neq 0,-1,-2\ldots$ i $|x|+|y| < 1$.

(iv)

$$F_3(a,a_1,b,b_1;c;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_m(a_1)_n(b)_m(b_1)_n}{(c)_{m+n}}\frac{x^m y^n}{m!n!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\frac{x^m}{m!}{}_2F_1(a_1,b_1;c+m;y),$$

pri čemu su a,b,b_1,c,x,y realne ili kompleksne vrijednosti, $c \neq 0,-1,-2\ldots$ i $\max\{|x|,|y|\} < 1$.

(v)

$$F_4(a,b;c,c_1;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(c_1)_n}\frac{x^m y^n}{m!n!}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}\frac{x^m}{m!}{}_2F_1(a+m,b+m;c_1;y),$$

pri čemu su a,b,c,c_1,x,y realne ili kompleksne vrijednosti, $c,c_1 \neq 0,-1,-2\ldots$ i $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} < 1$.

Sve četiri Appelove funkcije mogu se svesti na Gaussovu funkciju ${}_2F_1$ u slučaju kada je $y=0$, također prve tri tvore Gaussovu funkciju ${}_2F_1$ u slučaju kada je $b_1=0$. Pogledajmo još neke zanimljive slučajeve vezane za F_1,F_2,F_3:

- Neka je $y=x$, tada vrijedi

$$F_1(a,b,b_1;c;x,x) = (1-x)^{c-a-b-b_1}{}_2F_1(c-a,c-b-b_1;c;x)$$
$$= {}_2F_1(a,b+b_1;c;x).$$

- Ako je $c=b+b_1$, tada dobivamo

$$F_1(a,b,b_1;b+b_1;x,y) = (1-y)^{-a}{}_2F_1(a,b;b+b_1;(x-y)/(1-y)).$$

- Ako je $c = b$, tada vrijedi

$$F_2(a, b, b_1; b, c_1; x, y) = (1-x)^{-a} {}_2F_1(a, b_1; c_1; y/(1-x)). \tag{23}$$

Kako je Gaussova funkcija simetrična, isti slučaj imamo i kada je $c_1 = b_1$.

- Već smo pokazali da je

$$\begin{aligned} F_1(a, b, b_1; c; x, y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m x^m}{(c)_m m!} {}_2F_1(a+m, b; c+m; y) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m x^m}{(c)_m (1)_m} {}_2F_1(a+m, b; c+m; y) \end{aligned} \tag{24}$$

te uzimajući u obzir svojstvo simetričnosti, iz jednakosti (23) i (24) dobivamo

$$\begin{aligned} &F_1(a, b, b_1; c; x, y) \\ &= (1-y)^{-b} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m (1)_m} x^m (1-y)^{-b_1} {}_2F_1(a, b; c; y/(y-1)) \\ &= (1-y)^{-b_1} F_3(a, c-a, b, b_1; c; x, y/(y-1)). \end{aligned}$$

Iz prethodnog možemo zaključiti da svaka F_1 funkcija može biti izražena pomoću funkcije F_3, dok obrat ne vrijedi, osim u slučaju kada je $c = a + a_1$. Kako funkcija F_1 tvori Gaussovu hipergeometriju funkciju kada je $c = b + b_1$, tada i F_3 tvori Gaussovu funkciju u slučaju kada je $c = a + a_1 = b + b_1$. Na sličan način bilo koju funkciju F_1 možemo zapisati pomoću funkcije F_2 kada je $c_1 = a$.

$$
\begin{aligned}
&(1-y)^{-b_1}F_2(a,b,b_1;c,a;x,y/(y-1)) \\
&= \quad (1-y)^{-b_1}\sum_{m=0}\frac{(a)_m(b)_m x^m}{(c)_m(1)_m}{}_2F_1(a+m,b_1;a;y/(y-1)) \\
&= \quad \sum_{m=0}\frac{(a)_m(b)_m x^m}{(c)_m(1)_m}{}_2F_1(b_1,-m;a;y) \\
&= \quad \sum_{m=0}\frac{(a)_m(b)_m x^m(a-b_1)_m}{(c)_m(1)_m(a)_m}{}_2F_1(b_1,-m;1+b_1-a-m;1-y) \\
&= \quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(b)_m(a-b_1)_m(b_1)_n(-m)_m x^m(1-y)^n}{(1)_m(1)_n(c)_m(1+b_1-a-m)_n} \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(b)_{n+s}(a-b_1)_{n+s}(b_1)_n(-1)^n x^{n+s}(1-y)^n}{(1)_s(1)_n(c)_{n+s}(1-b_1-a-n-s)_n} \\
&= \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(b)_{n+s}(a-b_1)_s(b_1)_n x^{n+s}(1-y)^n}{(1)_s(1)_n(c)_{n+s}} \\
&= \quad F_1(b,a-b_1;c;x,x(1-y)).
\end{aligned}
$$

Svi prethodni slučajevi vrijede za veoma male vrijednosti $|x|$ i $|y|$.

4.2 Hornovi redovi

Njemački matematičar Jakob Horn je 1931. upotpunio do tada poznatu listu svih mogućnosti koje se javljaju pri definiranju konvergentnih hipergeometrijskih funkcija dviju varijabli. Time je zaključio da pored funkcija koje se mogu izraziti pomoću jedne varijable ili koje su produkt istih, postoji ukupno 34 konvergetnih hipergeometrijskih funkcija dviju varijabli. Četiri od njih smo već upoznali kao Appelove funkcije: F_1, F_2, F_3, F_4. Deset funkcija $G_1, G_2, G_3, H_1, \ldots, H_7$ definira Horn pa po njemu dobivaju ime *Hornove funkcije.* U konačnici, javlja se 13 konvergentnih Hornovih funkcija koje dodatno objavljuje Borngässer 1933. Pogledajmo opću definiciju hipergeometrijskog reda koju nam je Horn dao.

Definicija 4.2.1. *Red*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}x^n y^m$$

je hipergeometrijski red dviju varijabli ukoliko su

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{mn}}=f(m,n) \quad i \quad \frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}}=g(m,n)$$

racionalne funkcije od m i n.

Zapišimo Hornovu definiciju 4.2.1 na sljedeći način

$$f(m,n) = \frac{F(m,n)}{\hat{F}(m,n)}, \quad g(m,n) = \frac{G(m,n)}{\hat{G}(m,n)}$$

gdje su $F, \hat{F}, G, \hat{G}$ polinomi od m i n i stupnja redom $p, \hat{p}, q, \hat{q}$. Hornove funkcije definiramo u slučaju kada vrijedi da je $p = \hat{p} = q = \hat{q} = 2$ i one su dane sljedećim izrazima:

- $$G_1(\alpha,\beta,\beta_1;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_{m+n}(\beta)_{n-m}(\beta_1)_{m-n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$G_2(\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_m(\alpha_1)_n(\beta)_{n-m}(\beta_1)_{m-n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$G_3(\alpha,\alpha_1;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_{2n-m}(\alpha_1)_{2m-n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_1(\alpha,\beta,\gamma;\delta;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_{m+n}(\gamma)_n}{(\delta)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta;\epsilon;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n(\delta)_n}{(\epsilon)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_3(\alpha,\beta;\gamma;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_4(\alpha,\beta;\gamma,\delta;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_m(\delta)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_5(\alpha,\beta;\gamma;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_{n-m}}{(\gamma)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_6(\alpha,\beta,\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_{2m-n}(\beta)_{n-m}(\gamma)_n\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

- $$H_7(\alpha,\beta,\gamma;\delta;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}.$$

Preostalih 20 funkcija čini konfluentne hipergeometrijske funkcije za koje vrijedi $p \leqq \hat{p} = 2$, $q \leqq \hat{q} = 2$, pri čemu p, q ne mogu biti u isto vrijeme 2.

4.3 Konfluentna hipergeometrijska funkcija s dvije varijable

Već spomenuti francuski matematičar Pierre Humbert je još 20. godina 20. stoljeća definirao sedam *konfluentnih hipergeometrijskih funkcija s dvije varijable* $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2, \Xi_1, \Xi_2$. Pomoću konfluentnih hipergeometrijskih funkcija Humbert generalizira Kummerovu hipergeometrijsku funkciju ${}_1F_1$ jedne varijable i konfluentnu hipergeometrijsku funkciju ${}_0F_1$ jedne varijable na sljedeći način:

- $$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\\ &= \lim_{|\beta_1|\to\infty}F_1(\alpha,\beta,\beta_1;\gamma;x,y/\beta_1)\\ &= \lim_{\epsilon\to\infty}F_1(\alpha,\beta,1/\epsilon;\gamma;x,\epsilon y),\end{aligned}$$

  gdje je $|x|<1, |y|<\infty$.

- $$\begin{aligned}\Phi_2(\beta,\beta_1;\gamma;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m(\beta_1)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\\ &= \lim_{|\alpha|\to\infty}F_1(\alpha,\beta,\beta_1;\gamma;x/\alpha,y/\alpha)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}F_1(1/\epsilon,\beta,\beta_1;\gamma;\epsilon x,\epsilon y),\end{aligned}$$

  gdje je $|x|<\infty, |y|<\infty$.

- $$\Phi_3(\beta;\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

  pri čemu vrijedi $|x|<\infty, |y|<\infty$.

- $$\Psi_1(\alpha,\beta;\gamma,\gamma_1;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_m(\gamma_1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

  tako da je $|x|<1, |y|<\infty$.

- $$\Psi_2(\alpha;\gamma,\gamma_1;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma_1)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

  u slučaju kada je $|x|<\infty, |y|<\infty$.

- $$\Xi_1(\alpha,\alpha_1,\beta;\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\alpha_1)_n(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

  uz uvijet $|x|<1, |y|<\infty$.

- $$\Xi_2(\alpha,\beta;\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},$$

  gdje je $|x|<1, |y|<\infty$.

Uočimo također da vrijedi

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Phi_2(\beta,1/\epsilon;\gamma;x,\epsilon y)=\Phi_3(\beta;\gamma;x,y),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Psi_1(\alpha,1/\epsilon;\gamma,\gamma_1;\epsilon x,y)=\Psi_2(\alpha;\gamma,\gamma_1;x,y),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Xi_1(\alpha,1/\epsilon,\beta;\gamma;x,\epsilon y)=\Xi_2(\alpha,\beta;\gamma;x,y).$$

4.4 Kampé de Fériet funkcija

U ranijim poglavljima pokazali smo da poopćenjem Gaussove funkcije ${}_2F_1$ tj. povećanjem parametara u brojniku i nazivniku dobivamo Generaliziranu hipergeometrijsku funkciju ${}_pF_q$. Na sličan način Kampé de Fériet 1921. godine objedinjuje Appelove funkcije te nam daje generalizirani oblik hipergeomerijskih funkcija dviju varijabli koju nazivamo *Kampé de Fériet funkcija*:

$$
\begin{aligned}
&{}_{p:q;k}F_{l:m;n}\big((a_p):(b_q);(c_k);(\alpha_l):(\beta_m);(\gamma_n);x,y\big)\\
&\qquad = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{p}(a_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s}\frac{x^r}{r!}\frac{y^s}{s!}.
\end{aligned}
$$

Kampé de Fériet funkcija konvergira ako je

i) $p+q<l+m+1, \quad p+k<l+n+1, \quad \max\{|x|,|y|\}<\infty$,

ii) $p+q=l+m+1, \quad p+k=l+n+1$ i

$$
\begin{cases} |x|^{\frac{1}{p-l}}+|y|^{\frac{1}{p-l}}<1, & l<p\\ \max\{|x|,|y|\}<1, & l>p. \end{cases}
$$

Pogledajmo nekoliko primjera kako Kampé de Fériet funkcije možemo izraziti u obliku generaliziranih hipergeometrijskih funkcija:

- ${}_{p:0;0}F_{q:0;0}(\alpha_1,\dots,\alpha_p:-;-;\beta_1,\dots,\beta_q:-;-;x,y)$

$$= {}_pF_q(\alpha_1,\dots,\alpha_p;\beta_1\dots,\beta_q;x+y),$$

- ${}_{0:p;r}F_{0:q;s}(-:\alpha_1,\dots,\alpha_p;\gamma_1,\dots,\gamma_r;-:\beta_1,\dots,\beta_q;\delta_1,\dots,\delta_s;x,y)$

$$= {}_pF_q(\alpha_1,\dots,\alpha_p;\beta_1,\dots,\beta_q;x){}_rF_s(\gamma_1,\dots,\gamma_r;\delta_1,\dots,\delta_s;y),$$

- ${}_{p:1;1}F_{q:0;0}(\alpha_1,\dots,\alpha_p:\tau;\sigma;\beta_1,\dots,\beta_q:-;-;x,x)$

$$= {}_{p+1}F_q(\alpha_1,\dots,\alpha_p,\tau+\sigma;\beta_1,\dots,\beta_q;x),$$

- ${}_{p:0;0}F_{q:1;1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p : -; -; \beta_1,\ldots,\beta_q : \tau; \sigma; x, x)$

  $$= {}_{p+2}F_{q+3}(\alpha_1,\ldots,\alpha_p, \triangle(2; \tau+\sigma-1); \beta_1,\ldots,\beta_q, \tau, \sigma, \tau+\sigma-1; 4x),$$

  pri čemu je $\triangle(l;\lambda)$ definiran kao

  $$\frac{\lambda}{l}, \frac{\lambda+1}{l}, \ldots, \frac{\lambda+l-1}{l}, \quad l = 1, 2, 3, \ldots.$$

  Više specijalnih slučajeva Kampé de Férietove funkcije, zainteresirani čitatelj može pronaći u knjizi [11].

Literatura

[1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[2] H. Bateman, *Higher Transcendental function*, New York, McGraw-Hill, 1953.

[3] W. Chen, *Special functions*, The Macmillan company, New York, 1960.

[4] A. Erdélyi, *Hypergeometric functions of two variables*, California, 1950.

[5] D. Jankov, *Integral expressions for series of functions of hypergeometric and Bessel types*, Thesis, Zagreb, 2011.

[6] S. Mubeen, G. Rahman, A. Rehman, M. Naz, *Contiguous Function Relations for k-Hypergeometric Functions*, Department of Mathematics, University of Sargodha, Pakistan, 10 April 2014.

[7] S.-L. Qiu, M. Vuorinen, *Special function in Geometric Function Theory*, Handbook of Complex Analysis, December 2005.

[8] E. D. Rainville, *A Course on Number Theory*, Lecture notes, University of London, London, 2009.

[9] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[10] K. Srinivasa Rao, V. Lakshminarayanan, *Generalized Hypergeometric Functions*, Institute of Physics, 24 October 2018.

[11] H. M. Srivastava, P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian hypergeometric series*, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press (John Wiley and Sons, Inc.), New York, 1985.

[12] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London, 1992.

Sažetak

U ovom radu definirali smo opći oblik hipergeometrijske funkcije te se bliže upoznali s nekim specijalnim funkcijama kao što su generalizirane hipergeometrijske funkcije, Gaussova hipergeometrijska funkcija i konfluentna hipergeometrijska funkcija. Iskazali smo i dokazali konvergenciju generalizirane i Gaussove hipergeometrijske funkcije te integralnu reprezentaciju Gaussove funkcije. Pored generalizirane i Gaussove funkcije za koju vrijedi da je $p \leqq q + 1$, proučili smo i hipergeometrijsku funkciju za koju vrijedi da je $p, q = 1$. Takvu funkciju zovemo konfluentna hipergeometrijska funkcija. Promotrili smo diferencijalnu jednadžbu čije je jedno rješenje konfluentna funkcija te pronašli ostala rješenja. Pokazali smo da se mnoge elementarne funkcije mogu prikazati pomoću generaliziranih hipergeometrijskih funkcija. Pored funkcija s jednom varijablom, definirali smo neke hipergeometrijske funkcije s dvije varijable kao što su Appelove funkcije, Hornovi redovi, konfluentna hipergeometrijska funkcija s dvije varijable te Kampé de Fériet funkcija. Pokazali smo njihovu vezu sa generaliziranim hipergeometrijskim funkcijama te njihov međusobni odnos.

Ključne riječi

Generalizirane hipergeometrijske funkcije, Gaussova hipergeometrijska funkcija, konfluentna hipergeometrijska funkcija, Appelove funkcije, Hornovi redovi, konfluentna hipergeometrijska funkcija s dvije varijable, Kampé de Fériet funkcija.

Hypergeometric function

Summary

In this thesis, we define the general form of hypergeometric functions and get acquainted with some special functions such as Generalized hypergeometric functions, Gauss hypergeometric function and confluent hypergeometric function. We have stated and proved the convergence of the Generalized and Gaussian hypergeometric function and integral representation of Gaussian function. In addition to the Generalized and Gaussian function which is valid to be $p \leqq q+1$, we also studied the hypergeometric function which is valid to be $p, q = 1$. This function is called confluent hypergeometric function. We observed the differential equation whose solution is confluent function and found other solutions. We have shown that many elementary functions can be represented by Generalized hypergeometric functions. In addition to functions with one variable, we defined some Hypergeometric functions with two variables, such as Apple Series, Horn Series, confluent hypergeometric functions with two variables and Kampé de Férie's Series. We have shown their connection with Generalized hypergeometric function and their interrelationship.

Keywords

Generalized hypergeometric functions, Gauss hypergeometric function, confluent hypergeometric function, Appell Series, Horn Series, confluent hypergeometric series in two variables, Kampé de Fériet's Series.

Životopis

Rođena sam 7. ožujka 1995. godine u Vukovaru, gdje kao učenik generacije završavam osnovnu školu Dragutina Tadijanovića i srednju školu Prirodno-matematičke Gimnazije Vukovar. Nakon toga upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Akademske godine 2015./2016., kao redovan student druge godine preddiplomskog studija radim i kao učitelj matematike u Centru za socijalnu skrb u Vukovaru, gdje je djeci slabijeg socijalnog statusa omogućena besplatna pomoć pri savladavanju gradiva iz matematike. 2016. godine, na trećoj godini studija, odlazim na Erasmus studentsku razmjenu u Poljsku gdje provodim jedan semestar slušajući predavanja na engleskom i polažući ispite na njihovom matičnom fakultetu "Lublin University of Technology". Također imam priliku učiti i steći certifikat o osnovnom znanju poljskog jezika. Prilikom povratka s Erasmusa, na Odjelu za matematiku stječem naziv prvostupnika matematike te upisujem Diplomski studij - Financijska matematika i statistika. 2017. godine radim kao demonstrator na Odjelu držeći Predkolegij studentima prve godine Odjela za matematiku. 2018. odlazim na drugu Erasmus studentsku razmjenu u Italiju, gdje na Sveučilištu u Trentu provodim šest mjeseci slušajući predavanja i polažući ispite te učeći talijanski jezik. Nakon povratka na matični fakultet 2019. odrađujem stručnu praksu u "Energetika naturalis d.o.o", gdje imam priliku svoje znanje primijeniti prilikom analize poslovanja poduzeća ENNA grupe. Iste te godine u ljeto odlazim na još jednu stručnu praksu, ali ovaj put u Chemnitz, Njemačka, gdje sljedeća dva mjeseca usavršavam svoje vještine programiranja u meni do tada novom programskom jeziku "Julia". Sa stručne prakse vraćam se 1. rujna 2019. godine i počinjem raditi kao nastavnik matematike u osnovnoj školi Dragutina Tadijanovića u Vukovaru gdje i danas radim. Pored fakultetskog obrazovanja, nakon povratka s prvog Erasmusa pridružujem se Erasmus Student Network u Osijeku gdje sljedeće 4 godine volontiram. Kroz volontiranje u ESN-u pružam pomoć svim dolaznim erasmusima u Osijek, brinem se o njihovim prijavama na fakultet, predmetima, smještaju, zdravstvu i svemu što je potrebno kako bi im olakšala boravak u stranoj zemlji. Također pomažem svim domaćim studentima koji žele otići na razmjenu kroz edukativne radionice pisanja motivacijskih pisama, životopisa i prijenosu iskustva sa svoje razmjene. Kao volonter imala sam priliku putovati širom Europe radi razmjene iskustava i usavršavanja svojih vještina prezentiranja, organizacije, govorništva, jezika i mnogih drugih.