Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike

Tina Drašinac

Cholesky dekompozicija i primjena u financijama

Diplomski rad

Osijek, 2014.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike

Tina Drašinac

Cholesky dekompozicija i primjena u financijama

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2014.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Sustav linearnih jednadžbi **2**

2.1 Kvadratni sustavi 4

2.2 Rješavanje kvadratnih sustava 5

3 Cholesky dekompozicija **8**

3.1 Linearni sustavi jednadžbi - Cholesky metoda 12

3.2 Varijante Cholesky agoritma 14

3.2.1 Cholesky dekompozicija koristeći podmatrice 16

3.2.2 Cholesky dekompozicija po stupcima 17

3.2.3 Cholesky dekompozicija po recima 18

3.3 Semidefinitan slučaj 19

3.4 LDL^T faktorizacija 19

4 Primjena Cholesky dekompozicije **21**

4.1 Kovarijanca i korelacija 21

4.2 Generiranje slučajnih brojeva sa specifičnim distribucijama . . 22

4.2.1 Normalno distribuirane korelirane slučajne varijable . . 22

4.2.2 Transformacija 23

Sažetak **26**

Title and summary **27**

Životopis **28**

1 Uvod

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi jedan je od bitnijih problema linearne algebre. Vrlo bitna grana numeričke analize je posvećena izradi efikasnih algoritama za matrična računanja. Ovaj problem je odavnina poznat i danas predstavlja veliko polje istraživanja.
U linearnoj algebri, matrična dekompozicija ili matrična faktorizacija predstavlja prikaz matrice u obliku produkta matrica. Matrične faktorizacije pojednostavljuju daljnja računanja, bilo teoretska ili praktična. Postoje algoritmi koji su napravljeni za pojedine tipove matrica te mnogo metoda za faktorizaciju matrica, gdje se svaka koristi u zasebnim klasama problema. Predmet ovog diplomskog rada je Cholesky dekompozicija koja se, najčešće, koristi za numeričko rješavanje linearnih sustava ali ćemo pokazati i njezinu primjenu u koreliranju normalnih slučajnih varijabli.

U drugom poglavlju je uveden pojam sustava linearnih jednadžbi te kada je takav sustav jednadžbi rješiv. Posebno ćemo se posvetiti kvadratnim sustavima te rješavanju takvih sustava LU faktorizacijom.

U trećem poglavlju obrađena su svojstva simetričnih pozitivno definitnih matrica za koje je Cholesky faktorizacija definirana. Naveden je algoritam te na konkretnom primjeru provedena sama faktorizacija. Opisane su i varijante Cholesky faktorizacije te kako metoda funkcionira za semidefinitan slučaj. Promotrit ćemo i tzv. Cholesky faktorizaciju bez korjenovanja, odnosno LDL^T faktorizaciju.

U posljednjem, četvrtom poglavlju ćemo vidjeti kako jednostavno pomoću Cholesky faktorizacije možemo generirati slučajne brojeve sa specifičnim distribucijama te dobiti normalnu slučajnu varijablu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ za dani vektor μ i matricu kovarijanci Σ.

2 Sustav linearnih jednadžbi

Tema rada dolazi iz područja linearne algebre te ćemo napraviti pregled nekih osnovnih pojmova koji će dalje u radu biti korišteni. Pojam "linearnih" znači da se u jednadžbama nepoznanice pojavljuju samo na prvu potenciju i da se ne pojavljuju umnošci nepoznanica. Pregled je napravljen prema literaturi [1] i [5]. Opći oblik sustava m jednadžbi s n nepoznanica koji glasi

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \tag{2.1.}$$

možemo zapisati kao matričnu jednadžbu oblika $Ax = b$, gdje je b bilo kakav vektor iz $\mathbb{R}^m$, dok su $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $x \in \mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrica A se naziva matrica koeficijenata sustava, x je vektor nepoznanica, b desna strana sustava.

Za sustav kažemo da je *homogen* ako je $b = 0$, a ako je $b \neq 0$ kažemo da je sustav *nehomogen*. Za sustav kažemo da je *pravilno definiran* ako je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ($n = m$). *Predefiniran* sustav jednadžbi je sustav u kojem je broj jednadžbi veći od broja nepoznanica ($n < m$), a *poddefiniran* sustav je sustav u kojem je manje jednadžbi nego nepoznanica ($n > m$).

Za sustav jednadžbi koji ima barem jedno rješenje (jedno jedinstveno ili beskonačno mnogo rješenja) kažemo da je konzistentan ili rješiv. Sustav koji nema rješenja je nekonzistentan odnosno nerješiv.

Definicija 2.1 *Dva sustava linearnih jednadžbi su ekvivalentna ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.*

Elementarne transformacije za dobivanje ekvivalentnog sustava svode se na specijalne operacije nad retcima matrice. Zovemo ih *osnovne* ili *elementarne* operacije nad (ili na) retcima ili kraće osnovne ili elementarne retčane operacije.

Definicija 2.2 *Elementarne transformacije sustava linearnih jednadžbi su:*

- *zamjena poretka dviju jednadžbi*
- *množenje neke jednadžbe skalarom* $\lambda \neq 0$
- *pribrajanje neke jednadžbe pomnožene skalarom* λ *nekoj drugoj jednadžbi sustava.*

Navedene transformacije se koriste za rješavanje kako homogenih tako i nehomogenih sustava jednadžbi. Matrična analogija tih pravila kod nehomogenih sustava linearnih jednadžbi su osnovne ili elementarne operacije nad retcima, ali sada na proširenoj matrici $[A|b]$.

Definicija 2.3 *Proširena matrica sustava (2.1.) je matrica oblika*

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Rješenje sustava (2.1.) je svaka uređena n-torka $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koja uvrštena u (2.1.) identički zadovoljava sve jednadžbe.

Odgovor na pitanje o rješivosti općeg sustava linearnih jednadžbi dat će nam sljedeći teorem:

Teorem 2.1 *(Kronecker-Capelli). Sustav $Ax=b$ je rješiv ako i samo ako vrijedi $r(A) = r([A|b])$.* [1]

Dokaz teorema: literatura [1].

Primijetimo da homogeni sustav uvijek ima barem jedno rješenje jer je nulvektor ($x = 0$) očito jedno njegovo rješenje. To rješenje zovemo trivijalno ili nul rješenje.

2.1 Kvadratni sustavi

Razmotrimo specijalan slučaj sustava $Ax = b$ u kojem je broj jednadžbi m jednak broju nepoznanica n, dakle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kvadratna matrica.

Definicija 2.4 *Kaže se da je sustav $Ax = b$ Cramerov ako je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (dakle, broj jednadžbi je jednak broju nepoznanica) i ako je A regularna matrica.*

Cramerovi sustavi se također nazivaju i regularnim.

Posebnu klasu kvadratnih matrica čine tzv. normalne matrice za koje vrijedi:

$A^*A = AA^*$, gdje je A^* konjugirana i transponirana matrica matrice A.

Podklase normalnih matrica su:

Hermitske matrice za koje vrijedi $A = A^*$, u kompleksnom prostoru $\mathbb{C}^{n\times n}$. U realnom prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ njima odgovaraju simetrične matrice, za koje vrijedi $A = A^T$.

Antihermitske matrice za koje vrijedi $A = -A^*$, u kompleksnom prostoru $\mathbb{C}^{n\times n}$. U realnom prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ njima odgovaraju antisimetrične matrice, za koje vrijedi $A = -A^T$.

[1] Broj linearno nezavisnih vektora redaka (stupaca) matrice A naziva se rang matrice A i označava s $r(A)$.

Unitarne matrice za koje vrijedi $A^{-1} = A^*$, u kompleksnom prostoru $\mathbb{C}^{n\times n}$. U realnom prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ njima odgovaraju ortogonalne matrice, za koje vrijedi $A^{-1} = A^T$.

2.2 Rješavanje kvadratnih sustava

Ukoliko je $r(A) < n$, tada je $n - r(A) > 0$ i imamo beskonačno rješenja. Skup svih rješenja čini vektorski prostor dimenzije $n - r(A)$. Pobliže ćemo razmotriti slučaj kad je $n = r(A)$, tj. kad je matrica A regularna.
Kada je Cramerov sustav rješiv reći će nam iduća propozicija.

Propozicija 2.1 *Cramerov sustav $Ax = b$ je rješiv, a rješenje mu je jedinstveno i dano formulom $c = A^{-1}b$.*

Dokaz propozicije : literatura [1].

Dakle, jedinstvenost rješenja:

$$Ax = b, \quad n = m \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0$$

Ovisno o strukturi matrice A postoje različite metode rješavanja sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je A regularna kvadratna matrica, b zadani vektor, a x traženo rješenje. Takve metode se uglavnom dijele u dvije skupine: direktne i iterativne.

A) **Direktne** - LU faktorizacija, Cholesky faktorizacija, Cramerovo pravilo, Gaussova eliminacija, Gauss-Jordanova metoda, ...

B) **Iterativne** - Jacobijeva metoda, Gauss-Seidelova metoda, ...

Neke od direktnih metoda zasnivaju se na različitim faktorizacijama matrice koje omogućavaju jednostavno rješavanje sustava.

Tradicionalne faktorizacijske metode za linearne sustave uključuju pretvorbu zadanog kvadratnog sustava u trokutasti sustav koji ima isto rješenje. Jedna od takvih metoda je LU faktorizacija (literatura [11]).

Uvest ćemo najprije neke pojmove.

Definicija 2.5 *Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kažemo da je gornjetrokutasta ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i > j$, i donjetrokutasta ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i < j$.*

Definicija 2.6 *Za matricu $A^j \in \mathbb{R}^{j \times j}$ kažemo da je j-ta glavna podmatrica matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ako za njene elemente vrijedi $(A^j)_{kl} = a_{kl}$ za $1 \leq k, l \leq j$.*

Pretpostavimo da je matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna te ju prikažemo kao umnožak donje trokutaste (L) i gornje trokutaste (U) matrice tako vrijedi $A = LU$ i $l_{ii} = 1$ za svako $i = 1, ..., n$.
Dakle, sustav $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$ može se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y \end{aligned}$$

te se svodi na rješavanje dva sustava s trokutastim matricama.

Linearni sustav jednadžbi $Lx = b$, gdje je $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donje trokutasta matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad i = 1, ..., n$$

rješava se supstitucijom unaprijed

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_i &= b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k, \quad i = 2, ..., n \end{aligned}$$

Sustav linearnih jednadžbi $Ux = b$, gdje je $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gornje trokutasta matrica

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad u_{ii} \neq 0, \quad i = 1, ..., n$$

jednostavno se riješi supstitucijom unazad

$$x_n = \tfrac{b_n}{u_{nn}}$$
$$x_i = \tfrac{1}{u_{ii}}(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}x_k), \quad i = n-1, ..., 1$$

Znamo i da LU faktorizacija nije uvijek moguća, idući teorem nam govori da ako postoji LU faktorizacija, ona je jedinstvena.

Teorem 2.2 *a) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da su joj sve j-te glavne podmatrice A^j regularne za $j = 1, ..., n$. Tada postoji jedinstvena faktorizacija matrice A takva da je $A = LU$, gdje je L donje trokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali, a U regularna gornje trokutasta matrica.*
b) Ako je A^j singularna za neko $j \in \{1, ..., n\}$, tada ne postoji takva faktorizacija.

Dokaz: literatura [11].

Trokutasta matrica ima sljedeća svojstva:
1) Determinanta bilo kakve trokutaste matrice jednaka je produktu njenih elemenata koji su na glavnoj dijagonali.
2) Produkt dvije gornje ili dvije donje trokutaste matrice istog reda daje gornje, odnosno donje trokutastu matricu.
3) Produkt gornje i donje, odnosno donje i gornje trokutaste matrice istog reda, daje kvadratnu matricu istog reda.

3 Cholesky dekompozicija

Primijetimo da je Cholesky dekompozicija "simetrizirana" varijanta LU faktorizacije. Za svaku pozitivno definitnu matricu može se napraviti LU faktorizacija bez pivotiranja. Tada se može zapisati u simetriziranom obliku $A = LDL^T$. Matricu A je moguće zapisati kao umnožak gornje i donje trokutaste matrice koje su jedna drugoj transponirane.

Cholesky faktorizacija je generalno definirana za hermitske pozitivno definitne matrice u kompleksnom slučaju. Mi ćemo se zadržati na realnom slučaju, gdje ćemo danu metodu primijeniti na simetrične pozitivno definitne matrice.

Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama. Kako smo već rekli, realnu matricu zovemo simetričnom, ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j. Navedimo i definiciju pozitivne definitnosti.

Definicija 3.1 *Kažemo da je simetrična $n \times n$ matrica A pozitivno definitna ako za sve $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,$ vrijedi $x^T A x > 0$.*

Pozitivna definitnost može se utvrditi korištenjem Sylvesterovog kriterija koji kaže da će matrica reda n biti pozitivno definitna ukoliko su joj sve vrijednosti glavnih subdeterminanti (minora) pozitivne. Glavne subdeterminante formiraju se tako da se prvi element uzme za subdeterminantu reda 1×1 i zatim se povećava red dodavanjem elemenata koji okružuju tu subdeterminantu sa desne strane i ispod nje. Zadnja glavna subdeterminanta je determinanta cijele matrice.

Dakle, realna matrica A je simetrična pozitivno definitna ako i samo ako je

$$A = A^T, \; x^T A x > 0 \text{ za svaki } x \neq 0.$$

Cijela prethodna rasprava sažeta je u idućoj propoziciji koja će nam dati svojstva takvih matrica te nas dovesti do same Cholesky faktorizacije. Iskaz i dokaz propozicije preuzet je iz literature [2].

Prije same propozicije prisjetimo se svojstvenih (vlastitih) vrijednosti i svojstvenih (vlastitih) vektora matrice:
Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ je svojstveni vektor od A ako postoji skalar λ takav da je $Ax = \lambda x$.
U tom slučaju , λ je svojstvena vrijednost, a par (x, λ) je svojstveni par matrice A. Kako je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, svojstveni vektor od A je netrivijalan vektor iz $\mathbb{R}^n$, a svojstvena vrijednost skalar iz $\mathbb{R}$.

Propozicija 3.1 *1) ako je X regularna, tada je A simetrična pozitivno definitna matrica ako i samo ako je $X^T AX$ simetrična pozitivno definitna.*

2) ako je A simetrična pozitivno definitna i H bilo koja glavna podmatrica od A (H=A(j:k,j:k) za neki $j \leq k$), tada je H simetrična pozitivno definitna.

3) A je simetrična pozitivno definitna ako i samo ako je $A = A^T$ i sve njezine svojstvene vrijednosti su pozitivne.

4) ako je A simetrična pozitivno definitna, tada su svi $a_{ii} > 0$ i $max_{ij}|a_{ij}| = max_i a_{ii} > 0$.

5) A je simetrična pozitivno definitna ako i samo ako postoji jedinstvena donje trokutasta nesingularna matrica L, s pozitivnim dijagonalnim elementima, takva da je $A = LL^T$. $A = LL^T$ se naziva Cholesky[2] faktorizacija od A, a L se naziva Cholesky faktor od A.

[2]Andre-Loius Cholesky (1875.-1918.), francuski matematičar ukrajinskog porijekla i časnik u vojsci, bavio se geodetskim istraživanjima i izradom geografskih karata. Sama faktorizacija publicirana je posthumno.

Dokaz.

1) X regularna implicira $Xx \neq 0$ za svaki $x \neq 0$, pa $x^T X^T AXx > 0$ za svaki $x \neq 0$. A simetrična pozitivno definitna implicira da je $X^T AX$ simetrična pozitivno definitna. Za dokaz druge implikacije koristila bi se matrica X^{-1}.

2) Pretpostavimo prvo da je $H = A(1:m, 1:m)$. Tada s obzirom na bilo koji m-vektor y, n-vektor $x = [y^T, 0]^T$ zadovoljava $y^T Hy = x^T Ax$. Pa ako je $x^T Ax > 0$ za svaki nenul x, tada je $y^T Hy > 0$ za svaki nenul y pa je H simetrična pozitivno definitna. Ako H ne leži u gornjem lijevom kutu matrice A, koristimo permutaciju P tako da H leži u lijevom gornjem kutu u $P^T AP$ i iskoristimo prvu tvrdnju.

3) Neka je X realna matrica ortogonalnih svojstvenih vektora matrice A takva da je $X^T AX = \Lambda$ dijagonalna matrica svojstvenih vrijednosti λ_i. Pošto je $x^T \Lambda x = \sum_i \lambda_i x_i^2$, Λ je simetrična pozitivno definitna ako i samo ako svaki $\lambda_i > 0$. Sada iskoristimo dio propozicije pod 1.

4) Neka je e_i i-ti stupac jedinične matrice. Tada je $e_i^T Ae_i = a_{ii} > 0$ za svaki i. Ako je $|a_{kl}| = max_{ij}|a_{ij}|$, ali $k \neq l$, izabrati $x = e_k - sign(a_{kl})e_l$. Tada je $x^T Ax = a_{kk} + a_{ll} - 2|a_{kl}| \leq 0$ što je kontradikcija s definicijom pozitivne definitnosti.

5) Pretpostavimo $A = LL^T$ uz L regularna. Tada $x^T Ax = (x^T L)(L^T x) = ||L^T x||_2^2$ za svaki $x \neq 0$ pa je A simetrična pozitivno definitna. Ako je A simetrična pozitivno definitna, pokažimo da L postoji indukcijom po dimenziji n. Uz dodatni uvjet da je $l_{ii} > 0$ za svaki i, naša konstrukcija će dati jedinstveni L. Za $n = 1$, $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ što je dobro definirano čim je $a_{11} > 0$. Dovoljno je proučiti blok 2×2. Pišemo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{A_{12}^T}{\sqrt{a_{11}}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & \tilde{A_{22}} + \frac{A_{12}^T A_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix},$$

Tako je $(n-1) \times (n-1)$ matrica $\tilde{A_{22}} = A_{22} - \frac{A_{12}^T A_{12}}{a_{11}}$ simetrična. Prema prvoj tvrdnji propozicije 3.1., $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{A_{22}} \end{bmatrix}$ je simetrična pozitivno definitna, pa prema drugoj tvrdnji propozicije $\tilde{A_{22}}$ je simetrična pozitivno definitna. Po pretpostavci indukcije postoji L tako da je $\tilde{A_{22}} = \tilde{L}\tilde{L}^T$ i

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{A_{12}^T}{\sqrt{a_{11}}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{L}\tilde{L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{A_{12}^T}{\sqrt{a_{11}}} & \tilde{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \\ 0 & \tilde{L}^T \end{bmatrix} \equiv LL^T. \quad \square$$

Primijetimo da samu matricu A možemo faktorizirati u obliku $A = U^T U$, pri čemu je U gornje trokurasta matrica, $(L = U^T)$.
Determinanta matrice A je $\det A = (l_{11} \cdots l_{nn})^2$.

Algoritam 1. (Cholesky faktorizacija simetrične pozitivno definitne matrice)

```
for  j = 1  to  n
    l_jj = (a_jj - sum_{k=1}^{j-1} l_jk^2)^{1/2}
    for  i = j + 1  to  n
        l_ij = (a_ij - sum_{k=1}^{j-1} l_ik l_jk) / l_jj
    end for
end for
```

$$\texttt{for}\quad j = 1 \quad \texttt{to} \quad n$$

$$l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{1/2}$$

$$\texttt{for}\quad i = j+1 \quad \texttt{to} \quad n$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk})/l_{jj}$$

$$\texttt{end for}$$

$$\texttt{end for}$$

3.1 Linearni sustavi jednadžbi - Cholesky metoda

Cholesky faktorizacija se uglavnom koristi za numeričko rješavanje linearnih jednadžbi oblika $Ax = b$.
Dakle, ako je A simetrična pozitivno definitna matrica tada sustav $Ax = b$ možemo riješiti Cholesky metodom u 3 koraka.

$$LL^T x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b, \\ L^T x = y. \end{cases}$$

- Zapišemo A kao $A = LL^T$
- Zatim rješavanjem sustava $Ly = b$ dobijemo y
- Te konačno iz sustava $L^T x = y$ dobijemo x.

Pokazat ćemo primjerom kako se, nakon rastava simetrične pozitivno definitne matrice u Cholesky formu, sustav $Ax = b$ može vrlo jednostavno riješiti.

Primjer 3.1 Riješi sustav Cholesky metodom.

$$4x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 14$$
$$2x_1 + 17x_2 - 5x_3 = -101$$
$$14x_1 - 5x_2 + 83x_3 = 155.$$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix}$, A je pozitivno definitna matrica stoga A možemo zapisati formom Cholesky faktorizacije na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Dakle $A = LL^T$.

Formule za faktorizaciju Choleskog:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}^2}, \quad j = 2, ..., n$$

$$l_{jl} = \tfrac{a_{jl}}{l_{11}}, \quad j = 2, ..., n$$

$$l_{jk} = \tfrac{1}{l_{kk}}(a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{js} l_{ks}), \quad j = k + 1, ..., n, \quad k \geq 2$$

Primjenimo dane formule:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{14}{2} = 7$$
$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{17 - 1} = 4$$
$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31} l_{21}) = \frac{1}{4}(-5 - 7 \cdot 1) = -3$$
$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{83 - 7^2 - (-3)^2} = 5$$

Matricu A doveli smo u Cholesky formu, dakle imamo*:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 14 \\ 2 & 17 & -5 \\ 14 & -5 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Prvo trebamo riješiti sustav $Ly = b$.
To je sustav s donje trokutastom matricom i rješava se supstitucijom unaprijed. Na taj način dobijemo y.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 14 \\ -101 \\ 155 \end{bmatrix}.$$

U drugom koraku trebamo riješiti $L^T x = y$.
Ovo je opet trokutasti sustav, samo s gornjetrokutastom matricom pa supstitucija ide unatrag i dobijemo x.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -27 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Varijante Cholesky agoritma

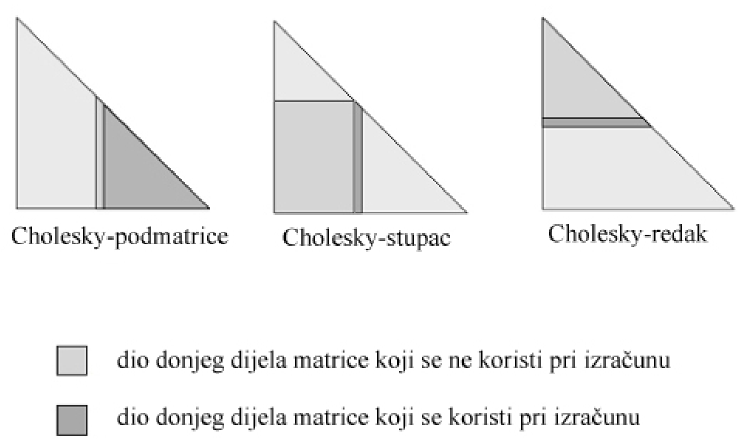
Kako je Cholesky faktorizacija definirana za simetrične matrice, koristeći to svojstvo možemo pristupati samo donjem trokutu matrice po recima ili stupcima, po želji. U ovisnosti kako su i, j i k petlje poredane postoji nekoliko varijanti algoritma klasičnog Choleskog i svi su izvedeni iz jednakosti $A = LL^T$. Svaki izbor i, j ili k indeksa u vanjskoj petlji daje različiti Cholesky algoritam nazvan po dijelu matrice koji se ažurira (tj. izmjenjuje) osnovnim operacijama u unutarnjoj petlji. Šest verzija Cholesky faktorizacije proizlaze iz permutacija i, j i k petlji prema literaturi [4] primjereno nazvanih ijk, ikj, jik, jki, kij, i kji oblici algoritma. Pregled je napravljen prema literaturi [4] i [6].

Definirat ćemo sljedeće tri varijante Cholesky faktorizacije:
Cholesky faktorizacije pomoću podmatrica. Podmatrične izmjene stupcaca od L primjenjuju se jedan po jedan na preostalu podmatricu. Ova metoda se naziva i simetrična faktorizacija pomoću tenzorskog produkta.

Cholesky faktorizaciju koristeći stupce dane matrice. Stupci Cholesky faktora računaju se jedan po jedan koristeći prethodno izračunati stupac. Ova metoda se naziva i simetrična faktorizacija pomoću skalarnog produkta.

Cholesky faktorizaciju koristeći retke dane matrice. Reci u Cholesky faktoru računaju se jedan po jedan. Ova metoda se ponekad naziva i granična metoda.

Slika 1 ilustrira ove tri varijante Cholesky faktorizacije.

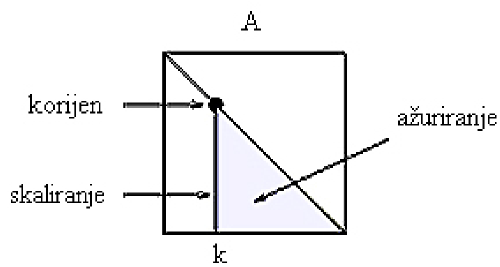


Slika 1: Tri varijante Cholesky faktorizacije

3.2.1 Cholesky dekompozicija koristeći podmatrice

Prilikom izmjene k-tog stupca Cholesky faktora moramo mijenjati unose u podmatrici preostalih $n-k$ stupaca matrice. Intuitivno ovaj algoritam počinje iz gornjeg lijevog kuta matrice L i nastavlja računati matricu stupac po stupac. Ovakva faktorizacija je u literaturi poznata i kao Cholesky-Crout algoritam.

Slika 2 ilustrira ovakvu Cholesky faktorizaciju.



Slika 2: Cholesky pomoću podmatrica

Algoritam 2. (Cholesky - podmatrice, kij)

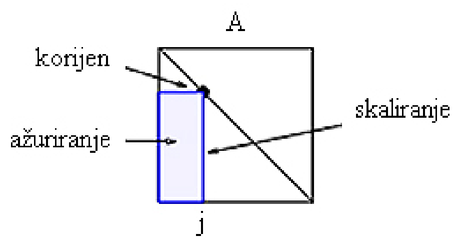
```
do  k = 1  to  n
   A(k,k) = sqrt(A(k,k))
   do  i = k+1  to  n
      A(i,k) = A(i,k)/A(k,k)
      do  j = k+1  to  i
         A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) * A(j,k)
```

3.2.2 Cholesky dekompozicija po stupcima

Ovakva faktorizacija je u literaturi poznata i kao Cholesky-Crout algoritam.

Cholesky - stupac: jik verzija

Ovaj algoritam računa stupce matrice L stupac po stupac. Za računanje j-tog stupca, dio matrice na lijevo od stupca je korišten za ažuriranje trenutnog stupca ("gledajući lijevo" verzija). Slika 3 ilustrira jik Cholesky-stupac algoritam.



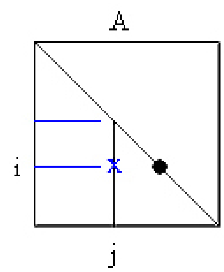
Slika 3: Cholesky faktorizacija koristeći stupce

Algoritam 4. (Cholesky - stupac, jik)

```
do  j = 1  to  n
  do  i = 1  to  n
    do  k = 1  to  j − 1
      A(i, j) = A(i, j) − A(i, k) ∗ A(j, k)
 A(j, j) = sqrt(A(j, j))
 do  i = j + 1  to  n
  A(i, j) = A(i, j)/A(j, j)
```

3.2.3 Cholesky dekompozicija po recima

Ovaj algoritam intuitivno počinje iz gornjeg lijevog kuta matrice L te nastavlja računati matricu redak po redak. Navest ćemo ijk verziju Cholesky-redak algoritma. Izračun i-tog retka zahtijeva pristup prvih i-1 redaka matrice L. Slika 4 ilustrira ijk algoritam Cholesky-redak. Ovakva faktorizacija je poznata u literaturi po imenu Banachiewicz algoritam.



Slika 4: Cholesky faktorizacija koristeći retke

Algoritam 5. (Cholesky - redak, ijk)

`do` $i = 1$ `to` n
  `do` $j = 1$ `to` i
    `do` $k = 1$ `to` $j - 1$
      $A(i,j) = A(i,k) * A(j,k)$
  `if` $(j < i)$ $A(i,j) = A(i,j)/A(j,j)$
   `else` $A(i,i) = sqrt(A(i,i))$

Razmatrani algoritmi se koriste i za tzv. rijetke matrice. Više o tome može se pogledati u literaturi [6].

3.3 Semidefinitan slučaj

Pitamo se da li se faktorizacija Cholesky može primjeniti na semidefinitan slučaj.
Matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivno semidefinitna ako za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $x^T Ax \geq 0$.
Algoritam Cholesky faktorizacije uz izmjene može biti primjenjiv i u semidefinitnom slučaju. U tom slučaju preporuča se pivotiranje.
Kako se vrši pivotiranje?
Da bi očuvali simetriju matrice pivotiranje mora biti "simetrično". To znači da radimo istovremene zamjene redka i stupca u radnoj matrici A. Transformacija ima oblik $A \to P^T AP$, gdje je P matrica permutacije[3] koja opisuje pripadnu zamjenu. Kod takve zamjene, dijagonalni elementi prelaze opet u dijagonalne, a vandijagonalni ostaju izvan dijagonale. Nesređeni radni dio matrice je simetričan i pozitivno definitan u svakom koraku pa se najveći element u cijelom tom dijelu matrice mora nalaziti na dijagonali.
Standardni izbor pivotnog elementa u k-tom koraku je

$$a_{rr}^{(k)} = \max_{k \leq i \leq n} a_{ii}^{(k)}.$$

S tim da se uzima obično najmanji indeks r za koji se ovaj dostiže.
Ovim postupkom dobivamo faktorizaciju Choleskog:

$$P^T AP = R^T R.$$

Više o semidefinitnom slučaju i povotiranju u Cholesky faktorizaciji pogledati u literaturi [3].

3.4 LDL^T faktorizacija

Primijetimo da se u svim gore navedenim algoritmima zahtijeva korjenovanje što ponekad može izazvati poteškoće u daljnjem računanju. Kako bi izbjegli operaciju korjenovanja može se koristiti tzv. Cholesky faktorizacija bez

[3]Kvadratna matrica P je matrica permutacije ako u svakom retku i svakom stupcu ima točno jednu jedinicu, a sve ostalo su nule. Matrice permutacije su ortogonalne matrice, tj. $P^T P = PP^T = I$ što znači da su nesingularne.

korijena gdje se proizvoljna simetrična matrica A može predstaviti u obliku produkta $A = LDL^T$ gdje je L donje trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, a D dijagonalna matrica. Pregled je napravljen prema literaturi [10].

LDL^T varijanta zahtjeva isti prostor i računsku složenost pri korištenju kao i klasična Cholesky faktorizacija, ali izbjegava korjenovanje. Neke matrice za koje ne postoji Cholesky faktorizacija mogu imati LDL^T faktorizaciju s negativnim unosima na D.

Ako je matrica A simetrična, ali ne nužno pozitivno definitna, tada Cholesky algoritam neće biti valjan. U tom slučaju slijedimo LDL^T faktorizaciju. Pokazat ćemo kako izgleda dana faktorizacija u slučaju kada je matrica A reda tri.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LDL^T$$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk}$$

$$l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk}) \times (\frac{1}{d_{jj}})$$

Jednadžbu $Ax = b$ zapišemo u obliku $LDL^T x = b$, a rješenje sustava dobivamo rješavanjem tri linearna sustava:

Definiramo $L^T x = y, \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k, \quad$ za $i = n, n-1, ..., 2, 1.$

Također definiramo $Dy = z, \quad y_i = \frac{z_i}{d_{ii}}, \quad$ za $i = 1, 2, ..., n.$

Polazna jednadžba postaje $Lz = b, \quad z_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} z_k, \quad$ za $i = 1, 2, ..., n.$

Prvi i treći sustavi su trokutrasti s jediničnom dijagonalom pa u supstitucijama nema dijeljenja, a srednji sustav je dijagonalan i rješava se trivijalno sa samo n dijeljenja. Time imamo uštedu od n dijeljenja s obzirom na trokutaste sustave u faktorizaciji Choleskog.

4 Primjena Cholesky dekompozicije

U vrednovanju portfelja[4] pretpostaviti da su cijene povrata dionica nezavisne je "prejaka" pretpostavka, jer u praksi, dionice povrata često pokazuju visok stupanj korelacije. Stoga je potrebno simulirati korelirane slučajne povrate. Prvo ćemo napraviti kratki pregled korelacije i srodnih pojmova.

4.1 Kovarijanca i korelacija

Neka su X_1 i X_2 dvije slučajne varijable. Tada je kovarijanca od X_1 i X_2 definirana na sljedeći način:

$$Cov(X_1, X_2) := E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]$$

Korelacija između X_1 i X_2 definirana je kao:

$$Corr(X_1, X_2) = \rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

Ako su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable, tada je $\rho = 0$, općenito obrat ne vrijedi.

Pretpostavimo da je $\mathbf{X} = (X_1, .., X_n)$ slučajan vektor. Tada je Σ, matrica kovarijanci od $\mathbf{X}$, $n \times n$ matrica kojoj je (i, j)-ti element dan s

$$\Sigma_{i,j} := Cov(X_i, X_j).$$

Svojstva matrice kovarijanci:

1. Simetrična, $\Sigma^T = \Sigma$,

2. Za dijagonalne elemente vrijedi $\Sigma_{i,i} \geq 0$,

3. Pozitivno semidefinitna je $x^T \Sigma x \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.

Matrica kovarijanci izražava linearan odnos između varijabli. Sada ćemo vidjeti kako simulirati korelirane slučajne varijable.

[4]Portfelj je skup financijskih sredstava koje neki pojedinac ili poduzeće posjeduje. Može se sastojati od novca (gotovina, depoziti...) i od vrijednosnih papira (dionice, obveznice...).

4.2 Generiranje slučajnih brojeva sa specifičnim distribucijama

Mnogi problemi u financijama nemaju eksplicitna rješenja. U tim slučajevima pokazalo se da će strategije rješenja bazirane na simulacijama često biti korisne. Na primjer, većina modela imovina i obveza se oslanjaju na simulacijska rješenja; simulacije se također koriste u računanju naprednih mjera rizika na tržištu i kreditnih rizika; cijene složenih opcija oslanjaju se na simulacije; pa čak i portfolio optimizacija može imati koristi od rješenja baziranih na simulacijama. Simulacije modela mogu biti korištene kao sredstvo za testiranje (vidi literaturu [7]).

Simulacija i vrednovanje financijskih instrumenata zahtjeva brojeve sa specifičnim distribucijama. Primjena Cholesky faktorizacije preuzeta je iz literature [9].

Definicija 4.1 *(uzorak iz distribucije)*
Niz brojeva naziva se uzorak iz F ako su ti brojevi nezavisne realizacije slučajne varijable s funkcijom distribucije F.

4.2.1 Normalno distribuirane korelirane slučajne varijable

U mnogim primjenama potrebno je da slučajne varijable ovise jedne o drugima na propisan način. Najprije se prisjetimo opće n-dimenzionalne funkcije gustoće.
Multivarijantna normalna distribucija:

$$\mathbf{X} = (X_1, .., X_n), \quad \mu = EX = (EX_1, ..., EX_n).$$

Matrica kovarijanci od X je Σ i ima elemente:

$$\Sigma_{ij} = (CovX)_{ij} := E((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)), \quad \sigma_i^2 = \Sigma_{ii}, \quad \text{za } i, j = 1, ..., n.$$

Koristeći ovaj zapis koeficijenti korelacije su:

$$\rho_{ij} := \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (\Rightarrow \rho_{ii} = 1) \qquad (4.2.1.1.)$$

koji postavljaju matricu korelacije. Matrica korelacije je skraćena verzija od Σ.
Funkcija gustoće $f(x_1, ..., x_n)$ odgovara $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(\det\Sigma)^{1/2}} exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\}. \qquad (4.2.1.2.)$$

U teoriji matrica kovarijanci Σ je simetrična i pozitivno semidefinitna. U slučaju $\det\Sigma \neq 0$ je pozitivno definitna, što ćemo pretpostaviti sada.

U nastavku ćemo trebati faktorizirati matricu Σ u $\Sigma = AA^T$ što je upravo Cholesky faktorizacija dane matrice A.

4.2.2 Transformacija

Pretpostavimo da trebamo dobiti normalnu slučajnu varijablu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Jednostavno ju možemo dobiti transformacijom $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$ koristeći Cholesky faktorizaciju matrice Σ.
Pretpostavimo $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$ i $x = Az$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, gdje je z realizacija od Z, 0 je nul-vektor, a I jedinična matrica.

Može se pokazati da je AZ normalno distribuirano s $AZ \sim \mathcal{N}(0, AA^T)$.
Uz oznaku $\Sigma = AA^T$ implicira $AZ \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$.
Uz dani vektor μ, $\mu + AZ \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Vidimo iz

$$exp\{-\frac{1}{2}z^T z\} = exp\{-\frac{1}{2}(A^{-1}x)^T(A^{-1}x)\} = exp\{-\frac{1}{2}x^T A^{-T} A^{-1} x\}$$

I iz $dx = |\det A| dz$ da je

$$\frac{1}{|\det A|} exp\{-\frac{1}{2}x^T (AA^T)^{-1} x\} dx = exp\{-\frac{1}{2}z^T z\} dz.$$

Vrijedi i za proizvoljne regularne matrice A. Za potpunu transformaciju trebamo matricu A takvu da je $\Sigma = AA^T$. Tada je $|\det A| = (\det\Sigma)^{1/2}$. S obzirom na gustoću $f(x)$ definiranu u (4.2.1.2.), AZ je normalno distribuirano s $AZ \sim \mathcal{N}(0, AA^T)$ time faktorizacija $\Sigma = AA^T$ implicira

$$AZ \sim \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Konačno, vektor μ implicira

$$\mu + AZ \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma).$$

Primjena :
Pretpostavimo da trebamo normalnu slučajnu varijablu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ za dani vektor μ i matricu kovarijanci Σ. To je vrlo jednostavno na temelju Cholesky faktorizacije matrice Σ. Prema tome željena slučajna varijabla može se dobiti sljedećim algoritmom:

1. Izračunajte Cholesky faktorizaciju $AA^T = \Sigma$
2. Izračunajte $Z \sim \mathcal{N}(0, I)$ po komponentama $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, , n$
3. $\mu + AZ$ ima željenu distribuciju $\sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

Poseban slučaj za $n = 2$:
U ovom slučaju s obzirom na (4.2.1.1.) samo jedan korelacijski broj sudjeluje, tj. $\rho = \rho_{12}\rho_{21}$ i matrica kovarijanci mora biti oblika

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Dakle mi Cholesky transformacijom možemo transformirati set nekoreliranih varijabli u varijable s danom kovarijancom.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] J. Demmel, *Applied numerical linear algebra*, MIT, 1996.

[3] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1996.

[4] A. George, *Parallel Cholesky factorization on a multiprocessor*, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1984.

[5] V. Hari, *Linearna algebra*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematiki odjel, 2005.

[6] M. T. Heath, *Parallel Numerical Algorithms, Cholesky Factorization*, Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign, 11-14.

[7] K. Nyholm, *Strategic Asset Allocation inFixed-Income Markets*, John Wiley & Sons Ltd, England, 2008.

[8] M. Orlović, *Investicijska analiza, efikasna diverzifikacija*, Istraživački rad, Zagreb, 2009.

[9] R. Seydel, *Tools for Computational Finance*, Universitext, Springer, London, 2012.

[10] I. P. Stanimirović, *Algoritmi za simbolička matrična izračunavanja i optimizaciju*, Doktorska disertacija, Niš, 2012.

[11] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2010.

Sažetak

U ovom radu smo pokazali kako matrične faktorizacije pojednostavljuju daljnja računanja, bilo teoretska ili praktična. Posebno smo se posvetili Cholesky faktorizaciji, koja je definirana za posebnu klasu matrica tj. za pozitivno definitne simetrične matrice u realnom slučaju odnosno za hermitske matrice u kompleksnom slučaju. Sama Cholesky faktorizacija matrice omogućuje vrlo jednostavno rješavanje linearnih sustava jednadžbi. Naveli smo i varijante klasičnog Cholesky algoritma. Također smo pokazali kako se na temelju Cholesky faktorizacije mogu generirati slučajni brojevi te se jednostavno dobiti normalna slučajna varijabla $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ za dani vektor μ i matricu kovarijanci Σ. Sama matrica varijanci se koristi u financijama za rizik portfelja.

Cholesky decomposition and its applications in finance

Summary

In this work we show how matrix decomposition simplify further computing, whether they are theoretical or practical. In particular, we are dedicated to Cholesky factorization, which is defined for a special class of matrices, i.e. for positive definite symmetric matrix in real case or for Hermitian matrix in a complex case. Cholesky factorization of the matrix allows very simple solving linear systems of equations. We have named the variants of classic Cholesky algorithm. We have also showed how to use the Choelsky factorization to generate random numbers and easily get a normal random variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ for a given vector μ and covariance matrix Σ. Variance matrix is used in finance to evaluate the portfoilo risk.

Životopis

Rođena sam 16.6.1987. godine u Osijeku. Nakon osnovne škole 2002. g. upisujem Opću gimnaziju u Osijeku gdje po završetku upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za metematiku. Od 2010. g. sam student diplomskog studija matematike, smjer: Financijska i poslovna matematika.