Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Gusak

Igre na sreću

Diplomski rad

Osijek, 2010.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ana Gusak

Igre na sreću

Diplomski rad

Voditelj: prof. dr. sc. Antoaneta Klobučar

Osijek, 2010.

Sadržaj

Uvod

Nije pogrešno reći da su igre na sreću starije od povijesti. Naime, od kad postoji čovijek, postoji i njegovo zanimanje za vlastitu sreću. Kako se kombinatorika kao znanost razvila upravo iz igara na sreću, u prvom dijelu rada su prikazane igre na sreću kroz povijest te utjecaj pojedinih matematičara na razvoj kombinatorike.
U drugom poglavlju pokazani su dijelovi knjiga matematičara iz 16., 17. i 18. st. Riječ je o djelima koja su najviše doprinjela razvoju kombinatorike.
Treći dio rada donosi današnju kombinatoriku u igrama na sreću te je kroz primjere pokazano kako računti kombinacije i permutacije sa i bez ponavljanja.
Poslijednji dio rada govori o konkretnim primjenama kombinatorike na igre na sreću te o izračunima kombinacija i vjerojatnosti dobitaka u tim igrama.

Poglavlje 1

Igre na sreću

1.1 Povijest igara - nastanak kombinatorne vjerojatnosti

Zanimanje ljudskih bića za vjerojatnost i sreću potječe iz pretpovjesnih vremena. Astragaloi, kockice izrađene od životinjskih kostiju, datiraju iz 3600 pr.n.e. Načinjene su od posebnih kostiju papaka ovaca, koje imaju dvije zaobljene plohe i četiri kvadrata gotovo jednakih veličina.

Slika 1. Astragaloi, 3600 pr.Kr.

Kada je pračovjek igrao tako primitivnim kockicama, počevši od prapovijesti sve do grčkih i rimskih vremena, igre su bile klađenja na 4 moguća ishoda (zanemarujući dvije zaobljene plohe jer se na njima kockica nije mogla zaustaviti). U ranoj su se antici Egipćani i Babilonci kockali astragaloima, kao i Rimljani, dok su Etruščani koristili ikozaedre (tijelo s 12 ploha) s peterokutnim plohama, tisuću godina prije početka nove ere. Današnja, šestostrana kockica, u upotrebi je od 2000 p.n.e. Prema rimskom povjesničaru Suetoniusu, car Augustin (63 p.n.e. - 14 n.e) bio je strastveni kockar. Igrao je igru u kojoj su se bacala 4 astragola, a pobjednik je onaj igrač koji prvi baci "Venus", odnosno sva četiri različita broja (slike). Kockarske igre su bile omiljene i u drevnoj Kini te Indiji. Indisjki su matematičari u 3 st. p.n.e. rješavali određena pitanja vjerojatnosti, uglavnom iz religioznih razloga. Zanimljivo je da starogrčki matematičati, poput Pitagore i Euklida, nisu posvetili ni malo vremena razmisljući o slučajnosti i vjerojantosti. Pretpostavlja se da su smatrali da nije vrijedno truda uvoditi slučajnost u matematiku. U grčkim se matematičkim spisima kocka spominje uglavnom kao učilo, pomoću kojeg se uči aritmetika, zbrajanje točaka. Rasprava o slučajnosti nema.

Talijaski matematičar, **Girolamo Cardano** (1501. - 1576.) napisao je knjigu ”Liber de ludo aleae” (Knjiga o bacanju kocke) u kojoj se bavi problemom izračuna vjerojatnosti dobitka.

Slika 2. Girolamo Cardano, 16. st.

Kako je i sam bio kockar, u knjizi daje preporuke kako varati. O igraćoj kocki je napisao: *”Svaka polovica stranica kocke pojavljuje se jednako često.. Na primjer, ja mogu jednako lako baciti kockom 1, 3 ili 5, kao što mogu baciti 2, 4 ili 6.”* Izračunao je da je vjerojatnost pojavljivanja svakog broja na kocki tj. svake strane 1/6 i upozorio je da to vrijedi samo kod ispravne, tj. *”poštene igraće kocke”*. Knjiga o bacanju kocke je jedno od prvih matematičkih djela o kombinatornoj vjerojatnosti, i tu se nalazi klasična definicija vjerojatnosti kao omjera broja povoljnih i broja mogućih ishoda. Veliki propust za razvoj matematičke vjerojatnosti leži u tome što je ova knjiga objavljena tek 1663. godine (87 godina nakon Cardanove smrti).

Cardanovo otkriće o vjerojatnosti pojavljivanja svake strane kocke vrlo se brzo proširilo među matematičarima, i **Galileo Galilei** (1564.-1642.), koji je objavio svoja *”Razmišljanja o igrama kockom”* 1620., posvetio je dio svog rukopisa vjerojatnosti različitih ishoda ako se igra dvjema kockama: *”Budući da igraća kocka ima šest strana, kada je bacimo, ona može pasti na bilo koju stranu . . . Ali ako zajedno s prvom kockom bacimo i drugu kocku, koja također ima šest strana, možemo dobiti 36 različitih ishoda, jer svaka strana prve kocke može se kombinirati sa svakom stranom druge kocke . . . što čini 6 puta 6, tj. 36 kombinacija.”*

Nastanak teorije vjerojatnosti smještamo u 17. stoljeće, kad su uspostavljeni temelji kombinatorne teorije vjerojatnosti u dopisivanju Pascala i de Fermata. Kasnije je njihove rezlutate prikupio i dopunio Christiaan Huygens, a u potpuno sređenom obliku kombinatornu vjerojatnost prikazuje Jacob Bernoulli 1713. godine.

Osnova matematičke teorije vjerojatnosti pojavila se kao rezultat neobične suradnje kockara i matematičara. Kockar Chavalier de Mere, mnogo novca zaradio je kladeći se da će kod 4 bacanja igrače kocke šestica pasti barem jedanput. On je pri tome rezonirao ovako:*"...ako kocku bacim jedanput, vjerojatnost šestice iznosi* 1/6*, ako je bacim dvaput, vjerojatnost je dva puta veća, dakle 2/6, ako je bacim triput, vjerojatnost iznosi* 3/6 (50 : 50)*, a ako je bacim četiri puta, vjerojatnost je* 4/6*"*. Iako njegov račun nije bio točan (jer po toj logici vjerojatnost kod 6 bacanja bila bi 6/6, dakle 1, što znači apsolutnu sigurnost!), on je ipak zaradio na toj igri veliku svotu novaca, jer stvarna vjerojatnost da će od četiri bacanja šestica pasti bar jedanput iznosi 0.52, dakle u ovom slučaju vjerojatnost dobitka je u njegovu korist. Nakon toga de Mere je smislio novu igru: kladio se da će pomoću dvije kocke u 24 bacanja baciti barem jedanput imati sumu 12 (tj. dvije šestice). Rezonirao je na isti (pogrešan) način: ako je kod jednog bacanja dvije kocke vjerojatnost dvije šestice 1/36 (što je točno), onda će kod dva bacanja vjerojatnost biti 2/36 (što više nije točno), kod 3 bacanja 3/36 ... itd., a kod 24 bacanja 24/36 ili 2/3, pa to znači da je vjerojatnije da ću dobiti, nego izgubiti. Na njegovu nesreću to nije točno, i igrajući veliki broj ovih igara - izgubio je golem imetak, te se, 1654. godine, sav očajan za pomoć obratio slavnom matematičaru, filozofu i fizičaru **Blaise Pascalu** (1623.-1662.). Pascal je pisao starijem i iskusnijem matematičaru i pravniku **Pierru de Fermatu** (1601.-1665.) te su u 5 pisama proučili kockarske probleme: *problem dvije kocke i problem podjele uloga.*

Problem dvije kocke (isplati li se kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica) je za obojicu bio lako rješiv. Vjerojatnost da će u jednom bacanju pasti par šestica je $\frac{1}{36} \approx 2,78\%$ jer je samo jedna kombinacija, od 36 mogućih, odgovarajuća. Stoga, vjerojatnost da u jednom bacanju neće pasti par šestica je jedanka $p = \frac{35}{36} \approx 97,22\%$. Kako je svako bacanje nezavisno od prethodnog, za dobivanje vjerojatnosti da u n bacanja niti jednom ne padne par šestica, p treba n puta pomnožiti sam sa sobom: $P = p^{24} = (\frac{35}{36})^{24} \approx 50,86\%$. Dakle, P je vjerojatnost da u 24 bacanja niti jednom ne padne par šestica. Vjerojatnost da bar jednom padne par šestica je $1 - P \approx 49,14\%$. Zaključak je da se ne isplati kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica.

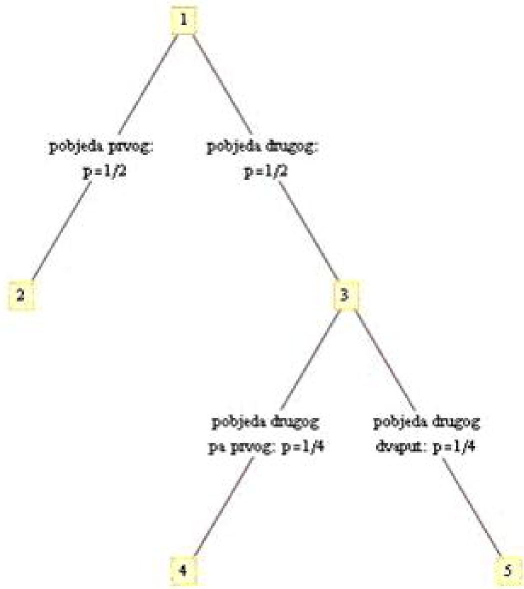
Drugi problem je problem podjele uloga: kako raspodjeliti uloge u slučaju prijevremeno prekinute igre na sreću, u kojoj u niti jednom krugu nema neodlučenog ishoda, a pobjednik je onaj koji prvi pobijedi u određenom broju krugova. Ovaj problem izazvao je veću komuniakciju dvaju matematičara, u kojoj su se oba složili oko točnog rješenja, ali s različitim dokazima.

1.2 Pascal - problem podjele uloga

Prije Pascala i de Fermata, ovakvm pitanjima bavili su se i Pacioli, Tartaglia i Cardano, no bez uspješnog rješenja.

Slika 3. Blaise Pascal, 17. st.

Pascal je u svom rješenju ovog problema zamislio da se igra nastavila i razmotrio vjerojatnost različitih varijanti daljnjeg razvoja igre. Također, smatrao je ako je igra poštena oba igrača imaju jednako pravo očekivati da osvoje slijedeći bod. Ako je igra prekinuta u trenutku kad prvom igraču do pobjede fali n bodova, a drugom m, znači da bi igra bila odlučena za najviše $n + m - 1$ krugova. Npr. ako je igra prekinuta pri stanju 9 : 8, a za pobjedu treba 10 (dakle, $n = 1$, $m = 2$) igra će završiti nakon najviše dva kruga - nakon jednog ako u njemu pobijedi prvi (10 : 8), nakon dva ako u prvom krugu pobijedi drugi (nakon prvog kruga bi tada stanje bilo 9 : 9 i odluka pad u idućem krugu). Najbrže je igra gotova ako zaredom pobjeđuje onaj kojemu je ostalo manje do dobitka, odnosno $min(m, n)$. Suprotno, igra će najduže trajati ako igrači naizmjenično dobivaju i slabiji još dobije onoliko puta koliko je razika između njega i boljega. *Slika 4.* prikazuje pravednu raspodjelu uloga za stanje 9 : 8 u trenutku prekida igre. Vidljivo je da je pravedna raspodjela uloga tada 3 : 1.



Slika 4. Mogući razvoj igre (po Pascalu) prekinute pri stanju 9:8, ako za pobjedu treba 10 bodova.

Pascalov aritmetički trokut je danas trokutasta tablica binomnih koeficijenta, a Pascal ju je zapisivao kao pravokutnu. Vezu između Pascalova trokuta i podjele uloga će nam u slijedećem odjeljku dati Fermat.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
$\vdots$				$\vdots$				$\vdots$

Slika 5. Pascalov aritmetički trokut - pravokutna tablica i suvremeni oblik pascalova trokuta

Ako za Pascalovu pravokutnu tablicu indeks retka promatranog broja označimo s i, a indeks njegova stupca s j, te ako je broj u i-tom retku i j-tom stupcu jednak $p_{i+1,j+1}$ pravilo kojim se zbrajanjem dobivaju glasi

$$p_{i+1,j+1} = p_{i+1,j} + p_{i,j+1}.$$

Iz toga slijedi da je $p_{i+1,j+1} = \sum_{k=1}^{i+1}(p_{k,j})$ tj. svaki broj je jednak zbroju brojeva u stupcu lijevo od njega od prvog do njegovog retka. Npr. pogledajmo *Sliku 5.* Broj 10 (u 3. stupcu, 4. retku) jednak je zbroju brojeva iz drugog stupca (tj. stupac koji je lijevo od broja 10) od prvog do retka u kojem je broj 10 (4. redak). Odnosno, $10 = 4 + 3 + 2 + 1$.

Danas kažemo: broj $p_{i+1,j+1}$ je binomni koeficijent $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$; otuda je Pascalov trokut tablica binomnih koeficijenata.

1.3 De Fermat - problem podjele uloga

Slika 6. Pierre De Fermat, 17.st

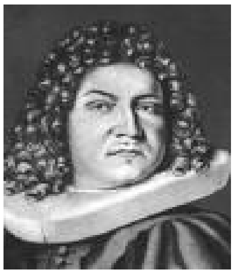
Vezu s Pascalovim trokutom otkrio je de Fermat. U pismu Pascalu iz kolovoza 1654. kaže da ako prvom igraču do pobjede fale 2 boda, a drugom 3, možemo uzeti dva slova (a za pobjedu prvog i b za pobjedu drugog) i promotriti svih 16 kombinacija riječi od 4 slova (što odgovara 4 kruga igre, odnosno maksimalnoj dužini trajanja igre) koje možemo iz njih oblikovati: *aaaa*, *aaab*, *aaba*, *aabb*, *abaa*, *abab*, *abba*, *abbb*, *baaa*, *baab*, *baba*, *babb*, *bbaa*, *bbab*, *bbba*, *bbbb*. Svaka kombinacija s bar dva a predstavlja situaciju u kojoj pobjđuje prvi igrač, a one s bar tri b su u korist drugog igrača. Slijedi da je 11 slučajeva koji daju pobjedu za prvog, a 5 za drugog, tj. u opisanom slučaju ulog treba raspodijeliti u omjeru 11 : 5. S obzirom da se radi o kombinacijama, očita je upotreba Pascalova trokuta, kojim se izbjegava ispisivanje svih kombinacija. U navedenom slučaju treba pogledati peti redak Pascalova trokuta (zapisanog na suvremeni način) $1, 4, 6, 4, 1$. Ti brojevi redom kažu u koliko nizova (duljine 4 sastavljenih od slova a i b) imamo a točno 4, 3, 2, 1, 0 puta (prvi pobjedi u sva 4 kruga samo u 1 slučaju, prvi pobjedi ukupno 3 kruga u 4 slučaja, prvi pobjedi ukupno 2 kruga u 6 slučajeva, prvi pobjedi u točno 1 krugu u 4 slučaja, prvi ne pobijedi nijednom u 1 slučaju). Kako za konačnu pobjedu prvog on treba pobijediti u bar 2 kruga, povoljni za prvog su slučajevi s ukupno 4, 3 ili 2 slova a, a njih ima ukupno $1 + 4 + 6 = 11$; za drugog su povoljna preostala dva slučaja (slovo a jednom ili nijednom u nizu), a njih ima $4 + 1 = 5$. Stoga je omjer u kojem treba podijeliti uloge 11 : 5.

Na ovaj način uvedena je binomna razdioba koja opisuje vjerojatnosti uspjeha u ponovljenom pokusu koji ima samo dva moguća ishoda. Ako je p vjerojatnost uspjeha, a $q = 1 - p$ neuspjeha, vjerojatnost da će od n pokusa točno k biti uspješno (a $n - k$ nesupješno) jednaka je k-tom članu binomnog razvoja od $(p + q)^n$:

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

1.4 Huygens, J. Bernoulli, de Moivre

Christiaan Huygnes (1629.-1695.), nizozemski matematičar, astronom i teorijski fizičar, čuo je za rad Fermata i Pascala te se i sam zainteresirao za problem podjele uloga. Rješavajući ga, došao je do rješenja koje je bilo u skladu s Pascalovim, te je na temelju Pascalovih i de Fermatovih rezultata 1657. objavio knjigu *"De ratiociniis in ludo aleae"*. To je bila prva matematička knjiga o vjerojatnosti u povijesti. U tom djelu Huygens koristi riječ očekivanje za "pravednu nagradu za koju bi igrač predao svoje mjesto u nekoj igri". Kasnije će se taj pojam precizirati.

Slika 7. Christiaan Huygens, 17.st. i Jacob Bernoulli 17./18.st.

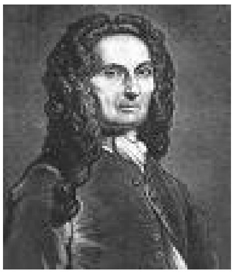
Stariji od dvojice braće **Bernoulli, Jacob** (1654.-1705), godine 1685. objavio je prve značajne rezultate iz teorije vjerojatnosti, a četiri godine kasnije i **(Bernoullijev) zakon velikih brojeva**: ako pokus ponovimo dovoljno mnogo puta relativna frekvencija (broj povoljnih ishoda podijeljen s brojem izvedenih pokusa) je jednaka vjerojatnosti uspjeha. Najoriginalnije djelo mu je *Ars Conjectand*i (objavljeno posthumno 1713.). Djelo je ostalo nezavršeno, ali se može smatrati prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti i njime teorija vjerojatnosti postaje zasebna matematička disciplina. U tom djelu se nalazi i filozofski pristup vjerojatnosti, definicije vjerojatnosti *a priori* i *a posterioi*, te prva teorijska diskusija vjerojatnosti kao broja između 0 i 1. *Ars Conjectandi* se sastoji od četiri dijela. U prvom dijelu Bernoulli proširuje Huygensove rezultate. Tu se među ostalim razrađuje i pojam očekivanja, a razrađeni su i pojmovi danas poznati kao *Bernoullijevi pokusi* i *Bernoulijava distribucija*[1]. Drugi dio je posvećen kombinatorici. U njemu se koriste suvremeni pojmovi permutacija i kombinacija (kombinacije je uveo Pascal, permutacije Jacob Bernoulli). Tu se pojavljuju i Bernoullijevi brojevi, a to su

[1]Bernoullijeva distribucija je najjednostvnija diskretna distribucija. Odnosi se na pokuse s dva moguća ishoda $n = 1$ ("uspjeh") i $n = 0$ ("neuspjeh") od kojih se prvi događa s vjerojatnosti p, a drugi s vjerojatnosti $q = 1 - p$. Bernoulijev pokus sastoji se u izvođenju pokusa fiksirane vjerojatnosti uspjeha određeni broj puta. Promatramo li broj uspjeha u određenom broju nezavisnih Bernoullijevih pokusa dobivamo binomnu razdiobu

brojevi oblika B_n gdje je $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_n = 0$ ako je n neparan veći od 1, $B_n = -\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}B_k$.

Treći dio *Ars conjectandi* obrađuje primjenu kombinatorike na vjerojatnost. Četvrti dio je ostao nezavršen, ali je najvažniji dio djela: tu se uočava da se vjerojatnost može odrediti i *a posteriori* iz promatranih frekvencija dogadaja. Pokušava odrediti gornju među za broj pokusa potrebnih da iz rezultata procijenjena vjerojatnost bude "moralno sigurna". Pokazuje da je taj broj vrlo velik: da bi se npr. odredio broj kuglica dvije boje u urni (čiji sadržaj nije vidljiv) sa sigurnočću 99%, potrebno je više od 25500 pokusa vađenja jedne kuglice.

Bernoullijeve rezultate nadopunio je i pojednostavio **Abraham de Moivre** (1667. - 1754.). De Moivre prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjera broja povoljnih i broja mogućih slučajeva, iako su bez definicje to koristili i Pascal i de Fermat.



Slika 8. Abraham de Moivre, 17./18.st.

Njegovo glavno djelo je *"The Doctrine of Chance: a method of calculating the probabilities of events in play"* (Učenje mogućnosti). Zbog svoje važnosti djelo je doživjelo više kasnijih proširenih izdanja, a u knjizi se može naći definicija statističke neovisnosti događaja te niz zanimljivih zadataka vezanih uz razne igre.

1.5 Formaliziranje kombinatorne vjerojatnosti

Nećak Jacoba i sin Johanna Bernoullija, **Daniel Bernoulli** (1700.-1782.) 1760-ih godina prvi uvodi tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti, a svoja je otkrića primjenjivao na pitanjima osiguranja.

Thomas Bayes (1702.-1762.), protestantski svećenik, teoriju vjerojatnosti obrađuje u djelu *"Essay towards solving a problem in doctrine of chances"* (1764.). Bayes je poznat po uvođenju uvjetne vjerojatnosti; vjerojatnost da se dogodi B, ako je poznato da se dogodio A, jednaka je kvocijentu vjerojatnosti da se dogode oba A i B s vjerojatnosti od A:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Jean D'Alembert (1717.-1783.) obrađuje pojam očekivanja: ako su vjerojatnosti događaja s dobicima $k_1, k_2, \ldots$ redom $p_1, p_2, \ldots$ onda je očekivani ukupni dobitak $k_1p_1 + k_2p_2 + \ldots$. D'Alembert se bavio i ruletom te je poznata strategija *d'Alembertov martignal*: predlaže da u svakom krugu igrač treba uložiti dvostruko više. Ukoliko dovoljno dugo igra, to bi garantiralo dobitak iznosa koliko je uložio u prvom krugu. Primjerice, u prvom krugu igrač uloži 1$ na crveno. Ako dobije prekida igru, zaradio je 1$, a ako izgubi u sljedećem krugu uloži 2$. Ako sad dobije zaradio je $2\$ - 1\$ = 1\$$ i prekida igru, a ako opet izgubi, u sljedećem krugu uloži 4$. Ako sad dobije zaradio je $4\$ - 2\$ - 1\$ = 1\$$, a ako opet izgubi u sljedećem krugu ulaže 8$ itd.

Konačno, modernu teoriju vjerojatnosti utemeljio je **Pierre-Simon Laplace** (1749.-1827.) svojim djelom "Theorie Analitique des Probabilities" 1812., koje predstavlja pregled svih dotad poznatih rezultata iz teorije vjerojatnosti, proširene mnogim originalnim Laplacevoivm doprinosima.

Slika 9. Pierre-Simon Laplace, 18./19. st

Upravo Laplace daje prvi jasan pojam vjerojatnosti: ako imamo ukupno m objekata u nekom skupu i ako odaberemo neki njegov podskup od p "povoljnih" objekata, tada je vjerojatnost da nasumce izabran objekt iz čitavog skupa bude "povoljan" jednaka $\frac{p}{m}$.
Ukratko,

vjerojatnost= (broj povoljnih objekata)/(broj svih mogućih objekata).

Na primjer, ako među prirodnim brojevima od 1 do 100 odaberemo nasumce neki broj, kolika je vjerojatnost da taj broj bude paran? Broj parnih brojeva od 1 do 100 ima 50. Broj svih prirodnih brojeva od 1 do 100 ima 100, pa je $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Dakle, vjerojatnost da nasumce odabrani broj bude paran je $\frac{1}{2}$.
Pogledajmo kako bi Laplace riješio problem kockara Chavaliera de Merea iz 17.st.
Što je vjerojatnije, da se u četiri bacanja jedne kocke bar jednom pojavi šestica ili da se u 24 bacanja dviju kocaka bar jedanput pojave dvije šestice?
Označimo s
$A =$ događaj da se u 4 bacanja jedne kocke pojavila bar jedna šestica
$B =$ događaj da se u 24 bacanja dviju kocaka bar u jednom bacanju istovremeno pojave

dvije šestice.

Suprotan događaj od A, u oznaci $\overline{A}$, znači da se ni u jednom od 4 bacanja jedne kocke ne pojavi šestica, pa je

$$vjer(\overline{A}) = vjer(\overline{A_1}) \cdot vjer(\overline{A_2}) \cdot vjer(\overline{A_3}) \cdot vjer(\overline{A_4}),$$

gdje je $\overline{A_i}$ događaj da se u i-tom bacanju ne pojavi šestica, $i = 1, 2, 3, 4$, a događaji $\overline{A_i}$ su međusobno nezavisni. Očito je $vjer(\overline{A_i}) = \frac{5}{6}$, pa je $vjer(\overline{A}) = (\frac{5}{6})^4$. Slično je $vjer(\overline{B}) = (\frac{35}{36})^{24}$.

Stoga je

$$vjer(A) = 1 - vjer(\overline{A}) = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0,51$$

$$vjer(B) = 1 - vjer(\overline{B}) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \approx 0,49.$$

Prema tome, događaj A je vjerojatniji od događaja B.

Poglavlje 2

Značajna djela

2.1 Cardano *"Liber de ludo aleae"*

Kako smo ranije spomenuli, Cardanova knjiga *Liber de ludo aleae* napisana je u 16. stoljeću, a objavljena je 1663. godine. Caradno se bavi problemom kako u igrama na sreću izračunati vjerojatnost dobitka, pa bi se knjiga mogla nazvati i kockarskim priručnikom.

Na samom početku knjige Cardano iznosi svoje zaključke o vrstama igara i uvjetima igre, s kim igrati i kako, te naglašava:
"Pažnja bi se trebala posvetiti stanju igrača i njegova protivnika, te uvjetima pod kojima se igra igra, kao što je količna uloženog novca, mjesto i povod."

"Tvoj protivnik trebao bi biti situiran; a ti bi trebao igrati rijetko i u kratkim periodima, na nekom primjerenom mjestu uz male uloge i u primjerenim prigodama, kao što su domjenci za vrijeme praznika."

U šestom poglavlju Cardano predstavlja temeljno načelo kockanja:
"Najveće temeljno načelo od svih u kockanju su jednostavno ravnopravni uvjeti ... novca, situacije ... i same kocke. Mjera kojom odstupaš od te ravopravnosti, ako je u korist tvog protivnika, lud si, ako je u tvoju korist, nepravedan si."
Cardano smatra da se igre na sreću mogu pravedno igrati samo ako postoje jednako mogući ishodi. Ovo načelo je baza njegove teorije u vezi s mogućim ishodima u igrama s kockom.

Stručna razmatranja teorije vjerojatnosti započinju u devetom poglavlju, gdje se Cardano bavi bacanjem jedne kocke. Polazeći od toga da kocka ima 6 stranica, kaže:
" ... u šest bacanja jedne kocke, svaka stranica bi se trebala pojaviti jedan put; ali budući da će se neke ponoviti, slijedi da se neke neće ni pojaviti."

Razumije da iako su ishodi ravnopravni, u praksi neće vrijediti da se svaki broj pojavi jedan put u šest bacanja jedne kocke. U ovom poglavlju uvodi i pojmove "circuit" (ciklus) i "equality" (jednakost):
"Polovica ukupnog broja stranica uvijek predstavlja jednakost; prema tome vjerojatnost je jednaka da se pojedina stranica pojavi u tri bacanja, cijeli ciklus je završen u šest bacanja, ili opet da se jedna od tri dane stranice pojavi u tri bacanja. Na primjer, jednako lako mogu dobiti jedan, tri ili pet kao dva, četiri ili šest."

Ciklus označava broj mogućih ishoda, što bismo u suvremenoj teoriji vjerojatnosti nazvali veličinom skupa svih mogućih ishoda.

Cardano u 11. poglavlju uzima u obzir i računa vjerojatnost u slučaju bacanja dvije kocke. Točno nabraja različita moguća bacanja, odnosno broj mogućih ishoda.
"U slučaju bacanja dvije kocke postoji šest bacanja s istim stranicama i petnaest kombinacija s različitim licima, što kad se udvostruči daje trideset, tako da ukupno postoji trideset i šest bacanja, a polovina mogućih rezultata daje osamnaest."

Zanimljivo je da Cardano u ovom trenutku na daje nikakvo objašnjenje ili tablicu radi lakšeg razumijevanja njegove teorije. Ako moguće ishode bacanja dvije kocke prikažemo kao parove brojeva, bacanja s istim licima su: $(1, 1)$, $(2, 2)$,$\dots$, $(6, 6)$, ukupno šest, a s različitim licima: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $\dots$, $(5, 6)$, ukupno petnaest i na kraju $(2, 1)$, $\dots$, $(6, 5)$ još petnaest. Znači ukupno, kao što i Cardano navodi, trideset i šest mogućih ishoda. Svaki od tih parova jednako je vjerojatan i vjerojatnost je $\frac{1}{36}$.

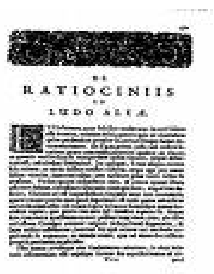
Zanima ga i vjerojatnost za pojavljivanje određenog broja, npr. broja jedan u bacanju dvije kocke:

"Broj bacanja tako da se barem u jednom pojavi broj jedan je 11/36 ili malo više od pola jednakosti; a u slučaju bacanja dva puta dvije kocke broj mogućnosti za dobivanjem barem jedne jedinice dva puta, viša je od 1/6, ali manje od 1/4 jednakosti." .

2.2 Huygens *"De ratiociniis in ludo aleae"*

Na temelju Pascalovih i de Fermatovih rezulatata, te s vlastitim doprinosom, Huygens je 1657. objavio knjigu *"De ratiociniis in ludo aleae"* što je prva[2] matematička knjiga o vjerojatnosti u povijesti.

[2]Cardanova knjiga se ne smatra prvom, iako je prva napisana, jer je objavljena 87 godina nakon njegove smrti, odnosno tek 1663. godine


RATIOCINIIS

LUDO ALEÆ

Slika 10. Knjiga *"De ratiociniis in ludo aleae"*

Propozicija I.

Ako očekujem a *ili* b*, a imam jednake šanse za dobivanje bilo kojeg od njih, moje očekivanje vrijedi* $\frac{a+b}{2}$.

Ako sa x označim vrijednost mojih očekivanja, mora biti moguće sa x dobiti jednako očekivanje u poštenoj igri. Pretpostavim da igram s nekim pod ovim uvjetom, te da će svaki on nas staviti ulog x, a onaj koji pobijedi, daje gubitniku a. Igra je poštena, i imam šanse za dobiti a, ako izgubim igru; ili $2x - a$ ako pobijedim. Tada imam cijeli ulog $2x$, od kojeg plaćam mog suparnika a. A ako $2x - a$ treba biti jednako b, tada imam jednake šanse za dobiti a ili b. Stavim da je $2x - a = b$,i imam $x = \frac{a+b}{2}$, za vrijednost mojih očekivanja. Q.E.I.

Propozicija III.

S p *ću označiti šanse koje imam da pobijedim* a*, a šanse koje imam da pobijedim* b*, označit ću s* q*. Pretpostavljam da su šanse jednake pa će moje očekivanje tada biti* $\frac{ap+bq}{p+q}$.

Da bi pokazao ovo pravilo, s x ću označiti vrijednost mog očekivanja, i pretpostavljam da je igra poštena. Uzimam broj igrača, uključujući i mene, takav da je jedank $p + q$, svačiji ulog je x, i sada je ukupni ulog $px + qx$. Svi igrači imaju jednake šanse za pobijedu. Slažem se da, ako bilo tko od igrača q dobije, meni daje b, a ako ja dobijem njima dajem b. A za ostatak, prikazan kao $p - 1$ imam sličan dogovor; tko god pobijedi meni daje a, a ako ja pobijedim, njima dajem a. Očito je ovo fer igra; moje očekivanje za b je q, moje očekivanje za a je $p - 1$, a moje očekivanje za $px + qx - bq - ap + a$ jedanko je 1. Tada dobivam cijeli ulog $px + qx$, od kojeg moram dati b svim q igračima i a svim $p - 1$ igračima, što je zajedno $bq + ap - a$. Ako je $px + qx - bq - ap + a$ jednako a, tada imam p očekivanja od a i q očekivanja od b i očigledno dolazim do mog početnog očekivanja; $px + qx - bq - ap + a$ i $x = ap + bq$ je vrijednost mog očekivanja. Q.E.I.

Propozicija V.

Pretpostavljam da do pobijede meni treba 1 *bod, a mom suparniku* 3*. Kako ćemo podijeliti ulog?*

Razmotrit ću što će biti posljedica; ako ja dobijem slijedeći bod sav ulog je moj, označim ulog sa a, a ako slijedeći bod dodije moj suparnik , on još uvijek treba 2 boda do pobjede, a ja 1. U ovom slučaju bi moj udio bio $\frac{3}{4}a$. Kako ja imam jednake šanse za dobiti a, i $\frac{3}{4}a$, moja očekivanja po *Propoziciji 1.* moraju biti jednaka $\frac{7}{8}a$, a moj protivnik dobiva preostali dio, tj. $\frac{1}{8}a$. Dakle moja šansa naprema njegovoj je 7 : 1. Q.E.I.

Propozicija X.

Koliko mora biti bacanja s jednom kockicom da bi se okrenula šestica.

Ako netko baca kockicu jednom, i želi dobiti 6, jedna je prilika po kojoj bi ostvario svoj ulog, a 5 je mogućnosti po kojima bi se ulog mogao izgubiti, tj. 5 mogućnosti je protiv njega, a 1 za njega. Ulog ću označiti sa a. Budući da je jedno očekivanje za a, a 5 za 0, vrijedi $\frac{1}{6}a$, a za protivnika ostaje $\frac{5}{6}a$. Tako onaj koji se obvezuje da će baciti šesticu iz jednog bacanja, mora položiti 1 : 5. Onaj koji će bacati za šesticu iz dva bacanja, može računati mogućnost na slijedeći način: ako dobije 6 iz prvog baacnja, dobiva ulog a, ako se dogodi suprotno, ima još jedno bacanje koje po prethodnom slučaju vrijedi $\frac{1}{6}a$, vrijednost koje je prema *Propoziciji 3.* $\frac{11}{36}a$ i stoga ostaje $\frac{25}{36}a$ za drugi slučaj. Tako nekoliko šansi ili vrijednosti nekoliko očekivanja snosi postotak od 11 : 25, tj. manje od 1 : 2. Dakle, nakon iste metode šansa za onoga koji bi uložio na to da će baciti šest jednom od tri bacanja, može se istražiti i naći da vrijedi $\frac{91}{216}a$, pa može položiti 91 protiv 125 što je nešto manje od 3 : 4.

Tko se obvezuje da će baciti 6 jednom od četiri bacanja, ima priliku vrijednu $\frac{671}{1296}a$, i može položiti 671 : 625, odnosno nešto više od 1 : 1.

Tko se obvezuje da će baciti 6 jednom od pet bacanja, ima priliku vrijednu $\frac{4651}{7776}a$, i može položiti 4651 : 3125, odnosno nešto manje od 3 : 2.

Tko se obvezuje da će baciti 6 jednom od šest bacanja, ima priliku vrijednu $\frac{31031}{46656}a$, i može položiti 31032 : 15625, malo manje nego 2 : 1. Q.E.I.

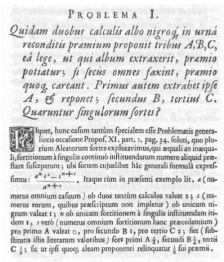
Propozicija XII.

S koliko kockica će jedna osoba sigurno baciti dvije šestice iz jednog bacanja.

To je isto kao da me zanima u koliko bacanja jedne kockice sigurno znam da će pasti 2 šestice. Onaj koji se obvezuje da će u tri bacanja dobiti šesticu, ako se ne dogodi da baci 6 u prvom bacanju, ima još dva bacanja da se to dogodi, koji kao i prije vrijede $\frac{1}{36}a$. Ali ako je prvo bacanje šansa za šesticu, ima još dva bacanja da baci još jednu šesticu, što po *Propozicji 10.* vrijedi $\frac{11}{36}a$. Sada imam šansu da bacim jednu šesticu u prvom bacanju, i 5 šansi za suprotno: prije nego bacim imam jednu šansu za $\frac{11}{36}a$, a 5 za $\frac{1}{36}a$, što po *Propoziciji 3.* vrijedi $\frac{16}{216}a$ ili $\frac{2}{27}a$. Na ovaj način konstantno uzimajući još jedno bacanje, smatram da se mogu obvezati da ću dobiti dvije 6 u 10 bacanja jednom kockicom, ili u jednom bacanju sa 10 kockica, i to uz prednost. Q.E.I.

2.3 Bernoulli *"Ars conjectandi"*

"Ars conjectandi" je dijelo Jacoba Bernoullia objavljeno 1713. godine, nakon njegove smrti. Djelo je ostalo nezavršeno ali se može smatrati prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti i njime teorija vjerojatnosti postaje zasebna matematička disciplina. Knjiga se sastoji od 4 dijela, a posebno je zanimljiv treći dio u kojemu Bernoulli obrađuje primjenu kombinatorike na vjerojatnost uz mnogo primjera igara s igraćim kockicama i kartama. Originalni naziv trećeg djela knjige: *Artis Conjectandi Pars Tertia, explicans Usum praecedentis Doctrinae u variis Sortitionibus Ludis aleae.*


PROBLEMA I.

Quidam duobus calculis albo nigroq; in urnâ reconditis præmium proponit tribus A,B,C, eâ lege, ut qui album extraxerit, præmio potiatur; si secùs omnes faxint, præmio quoq; careant. Primus autem extrahet ipse A, & reponet; secundus B, tertius C. Quæruntur singulorum sortes?

Liquet, hunc casum tantùm specialem esse Problematis generalioris occasione Propos. XI. part. 1. pag. 34. soluti, quo plurium Aleatorum sortes exploravimus, qui æquali an inæquali, sortitionum à singulis continuò instituendarum numero aliquid præstare susceperunt; ubi sortem cujuslibet hâc generali formulâ expressimus: $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Itaque cùm in præsenti exemplo lit. a (numerus omnium casuum) ob duos tantùm calculos valeat 2; c (numerus eorum, quibus præscriptum non impletur) ob unicum nigrum valeat 1; n ob unicam sortitionem à singulis instituendam itidem 1, s verò (numerus omnium sortitionum hanc præcedentium) pro primo A valeat 0, pro secundo B 1, pro tertio C 2; fiet (substitutis istis literarum valoribus) sors primi A $\frac{1}{2}$, secuudi B $\frac{1}{4}$, tertii C $\frac{1}{8}$; sic ut ipsi quoq; aleam proponenti relinquatur $\frac{1}{8}$ sui præmii.

Slika 11. *Ars Conjectandi Pars Tertia, problem 1.*

Problem 1.

Imajući skriveni bijeli i crni kamen u posudi, netko nudi nagradu za prvog od tri igrača; A, B, C, *koji izvuče bijeli kamen, a ako nitko ne uspije, nagradu zadržava "kuća". Prvi bira* A, *koji je zamijenio kamen za* B, *koji je isto to učino za* C. *Koji su izgledi za pobjedu svakog od njih?*

Vidljivo je da je ovo posebni slučaj općenitog problema s dozvoljenim rješenjem iz prijedloga XI, dio 1 p 34, gdje smo promatrali izglede za više igrača, gdje je svaki imao jednaka ili nejednaka izvlačenja u kontinuitetu, gdje su izgledi za bilo kojeg od igrača dani općom formulom:

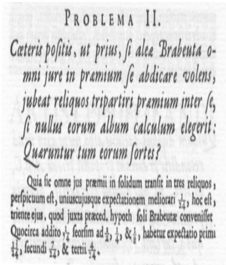
$$\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}.$$

Slovo a *(broj svih slučajeva) će primiti vrijednost 2, jer imamo 2 kamena,* c *(broj slučajeva koji vode do neuspjeha) će preuzeti vrijednost 1, jer imamo 1 crni kamen.* n *također prima vrijednost 1 jer svaki igrač ima jedno izvlačenje, i* s *(broj izvlačenja koja su već učinjena) će primiti vrijednost 0 za* A, *1 za* B *i 2 za* C. *Tada zamjenom vrijednosti prinosa (pobjedom) izgledi za* A *su* $\frac{1}{2}$, *za* B $\frac{1}{4}$ *i* $\frac{1}{8}$ *za* C. *Iz toga slijedi da "kuća" također ima* $\frac{1}{8}$ *izglede* *da zadrži nagradu.*

Ovo je generalizirani problem i može se riješiti pomoću Bernoullijeve opće formule: promotrimo kamenje, c od njih su crni, a izvlačenje bijelog kamena završava igru. Svaki od igrača može ostati u igri najviše n krugova (crni kamen se svaki put vraća u posudu). Igrač A ima vjerojatnost $p = \frac{c}{a}$ da izvuče crni kamen u prvom izvlačenju i $p = (\frac{c}{a})^n$ da izgubi u svih n izvlačenja u igri. Istu vjerojatnost imaju i svi kasniji igrači, osim što šansa hoće li oni uopće igrati ovisi o vjerojatnosti gubitka njegovih prethodnika. Tada je vjerojatnost da će k-ti igrač pobijediti jednaka

$$p^s(1 - p^n),$$

gdje je $s = n(k-1)$. Zamjenimo li p s $\frac{c}{a}$ dobivamo Bernoullijev izraz $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}}$. Ako s postaje veći, više igrača igra više krugova igre (izvlačenja), izgledi da "kuća" zadrži nagradu postaju vrlo malo vjerojatni. U igri sa 4 kamena (1 od njih je crni), 4 igrača imaju svaki po 4 kruga igre, ta vjerojatnost je manja od $0,000006\%$.



PROBLEMA II.

Cæteris positis, ut prius, si alea Brabeuta omni jure in præmium se abdicare volens, jubeat reliquos tripartiri præmium inter se, si nullus eorum album calculum elegerit: Quæruntur tum eorum sortes?

Quia sic omne jus præmii in solidum transit in tres reliquos, perspicuum est, uniuscujusque expectationem meliorari $\frac{1}{24}$, hoc est, triente ejus, quod juxta præced. hypoth soli Brabeutæ convenisset Quocirca addito $\frac{1}{24}$ seorsim ad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{8}$, habetur expectatio primi $\frac{13}{24}$, secundi $\frac{7}{24}$, & tertii $\frac{4}{24}$.

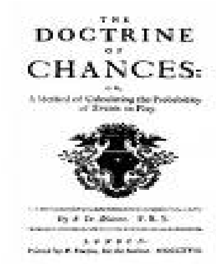
Slika 12. *Ars Conjectandi Pars Tertia, problem 2.*

Problem 2.
Problem je isti kao i prethodni, osim što će game-master ("kuća"), koji želi popustiti uvjete nagrade u korist igrača, podijeliti nagradu na tri načina među igračima ako nitko od njih ne izvuče bijeli kamen. Kakvi su sada njihovi izgledi?

Budući su izgledi da nagrada ostane "kući" bili $\frac{1}{8}$, sada je vjerojatnost $\frac{1}{8}$ da se iznos nagrade P ravnomjerno dijeli na 3 načina. Tako je očekivani povrat za igrača A njegovo očekivanje $\frac{P}{2}$ plus novo očekivanje $(\frac{P}{3})(\frac{1}{8})$, što je ukupno $\frac{13}{24}P$. Isto vrijedi i za ostale igrače.

2.4 A. De Moivre *"The doctrine of chance"*

Godine 1718. Abraham de Moivre objavio je knjigu *"The doctrine of Chance"* u kojoj prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjer broja povoljnih i broja mogućih slučajeva.



Slika 13. Knjiga *"The Doctrine Of Chance"*

Također u knjizi se može naći i definicija statističke neovisnosti događaja te niz zadataka iz kockarskih igara. Jedan od zadataka (u izdanju iz 1738.) bio je:

Zadatak 1. *Dan je niz različitih slova i biraju se nasumično. Treba naći vjerojatnost da će se neka od njih pojaviti na istom mjestu u redoslijedu kako su i u abecedi, a da su pritom druga na krivim mjestima.*
Za slučaj od tri slova, recimo a, b i c, zadatak bi glasio ovako: koja je vjerojatnost da se pri slučajnom rasporedu a, b i c rasporede tako da a bude prvo, a b i c zamijene mjesta. Imamo $3! = 6$ mogućih načina (permutacija) da poredamo ta tri slova. Od tih šest načina samo jedan (acb) zadovoljava navedene uvjete te je vjerojatnost takvog rasporeda $\frac{1}{6}$. Ako bismo imali četiri slova a, b, c i d (uz zabranjeno ponavljanje slova) i želimo vjerojatnost da točno tri budu na pravim mjestima, ta je vjerojatnost 0, jer ako su tri na pravim mjestima, onda je i četvrto. Za slučaj pet slova a, b, c, d, e vjerojatnost da dva budu na točnom mjestu (recimo, a i b), a ostala tri ispremiještana (nijedno na svom mjestu) je, ako nisu dozvoljena ponavljanja, $\frac{2}{120}$. U tom slučaju imamo $5! = 120$ mogućih rasporeda. Od tih nam odgovaraju samo dva: *abdec* i *abecd* (u svim drugim koji počinju s *ab* bar jedno od ostalih slova je na svom mjestu: *abcde*, *abced*, *abdce*, *abedc*).

"Gambler's ruin problem" ili **problem kockareve propasti** je najpoznatiji problem koji se pojavio u izdanju 1756. Riječ je o slijedećem zadatku:

Zadatak 2. *Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos (recimo 1 novčanu jedinicu) i što jedan dobije drugi gubi (primjerice, bacaju novčić i ako padne pismo, dobiva prvi, a ako padne glava, dobiva drugi). Vjerojatnost da prvi dobije u nekom krugu neka je* p*, a vjerojatnost da drugi dobije je* q *(pritom je $p+q=1$ jer sigurno jedan od njih dvojice dobiva). Igra se igra sve dok jedan od njih ne ostane bez novca (ruiniran je). Ako prvi kockar na raspolaganju ima* n *novčanih jedinica za ulaganje, a drugi njih* m*, koja je vjerojatnost da će prvi biti ruiniran?*
Tim zadatkom se za neke vrijednosti $n = m$ bavio Huygens, a poopćili su ga Jacob Bernoulli i de Moivre. Upravo de Moivre je (1712.) dao prvo objavljeno rješenje tog

problema. Tražena vjerojatnost iznosi

$$p_A = \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{1 - (\frac{q}{p})^{n+m}}.$$

Za slučaj kada je $p = q = \frac{1}{2}$ (npr. o pobjedi odlučuje bacanje novčića) formula glasi

$$p_A = \frac{n}{n+m}.$$

Poglavlje 3

Kombinatorika

Kako bismo odredili vjerojatnost nekog događaja, prema klasičnoj definiciji, moramo znati broj svih mogućih rasporeda te broj povoljnih rasporeda za dani događaj, odnosno, moramo vršiti nekakva prebrojavanja. Drugim riječima razmatrat ćemo određene osobine konačnih skupova i njihovih podskupova, a takvim problemima bavi se upravo kombinatorika. ***Kombinatorika*** *je matematička disciplina koja proučava konačne skupove i strukture, odnosno bavi se prebrojavanjem elemenata konačnih skupova i prebrojavanjem broja načina da se ti elementi poredaju.*
Kombinatorika je danas vrlo važna grana matematike, a njezina važnost i utjecaj kako na matematiku tako i na ostale znanosti, neprestano raste. No povijesno gledano, kombinatorika svoje korjene vuče iz zabavne matematike, zagonetki i igara. Mnogi problemi koji su "do jučer" razmatrani isključivo radi zabave, danas se ubrajaju u važne probleme teorijske i primjenjene znanosti.

Primjer 3.1 *Proširujemo kućnu biblioteku. Odabrali smo 3 romana, 2 putopisa i 5 knjiga iz struke. Želimo kupiti jednu knjigu iz svakog područja. Na koliko načina to možemo napraviti?*

Rješenje: Predstavimo romane skupom $\{r1, r2, r3\}$, putopise skupom $\{p1, p2\}$, a knjige iz struke skupom $\{s1, s2, s3, s4, s5\}$. Roman možemo odabrati na tri različita načina, a putopise na dva, pa su svi mogući izbori *(roman, putopis)*:

$$(r1, p1),\ (r1, p2)$$

$$(r2, p1),\ (r2, p2)$$

$$(r3, p1),\ (r3, p2)$$

i ima ih $3 \cdot 2 = 6$ različitih odabira. Svakom takvom odabiru moramo pridružiti knjigu iz struke, što možemo učiniti na 5 različitih načina. Bez ispisivanja vidimo da različitih odabira (roman, putopis, struka) ima $6 \cdot 5 = 30$. Jednaki rezultat bi dobili da smo prvo odabrali knjigu iz struke, na pet različitih načina, zatim joj pridružili roman, na tri različita načina, što daje $5 \cdot 3 = 15$ različitih mogućnosti (struka, roman), te na kraju odabrali jedan od dva putopisa, što daje konačan broj od $15 \cdot 2 = 30$ različitih mogućnosti.

Primjer 3.2 *Na koliko različitih načina možemo iz snopa od 52 karte odabrati dvije karte iste boje?*

Rješenje: Boju možemo odabrati na četiri načina. Bez obzira na izbor boje, broj načina na koji možemo odabrati prvu kartu je 13; bez obzira koju smo kartu prvu odabrali, broj načina na koji možemo odabrati drugu kartu je 12. U broju $4 \cdot 13 \cdot 12$ svaki par karata računat je dva puta (ovisno o poretku u kom su karte izvučene), pa traženi broj različitih mogućnosti iznosi $(4 \cdot 13 \cdot 12)/2 = 312$. Rješavanje ovih primjera kao i gotovo svakog problema kombinatorike, temelji se na jednostavnom ali važnom principu, principu uzastopnog prebrojavanja

Teorem 3.1 [O uzastopnom prebrojavanju]
Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je $T \subset A_1 \times \ldots \times A_n$ skup uređenih n-*torki* $(a_1, \ldots, a_n)$ *definiranih na slijedeći način: prva komponenta a_1 može se birati na k_1 načina (dakle, među k_1 različitih elemenata skupa A_1); za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu a_2 možemo birati na k_2 različitih načina itd. Za svaki izbor komponenata $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,* n-*tu komponentu a_n možemo birati na k_n različitih načina. Tada je kardinalni broj (broj elemenata) skupa T jednak $k(T) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$.*

3.1 Kombinacije i permutacije bez ponavljanja

Neka je dan skup $A = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ od n elemenata.

Definicija 3.1 *Podskup od* k *elemenata* $(1 \leq k \leq n)$ *skupa A, naziva se* ***kombinacija bez ponavljanja*** *klase* k *od* n *elemenata (skupa A).*

Definicija 3.2 *Svaki linearan raspored* n *elemenata skupa A nazivamo* ***permutacija bez ponavljanja*** *od* n *elemenata (skupa A).*

Odmah uočavamo da su dvije kombinacije bez ponavljanja (BP) iste ako se sastoje od istih elemenata skupa A, tj. nije bitan poredak u kom se ti elementi pojavljuju dok su dvije permutacije (BP) iste ako se sastoje od istih elemenata skupa A u istom poretku (jednakost uređenih k-torki).

Primjer 3.3 *Neka je $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Kombinacije (BP) klase 2 su podskupovi $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$ i $\{x_2, x_3\}$. Permutacije (BP) klase 2 su uređeni parovi (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1) i (x_3, x_2). Permutacije (BP) od tri elementa su uređene trojke (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3, x_2), (x_2, x_1, x_3), (x_2, x_3, x_1), (x_3, x_1, x_2) i (x_3, x_2, x_1).*

3.2 Izračunavanje kombinacija i permutacija BP

Sa P_n označimo broj svih permutacija od n elemenata ($n \in \mathbb{N}$) (vrsta elemenata nije važna). Na prvom mjestu permutacije može stajati bilo koji od n elemenata. Sa svakim od n elemenata na prvom mjestu, na drugom mjestu može stajati bilo koji od preostalih $(n-1)$ elemenata. Dakle, prva dva mjesta mogu se popuniti na $n(n-1)$ načina. Nadalje, svaki od tih $n(n-1)$ načina popune prva dva mjesta, treće mjesto možemo popuniti sa jednim od preostalih $n-2$ elementa, te tako prva tri elementa možemo birati na $n(n-1)(n-2)$ načina. Nastavimo li, dobit ćemo formulu za broj permutacija

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!; \qquad n \in \mathbb{N}$$

Ako ne popunjavamo svih n mjesta već samo k mjesta ($1 \leq k \leq n$), dobit ćemo k-permutacije (BP) klase k od n elemenata, i pišemo $P(n, k)$. Nastavimo li postupak kao kod permutacija vodeći računa da koristimo samo k od n elemenata, dobijamo formulu

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1); \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Dodatno definirano da je $P(n, 0) = 0$. n-permutacija, n-članog skupa je očito permutacija tog skupa, pa je $P(n, n) = n!$, a za $k > n$ je jasno da je $P(n, k) = 0$ (jer je očito da ne postoje npr. 3 permutacije, 2-članog skupa, pa je njihov broj 0) i $P(n, 1) = n$.

Definicija 3.3 *Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup koji se sastoji od* n *elemenata i neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Permutacija* k*-tog razreda u skupu A je svaka uređena* k*-torka međusobno različitih elemenata iz skupa A. Broj permutacija* k*-tog razreda,* n*-članog skupa je:*

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n}{(n-k)!}.$$

Primjer 3.4 *Na koliko načina 6 osoba može stati u jedan red?*

Rješenje: Označimo ove osobe sa $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Svaka uređena 6-torka međusobno različitih elemenata iz skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ predstavlja jedan mogući red pred trgovinom. $(1, 2, 5, 6, 4, 3)$; $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$; $(3, 5, 2, 6, 1, 4)$; $(2, 4, 6, 1, 3, 5)$ ...samo su neke od mogućih permutacija. Traženi broj jednak je $P(6) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Primjer 3.5 *Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?*

Rješenje: Neki od brojeva su 59862, 71430 itd. Očito je da su znamenke elementi skupa $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0)$. Skup S ima 10 elemenata. Kako je broj znamenki koje mi trebamo 5, govorimo o permutaciji bez ponavljanja klase 5 od 10 elemenata tj. $P(10, 5)$. No od tog broja svakako moramo oduzeti brojeve poput 05976 ili 07138 jer to nisu peteroznamenkasti brojevi. To su brojevi klase 4, a elemenata je sada 9 (bez 0). Pa je

$$P(10,5) - P(9,4) = \frac{10!}{(10-5)!} - \frac{9!}{(9-4)!} = 27216$$

.

Sa C_k^n označimo broj kombinacija bez ponavljanja klase k od n elemenata $(1 \leq k \leq n)$. Svaku permutaciju (BP) klase k od n elemenata dobit ćemo od točno jedne kombinacije (BP) klase k, pa imamo

$$P(n,k) = C_n^k \cdot k!$$

odakle dobijemo formulu za broj kombinacija BP

$$C_n^k = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Prisjetimo se sada binomnog koeficijenta. Izraz $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ smo zapisali kao $\binom{n}{k}$ pa u konačnici formula za broj kombinacija BP glasi:

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Dodatno definiramo $\binom{0}{0} = 1$. Ako je $k > n$, onda je jasno da je $\binom{n}{k} = 0$, a ako je n=0, a $k \in \mathbb{N}$, onda je $\binom{0}{k} = 0$. Isto je tako jasno da je $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, a $\binom{n}{n} = 1$.

Primjer 3.6 *Između 54 studenta, od čega su 24 studentice, bira se povjerenstvo od 4 člana, 2 muška i 2 ženska. Na koliko različitih načina možemo izabrati povjerenstvo?*

Rješenje: Dva muška predstavnika između 30 možemo odabrati na $\binom{30}{2} = 870$ različitih načina; dvije djevojke između 24 možemo odabrati na $\binom{24}{2} = 276$ različitih načina. Prema teoremu uzastopnog prebrojavanja, ukupan broj različitih izbora povjerenstva je $280 \cdot 276 = 240120$.

Sada slobodno možemo vezu između k-permutacije i k-kombinacije iskazati ovako: sve k-permutacije dobivamo tako da ispermutiramo (na sve moguće načine) sve k-kombinacije.

3.3 Kombinacije i permutacije s ponavljanjem

Definicija 3.4 *Kombinacija s ponavljanjem klase* k *od* n *elemenata je kombinacija od* k *elemenata skupa A, ne nužno različitih.*

Definicija 3.5 *Ako između* n *zadanih elemenata ima k_1 jednakih jedne vrste, k_2 jednakih druge vrste, ..., k_r jednakih* r*-te vrste, govorimo o permutacijama s ponavljanjem.*

Primjer 3.7 *Neka je $S = \{1, 2, 3\}$. Kombinacije (SP) klase 2 su: 11, 12, 13, 22, 23, 33. Jasno je da u ovakvim slučajevima može biti $k > n$. Tako imamo kombinacije (SP) klase 4 od tri elementa: 1111, 1112, 1113, 1122, 1123, 1133, 1222, 1223, 1233, 1333, 2222, 2223, 2233, 2333, 3333.*

Primjer 3.8 *Rezultate neke utakmice zapisujemo na slijedeći način: 0 ukoliko je rezultat neriješen, 1 ukoliko je pobijedio domaćin i 2 za pobjedu gosta. Na listiću se nalazi 12 parova u određenom poretku, tj. rezultat kompletnog kola predstavlja niz od 12 znamenki npr. 011002101221. Kako je poredak bitan, a znamenke su 0, 1 i 2 i mogu se ponavljati, takav niz predstavlja varijaciju (SP) klase 12 od 3 elementa.*

Primjer 3.9 *Obitelj ima 2 djevojčice (Ž) i 3 dječaka (M). Kojim redom mogu oprati ruke? Svaki takav poredak je permutacija (SP) klase 5 od 2 elementa, gdje se prvi elemenat (Ž) javlja 2 puta, a drugi (M) 3 puta. Mogući redoslijedi su: ŽŽMMM, ŽMŽMM, ŽMMŽM, ŽMMMŽ, MŽMMŽ, MMŽMŽ, MMMŽŽ; MŽŽMM, MŽMŽM, MMŽŽM.*

3.4 Izračunavanje kombinacija i permutacija (SP)

Neka je $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ broj permutacija (SP), gdje je n različitih vrsta elemenata, a k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je broj pojavljivanja i-te vrste elemenata. Za svaku permutaciju (SP) postoji $k_1!k_2!\cdots k_n!$ različitih permutacija (BP) u kojima se ne mijenja međusobni raspored elemenata različitih vrsta. Ako mijenjamo i taj raspored, dobivamo sve moguće permutacije (BP) od $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ elemenata, kojih ima $m!$. Imamo:

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} \cdot k_1! \cdot k_2! \cdots k_n! = m! = (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!$$

i slijedi

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}.$$

U *Primjeru 3.9* ispisali smo sve načine koji su mogući, no sada možemo bez ispisivanja riješiti zadatak. Imamo

$$P_2^{2,3} = \frac{(2+3)!}{2!3!} = 10.$$

Primjer 3.10 *Koliko u* Primjeru 3.8 *ima različitih rezultata kompletnog kola, ako znamo da je bilo 5 pobjeda domaćina, 4 pobjede gostiju i 3 neriješene igre?*

Rješenje: Svaki popunjeni listić se sastoji od 5 jedinica, 4 dvojke i 3 nule u nekom poretku, pa govorimo o permutacijama (SP) klase 12 od 3 vrste elemenata tj.

$$P_3^{5,4,3} = \frac{(5+4+3)!}{5!4!3!} = 27720.$$

Sa $\overline{P_n^k}$ označimo broj permutacija (SP) klase k od n elemenata (uz neograničeni broj pojavljivanja nekog elementa). Kako na određenom mjestu (od k mjesta) može biti bilo koji element, neovisno pojavljuje li se na nekom drugom mjestu, tako npr. na prva dva mjesta može biti $n \cdot n = n^2$ raznih razmještaja, ili na prva tri mjesta $n \cdot n \cdot n = n^3$ itd. Tako imamo

$$\overline{P_n^k} = n^k; \qquad k \geq 0.$$

U *Primjeru 3.8* mogućih različitih ishoda jednog kola ima koliko ima permutacija (SP) klase 12 od 3 elementa tj. $\overline{P_3^{12}} = 3^{12} = 531441$.

Primjer 3.11 *Koliko ima različitih ishoda ako bacamo novčić 5 puta uzastopno?*

Rješenje: Mogući ishodi su: (P,G,P,G,G), (P,P,P,P,P), ... Radi se o permutacijama (s ponavljanjem) 5. razreda u skupu od 2 elementa, pa je broj različitih ishoda $\overline{P_2^5} = 2^5 = 32$.

Primjer 3.12 *Koliko je peteroznamenkastih brojeva u čijem se zapisu nalazi barem jedna znamenka 3?*

Rješenje: Prema teoremu o uzastopnom prebrojavanju, ukupno peteroznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$. Peteroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 3 ima $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52488$. Peteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 3 ima $90000 - 52488 = 37512$.

Sa $\overline{C_n^k}$ označimo broj kombinacija (SP) klase k od n elemenata (uz neograničeni broj pojavljivanja nekog elementa). Formula za izračunavanje glasi

$$\overline{C_n^k} = P_2^{k,n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}, \qquad k \geq 0.$$

Primjer 3.13 *U autobusu se nalazi 10 ljudi. Autobus staje na 5 stanica. Na koliko načina ljudi mogu izaći na tim stanicama, u zavisnosti samo od broja njih koji izlaze na različitim stanicama?*

Rješenje: S i označimo svakog od putnika koji izađe na i-toj stanici $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Na taj način dobijemo nizove dužine 10, npr. 1123334445. Kako se elementi mogu ponavljati, a poredak u pisanju ne igra ulogu, dobiveni nizovi čine kombinacije (SP) klase 10 od 5 elemenata, kojih ima

$$\overline{C_n^k} = \binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5} = 2002.$$

Poglavlje 4

O igrama

Kako smo ranije spomenuli, povijest igara na sreću stara je vjerojatno koliko i povijest naše civilizacije. Ljudi su se oduvijek kladili na ishode borbi gladijatora, konjskih utrka, rezultate izbora i mnogih drugih događaja. Natjecateljski duh i iskonska potreba za igrom donijeli su strast prema igrama na sreću. Teorija vjerojatnosti i kombinatorika, dvije važne grane matematike, uvelike svoj razvoj duguju upravo igrama na sreću. Rasprave oko igara na sreću traju i danas. Jedni ih osporavaju jer potiču nerad, daju lažnu nadu za lagodan život i trenutačno bogatstvo. No na sreću ili nesreću, mnogo je više onih koji vole igru i sudjelovanje u njoj smatraju velikim zadovoljstvom. Neizvjesnost i rizik rastu ovisno o ulogu kao i mogućnosti većeg dobitka koji u modernim igrama na sreću igraču daju šansu da zadovolji svoje potrebe i želje.

Kartaška igra ***Poker*** ima jako dugu tradiciju. Počeci ove iznimno popularne igre zabilježeni su prije više od 400 godina. Prvi put u povijesti i javno je zabilježena njemačka igra karata zvana "Pochen" još davne 1829., koja se smatra i prethodnikom samog pokera. Igra "Pochen" počela se u Francuskoj dalje razvijati pod imenom "Poque" od kuda je prenešena dalje u Ameriku gdje dobiva današnji naziv Poker. U New Orleans-u je 1805. zabilježeno igranje "Pokera" te se od tada New Orleans smatra gradom u kojem je rođen poker. 1840.g. je u Americi prihvaćen špil od 52 karte.

Slika 14. Poker

Mnogo je varijacija igre poker, no cilj je uvijek isti; imati u ruci najboljih pokerskih 5 karata. Lako je izračunati koliko imamo kombinacija po 5 karata u špilu od 52 karte.

$$C_{52}^5 = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960$$

je mogućih kombinacija podjele karata.
Zanima nas, koliko je kombinacija Royal flusha[3]. Budući je to poredak karata isključivo ovim redom 10-J-Q-K-A, i karte moraju biti u istoj boji (od četiri moguće), jasno je da je takvih kombinacija 4, tj. $\binom{4}{1}$. Dakle, šanse za dobiti Royal flush "iz ruke" su $\frac{4}{2598960} = \frac{1}{649739}$, odnosno 1 : 649739.
Koliko je kombinacija parova + 3 različite karte? Par može biti bilo koji od trinaest različitih karata, te bilo koje dvije od četiri boje. Preostale tri karte mogu biti bilo koje tri od preostalih dvanaest, a svaka od njih može imati bilo koju od četiri boje pa za rezultat imamo:

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot \binom{4}{1}^3 = 1098240.$$

Šanse za dobitak jednog para su 1 : 21.
U *Tablici 1.* su prikazane kombinacije svih pozitivnih ishoda u Pokeru, te šanse za dobitak istih.

Karte	**Kombinacije**	**Šanse**
Par	1 098 240	1:1,36
Dva Para	123 552	1:20,03
Tris	54 912	1:46,3
Skala	10 200	1:253,8
Boja	5 108	1:507,8
Full	3 744	1:694,2
Poker	624	1:4 164
Skala u boji	36	1:72 793,33
Royal flush	4	1:649 739

Tablica 1. *Kombinacije i šanse karata u Pokeru .*

Koliko je kombinacija u kojima nećemo imati niti jednu dobitnu kobinaciju? Karte biramo iz 5 od 13 redova, no oduzmemo 10 mogućih skala[4] i svaka od tih karata može biti bilo koje od 4 boje, ne uzimajući u obzir 4 iste (4 mogućnosti).

[3]Royal flush su najjače moguće karte u pokeru.
[4]Mogućih je 10 skala jer skalu čine 5 za redom poslaganih karata (od 2-3-4-5-6-7-8-9-10-J-Q-K-A) gdje A može biti u kombianciji A-2-3-4-5 i 10-J-Q-K-A.

$$\left[\binom{13}{5} - 10\right] \cdot \left[\binom{4}{1}^5 - 4\right] = 1302540$$

Dakle, šanse da nećemo dobiti niti jednu od poželjnih kombinacija su 1 : 0.995.

Roulette (Rulet) je zasigurno najpoznatija i najpopularnija kockarska igra diljem svijeta. U počecima, rulet se igrao s kuglicom od bjelokosti. U današnjem modernom ruletu razlikujemo Američki Rulet i Europski Rulet. Američka verzija ruleta najčešće se igra bilo na Internet Casinima, ili u utočištu ruleta - Las Vegasu. Da bi sudjelovao u igri ruleta, igrač mora staviti svoj ulog u obliku žetona na određena mjesta na rulet stolu (tableau). Cilj je pogoditi na kojem će se broju loptica zaustaviti, ili na kojoj boji, a mjesto na kojem loptica stane odlučuje pobjednika.

Slika 15. Stol za igru Roulette

Američki rulet ima 36 crvenih i crnih polja, 36 parnih i neparnih brojeva te 0 i 00 na zelenim poljima. Važno je reći da su polja na ruletu naizmjenična, crno/crveno, crno/crveno itd, no brojevi nisu poredani par/nepar, jer bi se tada poklopilo da su svi parni brojevi crveni (ili neparni crveni). Kada se rulet nakon vrtnje zaustavi, a kuglica ostane na polju 0 ili 00, bez obzira na koji smo broj ili boju stavili ulog, gubimo ga. Pretpostavimo da smo igrali na crno polje. 18 od 36 polja je crveno, a drugih 18 je crno. Dakle, od 38 mogućih polja (36 bojeva + polje 0 + polje 00), za nas je povoljnih 18.

Znamo da vjerojatnost dobitka oklade računamo kao omjer povoljnih i mogućih slučajeva, pa imamo:

$$\frac{18}{38} = \frac{9}{19} = 0,47.$$

Izgled za našu pobjedu u pojedinačnoj igri su $0,47\%$.

Recimo da smo igrali 38 puta, i svaki put smo stavili 1kn. U prosjeku ćemo dobiti 18 puta, a izgubiti 20. Za svaku pobjedu dobit ćemo natrag svoj ulog (1 kn) i 1 kn je dobitak, odnosno ukupno ćemo dobiti 18 kn+18 kn ulog. Kako smo uložili 38 kn, a natrag dobili 36 u gubitku smo svega 2 kn, tj. $5,26\%$, i to se zove *"prednost kuće"*. Taj postotak je uvijek isti (u američkim casinima) koju god kombinaciju ruleta igrali. Europska casina nam daju znatno bolje šanse za dobitak, jer kolo ruleta ima samo jednu ništicu. Izgled za pobjedu u pojedinačnoj igri je u ovom slučaju 18/37 što je 49%.

Igra ***Loto*** nastala je u Italiji, 1620. godine. Već su tada postojali razvijeni oblici klađenja: kladilo se u ishod borbe, dan Papine smrti i slično. U prvom Lotu nije bilo kupona i listića kao danas. Prijavljene oklade su upisivane u posebne knjige koje su vodili vlasnici sabirnih mjesta. Učesnici su dobijali potvrde s popisom brojčanih kombinacija. Nakon održanog izbora učesnik je znao rezultat igre, a dobitnicima su isplaćivane nagrade, čija visina je zavisila o visini oklade.

Slika 16. Loto

U Hrvatskoj danas postoji igra Loto 7/39 i Loto 6/45. Pogledajmo što se događa u igri 6/45. Od 45 ponuđenih brojeva (redom $1, 2, 3, \ldots, 45$) biramo 6 brojeva. Koliko je mogućih kombinacija po 6 brojeva, ako imamo ukupno 45 brojeva?

$$C_{45}^{6} = \binom{45}{6} = 8145060.$$

Odnosno, da bi sa 100% sigurnošću imali 6 pogodaka bez obzira kojih 6 brojeva je izvučeno, moramo odigrati 8 145 060 različitih kombinacija.

U *Tablici 2.* dan je broj dobitnih kombinacija u igri Loto 6/45. Takvih kombinacija je ukupno 194 130.

Broj pogodaka	**Broj kombinacija**
6 pogodaka	1
5+1 pogodak	6
5 pogodaka	228
4 pogotka	11 115
3 pogotka	182 780
Ukupno	**194 130**

Tablica 2. *Broj dobitnih kombinacija u igri Loto 6/45*

Ukupan broj mogućih kombinacija koje donose dobitke je 194 130. Ako broj mogućih kombinacija podijelimo s brojem dobitnih kombinacija imamo 8145060 : 194130 = $41,96$. Dakle, da bismo ostvarili jednu od navedenih dobitnih kombinacija potrebno je odigrati u prosjeku 42 kombinacije. Koliko je potrebno odigrati kombinacija da bismo ostvarili n pogodaka? Ukupan broj kombinacija podijelimo brojem dobitnih kombinacija s n pogodaka. Npr. za 4 pogotka ukupan broj kombinacija (8 145 060) podijelimo s brojem dobitnih kombinacija za četvorku (11 115). 733 kombinacije je potrebno odigrati da bismo dobili četvorku.

Nekada ***d'Alembertov martignal***, danas ***Lovci na X***. Riječ je o načinu klađenja koji je poznat od 18. stoljeća kada je d'Alembert predložio da u svakom krugu igre u kojemu igrač gubi, treba uložiti dvostruko više. Ukoliko dovoljno dugo igra, to bi garantiralo minimalno dobitak iznosa koliko je uložio u prvom krugu. Danas je taj pricip popularan za klađenje na sportske događaje, a mi ćemo promatrati jedan primjer ovakvog klađenja. Odarali smo HNL i klub Osijek. Kladit ćemo se samo na utakmice kada igra Osijek jer je Osijek klub koji je u prošloj nogometnoj sezoni odigrao najviše neriješenih utakmica, takozvanih X-eva. Zbog toga ćemo se ove sezone kladiti uvijek na neriješeni rezultat *(X)*. U *Tablici 3.* su prikazani događaji, te koeficijenti za pobjedu domaćina *(1)*, za neriješeni rezultat *(X)* te za pobjedu gosta *(2)*.

Broj	Događaj	1	X	2
1	Osijek - Dinamo	2,10	3,00	2,10
2	Osijek - Cibalia	1,90	3,50	3,10
3	Osijek - Šibenik	1,90	3,50	2,90
4	Osijek - Varteks	1,45	3,35	3,70
5	Osijek - Međimurje	1,20	4,50	5,50
6	Dinamo - Osijek	1,10	4,15	6,00
7	Cibalia - Osijek	2,10	3,00	2,10
8	Šibenik - Osijek	1,90	3,50	3,10
9	Varteks - Osijek	1,90	3,55	2,30
10	Međimurje - Osijek	2,10	3,50	1,90

Tablica 3. *Događaji i koeficijenti*

Prvi događaj je utakmica Osijek - Dinamo, kladimo se na neriješeni rezultat *(X)* i ulažemo 20 kn. Ako rezultat zaista bude neriješen ukupno ćemo dobiti $3,00 \cdot 20 = 60,00$ kn (zarada: $60 - 20 = 40$ kn), a ako rezultat ne bude X, kladimo se na događaj 2. Sada poduplamo naš ulog. Ulažemo 40 kn. Ako rezultat bude X dobit ćemo $40,00 \cdot 3,50 =$

$140,00$ kn (zarada je $140-40-20=80$ kn), a ako Osijek niti sad ne odigra neriješeno, idemo na događaj 3 gdje ulažemo 80 kn. Ako će rezultat biti izjednačen dobit ćemo $80,00\cdot 3,50=280,00$ kn, od čega je 140 zarada ($280-80-40-20=140$ kn), a ako ne, slijedi klađenje na događaj 4 i ulog od 160 kn. I tako dalje dok Osijek ne završi utakmicu bez pobjede ili poraza. Znalci tvrde, ova igra je "isplativa". No znalci nam sa sigurnošću ne mogu reći hoće li Osijek odigrati utakmicu s neriješenim rezultatom u cijeloj sezoni.

"Šansa, koju mi poznamo, pretpostavlja postojanje stvari i njihovih općenitih svojstava: npr. kockice koje su bačene, svaka od njih će završiti na svojoj bazi. Nakon toga, vjerojatnost dodijeljene šanse, koja je na nekoj određenoj dispoziciji kockice, postaje pravi predmet istraživanja kao što to može biti svaka druga količina ili odnos. Ali šansa je zvuk nečeg sasvim beznačajnog: način postojanja bez određivanja, upitno je čak i postojanje same šanse više nego ne postojanje, također šansa ne može biti definirana niti razumljiva, niti jedan prijedlog u vezi s šansom ne može biti potvrđen ili uskraćen, osim ovog 'To je samo riječ'*."*

Abraham de Moivre, 1735.

Bibliografija

[1] A. D. Aczel: *Kad slučajnost odlučuje*, Izvori, Zagreb, 2006.

[2] D. A. Marcus: *Combinatorics - A problem oriented approach*, The Mathematical Association of America, 1998.

[3] O. Ore: *Caradano, the Gambling Scolar*, Dover Publications Inc, New York, 1963.

[4] D. Veljan: *Kominatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[5] *Ars conjectandi*, `http://fogandonions.com/Latin/ArsConj.html`

[6] *De ratiociniis in ludo aleae*, `http://www.stat.ucla.edu/history/huygens.pdf`

[7] *The Doctrine of Chances*, `http://books.google.com`

[8] *The MacTutor History od Mathematics archive, biographies*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html`

Sažetak

Čovjekovo zanimanje za sreću postoji od kad postoji i on sam. Igre na sreću bile su svakodnevni život praljudi, a tako je i danas počevši od dječijih igara, kladionica, kockarnica pa sve do ozbiljnih razmatranja matematičkih problema u igrama na sreću.
U diplomskom radu prikazan je upravo povijesni razvoj od igre do matematičke nauke, s naglaskom na matematičare koji su najviše doprinjeli razvoju kombinatorike. Osim važnih matematičara za kombinatoriku, u povijesnom pregledu važnost je dana i odabranim dijelovima matematičkih knjiga iz razdoblja od 16. - 18. st.

Današnja kombinatorika zauzela je važno mjesto u ovom radu. Preko primjera su pojašnjene definicije i formule koje koristi kombinatorika, te je pokazana primjena kombinatorike u igrama na sreću.

Summary

Human interest for a chance exists since there is a man. Games of chance were the daily life of first people and it is now starting from children's games, betting, casino and to serious consideration of mathematical problems in games of chance.
The work has shown the historical development of game to mathematical sciences, with emphasis on mathematics that are most contributed to the development combinations. In addition to the important mathematicians for combinatorics, in the historical review big importance is given to selected parts of mathematical books from the period of 16th - 18th century.

Today's combinations has taken an important place in this work. Over examples, the definitions and formulas used in combinations are explained. Also it is shown the usage and application of combinatorics in games of chance.

Životopis

Rođena sam 21. studenog 1981. godine u Slavonskom Brodu. 1996. godine završila sam osnovnu školu Huge Badalića, a 2000. godine prirodoslovno-matematičku gimnaziju Matije Mesić u Slavonskom Brodu. 2001. godine upisla sam se na Odjel za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, smjer matematika-informatika.