Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Mato Lukić

Matematika u srednjovjekovnoj Europi

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Mato Lukić

Matematika u srednjovjekovnoj Europi

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Zapadno Rimsko Carstvo srušilo se 476. godine pod naletom raznih "barbarskih" plemena. U dijelovima starog carstva ubrzo su organizirana feudalna društva i započeo je dugi proces razvoja europskih nacionalnih država. Međutim, sljedećih pet stoljeća opća razina kulture u Europi bila je vrlo niska. Kmetovi su obrađivali zemlju i malo je baruna znalo čitati ili pisati, a kamoli razumjeti matematiku. Zapravo je za tim bilo malo praktične potrebe, jer su feudalni posjedi bili relativno samodostatni, a trgovine gotovo i nije bilo, posebno nakon što su muslimani osvojili mediteranske pomorske putove.

Unatoč nedostatku matematičke aktivnosti, rani srednji vijek naslijedio je od antike mišljenje da je kvadrivij - aritmetika, geometrija, glazba i astronomija - potrebna za učenje za jednog obrazovanog čovjeka, čak i u rimokatoličkoj kulturi koja se tek razvijala. Tako je sveti Augustin (354.–430.) u svom djelu *Grad Božji* napisao da „ne smijemo prezirati znanost o brojevima za koju se u mnogim dijelovima Svetog pisma smatra da je od velike koristi pažljivom tumaču." Ipak, jedini dostupni tekstovi za proučavanje ovih predmeta bili su kratki uvodi, posebno oni od rimskog učenjaka Boethiusa (480.–524.) i biskupa Isidora iz Seville (560.–636.). Dakle, obris matematičkog kvadrivija bio je na mjestu, ali bilo je to samo površinski dotaknuto, gotovo lišeno suštine.

Praktično jedine postojeće škole bile su povezane sa samostanima, od kojih su mnoge osnovali redovnici iz Irske, prve zemlje koja izvorno nije bila dio Rimskog carstva koja je prihvatila kršćanstvo. Dok je veći dio kontinentalne Europe bio u nemirima, redovnici su kopirali grčke i latinske rukopise i tako sačuvali mnogo drevnog učenja. Studenti iz cijele Europe dolazili su tamo studirati. Tada su, od šestog do osmog stoljeća, misionari izlazili iz Irske na kontinent kako bi uspostavili nova središta učenja iz kojih su nekoliko stoljeća kasnije potaknuli novi intelektualni razvoj.

Čak i u najranijem dijelu srednjeg vijeka postojao je značajan matematički problem: utvrđivanje kalendara. Crkva je posebno raspravljala treba li Uskrs odrediti pomoću rimskog solarnog ili židovskog lunarnog kalendara. Ta bi se dva obračuna mogla uskladiti, ali samo s određenim matematičkim znanjem. Stoga je Karlo Veliki, čak i prije krunidbe za rimskog cara 800. godine službeno preporučio da matematika bude dio nastavnog programa u crkvenim školama za Uskršnja izračunavanja.

Da bi mu pomogao u osnivanju više škola, Karlo Veliki doveo je Alcuina iz Yorka (735.–804.) kao svog savjetnika za obrazovanje. Nemamo puno izravnih podataka o Alcuinovom znanju matematike, ali općenito mu se pripisuje zbirka od pedeset i tri aritmetička problema iz njegova vremena, pod nazivom *Propositiones ad acuendos juvenes* (Propozicije za izoštravanje mladih). Problemi koji zahtijevaju malo domišljatosti za rješavanje, ali ne ovise o određenoj matematičkoj teoriji ili pravilima u proceduri.

U desetom stoljeću započelo je oživljavanje interesa za matematiku radom Gerberta d'Aurillaca (945.–1003.), koji je 999. godine postao papa Silvester II. U mladosti je Gerbert studirao u Španjolskoj, gdje je vjerojatno naučio nešto matematike od muslimana. Kasnije, pod zaštitom Otona II., rimskog cara, Gerbert je reorganizirao katedralnu školu u Rheimsu i uspješno uveo studij matematike. Osim podučavanja osnovne aritmetike i geometrije, Gerbert se bavio pravilima mjerenja rimskih geodeta i osnovama astronomije. Također je podučavao upotrebu ploče za brojanje, podijeljene u stupce koji predstavljaju (pozitivne) potencije broja 10, u svaki od njih stavio bi po jedan brojač označen zapadnoarapskim oblikom jednog od brojeva $1, 2, 3, \ldots, 9$. Nula je bila predstavljena praznim stupcem. Iako Gerbertovo djelo predstavlja prvi nastup hinduističkih arapskih brojeva na kršćanskom zapadu, odsutnost nule i nedostatak prikladnih algoritama za računanje s ovim brojačima pokazali su da Gerbert nije razumio puni značaj hindu-arapskog sustava.

Unatoč ograničenim matematičkim izvorima dostupnim Europljanima na prijelazu tisućljeća, učenjaci su znali da je u Grčkoj postojala drevna tradicija u matematici, ali im je u to vrijeme bila gotovo nedostupna. Ova baština, kao i dio matematike razvijene u islamskom svijetu u zapadnu je Europu dovedena samo radom prevoditelja. Europski učenjaci su otkrili glavna grčka znanstvena djela početkom dvanaestog stoljeća te su tada započeli proces njihovog prevođenja na latinski. Velik dio ovog posla obavljen je u Toledu u Španjolskoj, kojeg su u to vrijeme tek nedavno preuzeli kršćani od bivših muslimanskih vladara. Tamo su se nalazila spremišta islamskih znanstvenih rukopisa, kao i ljudi koji su širili dvije kulture. Konkretno, postojala je židovska zajednica, čiji su mnogi članovi tečno govorili arapski jezik. Tada su prijevodi često provođeni u dvije faze, prvo od strane španjolskog židova s arapskog na španjolski, a zatim od kršćanskog učenjaka sa španjolskog na latinski. Popis prijevoda glavnih matematičkih djela (s njihovim datumima) prilično je opsežan.

Među najranijim prevoditeljskim timovima bili su Ivan iz Seville i Domingo Gundisalvo, koji su bili aktivni u prvoj polovici dvanaestog stoljeća. Ivan je rođen kao Židov, a njegovo prvotno ime je vjerojatno bilo Salomon ben David, ali je kasnije prešao na kršćanstvo, dok je Gundisalvo bio filozof i kršćanski teolog. Najvažniji od njihovih matematičkih prijevoda bila je razrada al-Khwārizmījevog djela o aritmetici. Također su preveli veliki broj astronomskih djela, uključujući komentare djela od Ptolomeja, te brojna medicinska i filozofska djela.

Suvremenik Ivana iz Seville bio je Adelard iz Bath-a (1075.–1164.), koji se rodio u Bathu i veći dio svojih ranih godina proveo putujući po Francuskoj, južnoj Italiji, Siciliji i Bliskom Istoku. Adelard je bio odgovoran za prvi prijevod Euklidovih elemenata s arapskog. Također je preveo astronomske tablice al Khwārizmīja 1126. godine. Ovaj prijevod sadrži prve tablice funkcije sinus dostupne na latinskom jeziku, kao i prve tablice funkcije tangens, kasnije je dodan u al Khwārizmījevu djelu kao urednik iz jedaneaestog stoljeća. Još jedan Englez, Robert iz Chestera, koji je nekoliko godina živio u Španjolskoj, preveo je *Algebru* al-Khwārizmīja 1145. godine, uvodeći tako Europu u algebarske algoritme za rješavanje kvadratnih jednadžbi. Zanimljivo je da je iste godine Platon iz Tivolija s hebrejskog preveo *Liber embadorum* (Knjiga površina) od španjolsko-židovskog učenjaka Abrahama bar Hiyye, djelo koje je također sadržavalo islamska pravila za rješavanje kvadratnih jednadžbi.

Najproduktivniji od svih prevoditelja bio je Gerard iz Cremone (1114.–1187.), talijan koji je prije svega radio u Toledu i zaslužan je za prijevod više od 80 djela. Nesumnjivo, nisu sve ove zasluge samo njegove. Poznato je da je jedan od njegovih pomoćnika bio Galippus, španjolski kršćanin kojem je bilo dopušteno prakticirati kršćanstvo pod muslimanskom vlašću, ali imena njegovih ostalih pomoćnika izgubljena su u povijesti. Među Gerardovim djelima bio je novi prijevod Euklidovih elemenata s arapskog od Thābit ibn Qurra i prvi prijevod Ptolomejevog *Almagesta* s arapskog 1175. godine.

Na kraju dvanaestog stoljeća, mnoga su glavna djela grčke matematike i nekoliko islamskih djela bila dostupna latinskim učenjacima u Europi. Tijekom sljedećih stoljeća ovi su se radovi asimilirali i europljani su sami počeli stvarati novu matematiku. Dobro je primijetiti da su neki španjolsko-židovski učenjaci ranije čitali arapska djela u izvorniku i sami stvarali djela na hebrejskom. Tijekom dvanaestog stoljeća kulturna razmjena između Europe i tri glavne civilizacije: židovske, kršćanske i islamske je bila vrlo intenzivna. Islamska nadmoć prethodnih stoljeća bila je u padu, a druge dvije civilizacije su dobivale na snazi. Krajem sljedećeg stoljeća pokazuje se veliki napredak zapadnog kršćanstva, dok su razna ograničenja Židova počela smanjivati židovski doprinos.

2 Geometrija i trigonometrija

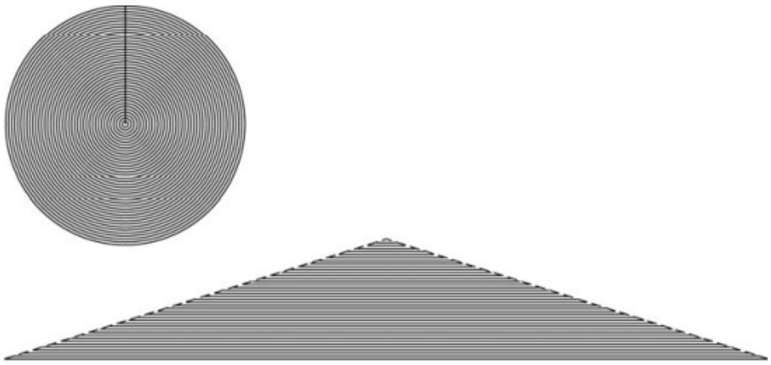
Euklidovi elementi prevedeni su na latinski jezik početkom dvanaestog stoljeća. Prije toga, arapske verzije bile su dostupne u Španjolskoj. Abraham bar Hiyya iz Barcelone, napisao je svoj *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret* (Traktat o mjerenju i proračunu) 1116. godine kako bi pomogao francuskim i španjolskim Židovima u mjerenju njihovih polja. Svoj rad je započeo sažetkom nekih važnih Euklidovih definicija, aksioma i teorema.

Abraham bar Hiyya-Traktat o mjerenju

Poput većine onih koji su se tijekom sljedećih nekoliko stoljeća bavili geometrijom, Abrahama nisu toliko zanimali teorijski aspekti Euklidovih elemenata koliko praktična primjena geometrijskih metoda za mjerenje. Preuzeo je islamsku tradiciju dokazivanja, preuzetu od Grka i dao geometrijski opravdane metode za rješavanje algebarskih problema koje je uključivao u svoje geometrijske rasprave. Abraham je posebno uključio u svoj rad glavne rezultate Elemenata II o geometrijskoj algebri i koristio ih za demonstraciju metoda rješavanja kvadratnih jednadžbi. Abrahamov rad je prvi u Europi koji dao islamske postupke za rješavanje takvih jednadžbi.

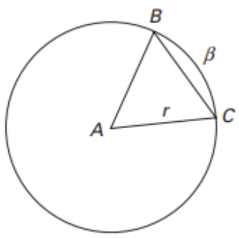
Abraham je postavio pitanje: „Ako se od površine kvadrata oduzme zbroj stranica i ostane 21, kolika je površina kvadrata i kolika je duljina svake od jednakih stranica?" Abrahamovo pitanje možemo prevesti u kvadratnu jednadžbu $x^2 - 4x = 21$, jednadžbu koju on rješava na tada poznat način. Prepolavljanjem 4 da bi dobio 2, kvadriranjem tog rezultata da bi dobio 4, dodavanjem tog kvadrata na 21 da bi dobio 25, uzimanjem kvadratnog korijena da bi dobio 5, dodavanjem tog rezultata na polovicu od 4 dobijamo odgovor 7 za stranicu i 49 za površinu. Abrahamov problem nije bio geometrijski jer je napisao da oduzima duljinu (zbroj stranica) od površine. U svom geometrijskom obrazloženju ustanovio je da problem podrazumijeva da odsiječe od orginalnog kvadrata stranice x pravokutnik sa stranicama 4 i x kako bi mu ostao pravokutnik stranice 21, zatim je prepolovio stranicu duljine 4 i primijenio Elemente II-6 kako bi opravdao algebarski postupak. Abraham svoju algebru nije naučio od al-Khwarizmija (čija je algebra prevedena na latinski iste godine kad i Abrahamovo djelo) već od autora kao što je Abu Kamil koji se služio euklidskim opravdanjima. Abraham je na sličan način predstavio metode i euklidske dokaze za primjere druge dvije islamske vrste mješovitih kvadratnih jednadžbi $x^2 + 4x = 77$ i $4x - x^2 = 3$. Kasnije je u oba slučaja dao pozitivna rješenja. Također je rješavao kvadratne probleme kao što su sustavi $x^2 + y^2 = 100$, $x - y = 2$ i $xy = 48$, $x + y = 14$.

Abrahamov najoriginalniji doprinos nalazi se u njegovom radu na mjerenjima vezanim uz krugove. Započeo je davanjem standardnih pravila za pronalaženje opsega i površine kruga. Upotrijebio $3\frac{1}{7}$ za π, a zatim je napomenio da ako se želi preciznija vrijednost treba se koristiti $3\frac{17}{120}$. U hebrejskoj verziji teksta postoji opravdanje za formulu površine $P = \frac{a}{2} \cdot \frac{R}{2}$ pomoću nedjeljivih veličina. Naime, o krugu se misli da ga čine koncentrične kružnice nedjeljivih niti (Slika 1). Ako presiječemo krug od središta do opsega i rasklopimo ga u trokut, osnovica trokuta je opseg, a visina polumjer. Formula površine slijedi odmah iz toga.



Slika 1: Krug i trokut koji se koriste za izvođenje formule površine kruga

Da bi izmjerio površinu kružnog odsječka, Abraham je primijetio da prvo treba pronaći površinu odgovarajućeg kružnog isječka tako što je pomnožio radijus s polovicom duljine luka (Slika 2). Zatim je oduzeo površinu trokuta koju čine tetiva odsječka i dva polumjera na krajevima. Kako izračunati duljinu luka, pod pretpostavkom da se zna duljina tetive? Abraham je dao odgovor pomoću tablice koja se odnosi na tetive i lukove. Tada se prvi put u Europi pojavilo ono što može nazvati tablicom trigonometrijskih vrijednosti (Slika 3).

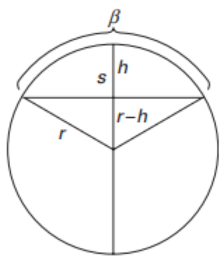


Slika 2: Površina kružnog odsječka $B\beta C$ = površina kružnog isječka $AB\beta C$ − površina trokuta ABC

Za razliku al Khwarizmijeve tablice funkcije sinus koja se pojavila u prijevodu na latinskom nedugo nakon Abrahamove knjige koja je koristila stupnjeve za mjerenje lukova, Abrahamova tablica je bila tablica lukova danih tetiva. Abraham je koristio ono što mu se činilo prikladnijim za mjerenje. Podijelio je polumjer kruga na 14 dijelova kako bi polukrug bio podijeljen na dijelove cjelobrojnih vrijednosti (44), zatim je dao lukove (u minutama i sekundama) koji odgovaraju svakoj cjelobrojnoj vrijednosti tetive od 1 do 28. Kako bi odredio duljinu luka segmenta kruga s obzirom na tetivu s i udaljenost h od središta tetive do opsega, Abraham je prvo odredio promjer kruga d formulom $d = \frac{s^2}{4h} + h$ (Slika 4). Zatim je pomnožio zadanu tetivu s $\frac{28}{d}$, pregledao svoju tablicu kako bi odredio odgovarajući luk α i pomnožio α s $\frac{d}{28}$ kako bi pronašao stvarnu duljinu luka.

Partes Cordatum	Arcus		
	Partes	Min.	Sec.
1	1	0	2
2	2	0	8
3	3	0	26
4	4	0	55
5	5	1	44
6	6	2	54
7	7	4	42
8	8	7	11
9	9	9	56
10	10	13	42
11	11	18	54
12	12	24	38
13	13	31	9
14	14	40	0
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	36
18	19	33	27
19	20	53	26
20	22	17	10
21	23	45	6
22	25	19	24
23	27	0	0
24	28	49	56
25	31	26	37
26	33	20	52
27	36	27	32
28	44	0	0

Slika 3: Tablica tetiva-lukova

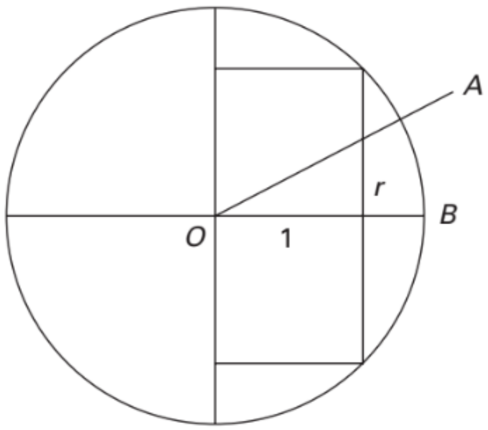


Slika 4: Duljina luka $\beta = \frac{d}{28}\alpha$, gdje je $d = 2r = \frac{s^2}{4h} + h$

Praktična geometrija

Abrahamova djela na hebrejskom bila su jedno od najranijih praktičnih geometrijskih djela koja su se pojavila u srednjovjekovnoj Europi. Uz Abrahama spomenimo još i teologa Hugha iz opatije i škole svetog Viktora u Parizu (1096.–1141.). Hugh je 20-ih godina 12. stoljeća na latinskom napisao jednostavnije djelo od Abrahamovih djela koje je bilo namijenjeno geodetima.

Znanje o trigonometriji još nije stiglo do Pariza, niti se spominje Euklid u Hughovu djelu. Hugh je za svoja mjerenja koristio astrolab, spravu koja je od antike do renesanse služila kao instrument za mjerenje altitude nebeskih tijela te kao pomagalo za grafičko rješavanje zadataka iz sferne astronomije. Astrolab su razvili islamski astronomi od prethodnih grčkih modela koji je kasnije donesen kroz Španjolsku u zapadnu Europu. Hughove metode mjerenja uključivale su upotrebu alhidade, uređaja pričvršćenog na astrolab. Alhidada je stari geodetski instrument koji je omogućio mjerenje omjera visine i udaljenosti vidljivog objekta (Slika 5).

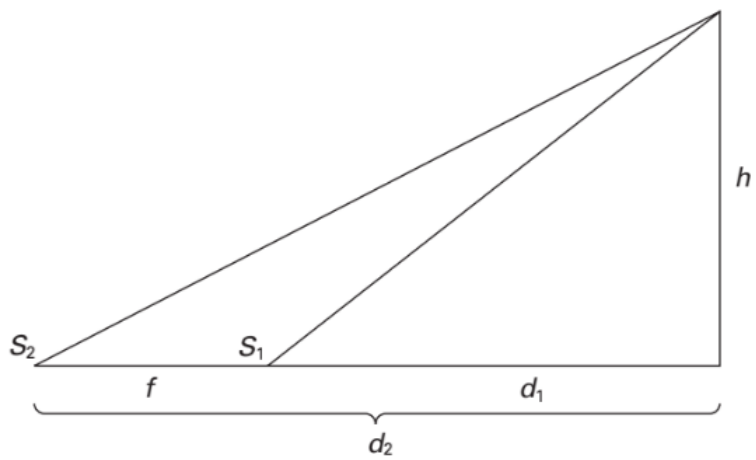


Slika 5: Astrolab s alhidadom OA

Ako je r (omjer visine i udaljenosti objekta) i udaljenost objekta d poznata, tada je visina h dana s $h = r \cdot d$. Poput svojih prethodnika u Indiji, Kini i islamskom svijetu, Hugh je također znao da nije uvijek moguće izmjeriti udaljenost objekta d. U tom su slučaju bila potrebna dva mjerenja (Slika 6). U točki S_1 pronalazi r_1 (omjer visine h prema udaljenosti d_1), dok u točki S_2 pronalazi r_2 (omjer od h prema d_2). Iz toga slijedi da je $d_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot d_1$. Budući da se $d_2 - d_1 = f$ može izmjeriti, Hugh je izračunao d_1 kao

$$d_1 = \frac{f}{\frac{r_1}{r_2} - 1}$$

te je zatim izračunato h kao $h = r_1 \cdot d_1$.



Slika 6: Mjerenje visine udaljenog objekta s dva gledišta

Krajem dvanaestog stoljeća trigonometrija i Euklidova znanja došli su do Pariza. To je prikazano u anonimnom djelu *Artis cuiuslibet consummatio* (Savršenstvo svake umjetnosti). Djelo je izvorno napisano na latinskom, ali je kasnije prevedeno na francuski jezik u trinaestom stoljeću. Knjiga je podijeljena u četiri dijela: mjerenje površine, mjerenje visine, mjerenje volumena i računanje s razlomcima. Posljednji dio je napisan kako bi pomogao u računima potrebnim u ostalim dijelovima. Prvi dio o mjerenju površina započinje osnovnim postupcima za pronalaženje površine trokuta, pravokutnika i paralelograma, od kojih je većina opravdana pozivanjem na Euklidove propozicije.

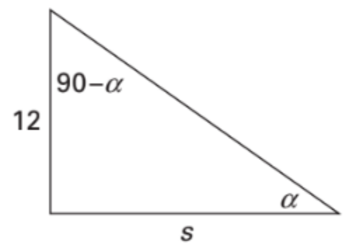
Dio knjige o mjerenju visina pokazao je autorovo znanje o trigonometriji. Dan je postupak za mjerenje kuta pomoću sjene vertikalnog štapa duljine 12. Neka je duljina sjene označena sa s, a kut sa α, tada je

$$\alpha = 90 - \arcsin\left(\frac{60s}{\sqrt{s^2 + 144}}\right)$$

gdje su se sinusi izračunavali pomoću kruga polumjera 60 (Slika 7). Na sličan način autor je izračunao duljinu sjene

$$s = \frac{12\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

Ova dva problema pokazuju da je autor znao upotrebu tablice funkcije sinus, ali nije znao



Slika 7: Izračun duljine sjene s i kuta α

tablice funkcija kosinusa, tangensa i kotangensa koje su već bile razvijene u islamskom svijetu. Bilo je to jedno od najranijih dostupnih hinduističkih i islamskih poboljšanja na grčkim djelima.

Za mjerenje autor se vratio antičkim metodama. Da bi izmjerio visinu objekta služio se trigonometrijskim metodama te se dodatno vratio na najstariju i najjednostavniju dostupnu metodu: "Pričekaj dok visina sunca ne bude pod kutom od 45 stupnjeva ... ; tada će duljina sjene koja leži u ravnini bilo kojeg tijela biti jednaka duljini tog tijela". Ako je objekt nepristupačan, zahtijevala su se dva promatranja slična onima u kineskim i indijskim izvorima. Kao u gotovo svim indijskim, islamskim i srednjovjekovnim europskim izvorima, čak i kad su bile poznate trigonometrijske metode, primjenjivale su se isključivo na sferne trokute.

Ova dva djela o geometriji iz dvanaestog stoljeća daju nam predodžbu o stanju geometrijskog znanja u sjevernoj Europi. Grčke geometrijske tradicije tek su se počele ponovno uspostavljati. Praktične geometrijske metode koje potječu iz antičkih vremena nisu bile sve strogo ispravne, korištene su samo za izračunavanje geometrijskih veličina u svakodnevnom životu. U južnoj Europi islamski je utjecaj bio jači. Euklidska predanja su bila više dokazivana, kao u djelu Abrahama bar Hiyye. Sljedeći primjer doprinosa geometriji je Leonardo iz Pise, jedan od prvih talijanskih matematičara.

Practica geometriae Leonarda iz Pise

Leonardova *Practica geometriae* (Praktična geometrija) uže je povezana s radom Abrahama bar Hiyye nego s djelom *Artis cuiuslibet consummatio* ili Hughovim djelom. Neki dijelovi gotovo su izravno preuzeti iz *Liber embadorum*, međutim Leonardovo djelo je opsežnije. Kao i u prethodno spomenutoj knjizi Leonardo je započeo popisom različitih Euklidovih definicija, aksioma i teorema, uključujući posebno propozicije iz Knjige II. Tako je u svom djelu o mjerenju pravokutnika u kojem uključuje standardne metode za rješavanje kvadratnih jednadžbi citirao Euklida za opravdanje svojih procedura. Dao je više primjera od Abrahama, uključujući jednadžbe u kojima je koeficijent kvadratnog člana veći od 1. Mnogi njegovi problemi uključuju dijagonalu pravokutnika pri čemu se bavio zbrojevima kvadrata stranica.

Leonardo je poput Abrahama napisao dio o krugovima u kojem je naveo vrijednost $\frac{22}{7}$ za π. Leonardo je uz to pokazao kako izračunati vrijednost broja π Arhimedovim postupkom. Otkrio je da je omjer opsega 96-straničnog mnogokuta opisanog oko kruga prema promjeru kruga jednak 1440 prema $458\frac{1}{5}$, a omjer opsega 96-straničnog mnogokuta upisanog u krug prema promjeru kruga jednako 1440 prema $458\frac{4}{9}$. Naveo je da je $458\frac{1}{3}$ približno između $458\frac{1}{5}$ i $458\frac{4}{9}$. Utvrdio je da je omjer opsega i promjera blizu $1440 : 458\frac{1}{3} = 864 : 275$. Kako je $864 : 274\frac{10}{11} = 3\frac{1}{7} : 1$, Leonardo je dobio Arhimedovu vrijednost za π.

Leonardo je također izračunao površine kružnog isječka i kružnog odsječka. Definirao je sinus luka na standardni način, ali nije dao tablicu funkcija sinus već tablicu duljina tetiva. Reproducirao je Ptolemejev postupak za određivanje tetive cijelog luka ako je zadana polovina luka. Njegova tablica tetiva ipak nije bila ista kao kod Ptolomeja. Leonardova tablica se temelji na polumjeru veličine 21. Poput Abrahamove vrijednosti polumjera 14 ova vrijednost je isto odabrana tako da polukrug kruga bude podijeljen na dijelove cjelobrojnih vrijednosti. Za razliku od Abrahamove tablice, ova tablica je izravna tablica tetiva, odnosno za svaku cjelobrojnu vrijednost duljine luka tablica daje odgovarajuću cjelobrojnu vrijednost duljine tetive (Slika 8). Leonardo je kasnije prikazao kako se pomoću tablice tetiva mogu izračunati lukovi nad tetivama u krugovima polumjera različitog od 21.

Kao i Abraham bar Hiyya, Leonardo je koristio tablicu tetiva samo za izračunavanje površina kružnih isječaka i kružnih odsječaka. Kasnije u istom poglavlju Leonardo je računao duljine stranica i dijagonala pravilnog peterokuta upisanog u krug, ali se nije koristio tablicom tetiva. Vratio se Euklidu i citirao odgovarajuće teoreme iz Knjige XIII koji se odnose na stranice šesterokuta, peterokuta i deseterokuta koji su mu omogućili da izvrši proračune. Pred kraj knjige kad je računao visine opet nije koristio trigonometriju. Koristio se starim metodama sličnih trokuta, počevši od mjera poznatih visina kako bi mu pomogle pri određivanju vrha nepoznatog objekta, a zatim je mjerio odgovarajuće udaljenosti u ravnini.

Trigonometrija

Da se trigonometrija u srednjovjekovnom razdoblju nije koristila za mjerenje ravninskih trokuta, dodatno pokazuju dva trigonometrijska djela iz četrnaestog stoljeća, jedno od Engleza Richarda iz Wallingforda (1291.-1336.), a drugo od francuskog Židova Levija ben Gersona (1288.-1344.). Oba su ova djela imala nešto novo, posebno u metodama računanja podataka u tablicama.

Richard iz Wallingforda bio je redovnik koji je posljednjih devet godina života proveo kao opat u samostanu St. Albans. *Quadripartitum*, četverodijelno djelo o osnovama tri-

Arcus pertice	Arcus pertice	Corde pertice	Ar pedes	Cuu vncie	M puncta	Arcus pertice	Arcus pertice	Corde pertice	Ar pedes	CV vncie	VM puncta
1	131	0	5	17	17	34	98	30	2	6	17
2	130	1	5	17	13	35	97	31	0	8	5
3	129	2	5	17	4+	36	96	31	4	8	7
4	128	3	5	17	2	37	95	32	2	5	15
5	127	4	4	12	10	38	94	33	0	1	9
6	126	5	5	16	7+	39	93	34	3	13	0
7	125	6	5	14	5	40	92	35	1	4	15
8	124	7	5	12	9	41	91	35	4	12	10
9	123	8	5	8	16	42	90	36	2	0	0
10	122	9	5	7	8	43	89	36	5	3	5
11	121	10	5	4	2	44	88	37	2	4	6
12	120	11	4	17	18	45	87	37	5	3	2
13	119	12	4	13	6	46	86	38	1	17	15
14	118	13	4	7	16	47	85	38	4	12	13
15	117	14	4	1	0	48	84	38	1	4	0
16	116	15	3	11	18	49	83	39	3	11	15
17	115	16	3	3	12	50	82	39	5	17	2
18	114	17	2	12	8	51	81	40	2	2	1
19	113	18	2	0	15	52	80	40	4	2	10
20	112	19	1	8	12	53	79	40	0	0	11
21	111	20	0	13	18	54	78	40	1	14	5
22	110	21	0	0	0	55	77	41	3	7	8
23	109	21	5	2	16	56	76	41	4	16	2
24	108	22	4	4	5	57	75	41	0	4	12
25	107	23	3	4	8	58	74	41	1	8	1
26	106	24	2	3	2	59	73	41	2	9	0
27	105	25	1	0	6	60	72	41	3	7	14
28	104	25	5	16	2	61	71	41	4	9+	2
29	103	26	4	8	0	62	70	41	4	15	10
30	102	27	3	0	3	63	69	41	5	6	9
31	101	28	1	9	7	64	68	41	5	12	17
32	100	28	5	16	4	65	67	41	5	6	14
33	99	29	4	3	9	66	66	42	0	0	0

Slika 8: Tablica tetiva Leonarda iz Pise

gonometrije napisao je dok je još bio student na Oxfordu oko 1320. Deset godina kasnije, Richard je ovo djelo revidirao i skratio u drugoj raspravi pod naslovom *De Sectore*. Cilj oba rada kao u većini djela o trigonometriji bio je naučiti metode potrebne za rješavanje problema u sfernoj trigonometriji, što je ujedno bilo potrebno i za astronomiju. Glavni izvor *Quadripartituma* bio je Ptolomejev *Almagest* u kojem su dodani hinduistički sinusi. Dok je Richard revidirao djelo, upoznao se s Jabirovom[1] trigonometrijom. U svom djelu o sfernoj trigonometriji predstavio je gotovo cjelokupnu Jabirovu obradu odmah nakon Ptolomejeve verzije koja se temelji na Menelajevu teoremu.

Richardova obrada Menelajevog teorema, kako u ravninskoj tako i u sfernoj verziji, bila je izuzetno detaljna. Budući da se ovaj teorem bavi odnosima između različitih stranica u Menelajevim konstrukcijama, Richard je prvo trebao razmotriti osnove teorije proporcija. Njegovo proučavanje proporcija usko je povezano s radom nekoliko suvremenika na sveučilištima. Richard je obrađujući Menelajev teorem razmotrio sve moguće slučajeve Menelajevih konstrukcija i svaki put iznova dokazivao rezultat. Iako bi moderni čitatelji njegovo djelo mogli smatrati dosadnim, smatrao je da su takvi detalji neophodni za manje matematički iskusne čitatelje za koje je pisao. U početnim odjeljcima knjige o osnovnim rezultatima ravninske trigonometrije vidi se Richardova predanost strogoj Euklidovoj točnosti dokazivanja dok prolazi kroz sve slučajeve. Matematičko znanje tijekom ranog srednjeg vijeka bilo je na niskoj razini. Kad se uspostavila potreba za više matematike osnovni pojam matematičkog dokaza sve je više oživljavao.

Iako je velik dio Richardovog rada izveden iz ranijih trigonometrijskih znanja, on je predstavio novu metodu izračunavanja $\sin 1^\circ$, vrijednosti koja bolje određuje točnost ta-

[1] Abu Abdallah Mohammad ibn Jabir Al-Battani, Islamski astronom i matematičar.

blice funkcije sinus. Nakon razmatranja Ptolomejeve metode iz *Almagesta* i metode Abū al-Wafā', računao je sve manje i manje lukove. Počevši od $\sin\left(\frac{3}{16}\right)^\circ$ izračunatog po formuli polukuta, koristio se tom formulom za pronalaženje $\sin\left(\frac{3}{32}\right)^\circ$ i $\sin\left(\frac{3}{64}\right)^\circ$. Kasnije pomoću formule zbroja određuje $\sin\left(\frac{63}{64}\right)^\circ = \sin\left(\frac{3}{64}+\frac{15}{16}\right)^\circ$. Slično tome, mogu se naći $\sin\left(1-\frac{1}{256}\right)^\circ$ i $\sin\left(1-\frac{1}{1024}\right)^\circ$ te „na taj način nastaviti čak do 9000. dijela stupnja, čak do beskrajno malog dijela, radeći precizno koliko to želimo."

Trigonometrijsko djelo Levija ben Gersona bilo je otprilike približno s *Quadripartitumom.* Djelo je sadržavalo rasprave o astronomiji koje su kasnije bile dio velikog filozofskog djela, *Sefer Milhamot Adonai.* Levijeva trigonometrija temeljila se uglavnom na Ptolomejevim djelima. Poput Richarda, Levi je pretežno koristio tablicu funkcije sinus nego tablice tetiva. Levi je proveo neko vrijeme baveći se točnošću svojih tablica. Primijetio je da tablice s intervalima od 1° imaju pogreške. Te pogreške su bile neprihvatljive, stoga je odredio vlastite tablice u koracima od $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$.

Levijev glavni odmak od Ptolomeja, a i od Richarda, jest taj što je dao detaljne postupke za određivanje karakteristika (kutovi i duljine stranica) ravninskih trokuta, kada su neke od karakteristika poznate. Prvo je predstavio standardne metode za određivanje karakteristika pravokutnih trokuta, a zatim je prešao na opće trokute. U slučaju da su poznate tri stranice, Levi je odredio trokut spustivši okomicu s jednog vrha na suprotnu stranu (ili nasuprot produženu stranu), a zatim je primjenjivao pravila o kosinusima iz Elemenata II-12 i II-13. Istu metodu primjenjuje i tamo gdje su poznate dvije strane i kut između njih. Za slučaj kada su poznate dvije stranice i kut nasuprot jedne od njih, Levi se koristio pravilom sinusa, ali nije spomenuo moguća dva slučaja. U bilo kojem određenom problemu, jedan od nepoznatih kutova mora biti šiljasti ili tupi, da se može pronaći jedna od karakteristika trokuta. Levi je primijetio da se slučaj gdje su poznata dva kuta i stranica također može riješiti pravilom sinusa.

Levijeve metode nisu bile nove. Iako su se njegovi postupci razlikovali od Jabirovih, takve metode su bile dostupne i u drugim islamskim djelima o trigonometriji. Levijeva kratka rasprava pružila je jedno od najranijih obrada osnovnih metoda za rješavanje ravninskih trokuta dostupnih u Europi. Kao u islamskim radovima i djelima o praktičnoj geometriji, metode koje je Levi izveo korištene su samo za rješavanje sfernih trokuta, a ne za rješavanje ravninskih trokuta.

3 Kombinatorika

Interes za kombinatoriku već se pokazao u indijskim i islamskim izvorima. U srednjovjekovnoj Europi također je bilo interesa za kombinatoriku, prije svega u židovskim zajednicama. Najraniji židovski izvor na ovu temu je djelo *Sefer Yetsirah* (Knjiga stvaranja) napisano prije osmog stoljeća. Nepoznati autor je u djelu izračunao razne načine na koje se mogu složiti 22 slova hebrejske abecede. Zanimala ga je ova računica jer su židovski mističari vjerovali da je Bog stvorio svijet i sve u njemu imenovanjem tih stvari: „Bog ih je nacrtao, spojio, mjerio, izmjenjivao i kroz njih stvorio cijelu kreaciju i sve što je suđeno da bude stvoreno.... Dva kamena [slova] grade dvije kuće [riječi], tri grade šest kuća, četiri grade dvadeset i četiri kuće, pet gradi sto dvadeset kuća, šest gradi sedamsto dvadeset kuća, sedam gradi pet tisuća četrdeset kuća." Autor je shvatio da je broj mogućih permutacija od n slova jednak $n!$. Talijanski rabin Shabbetai Donnolo (913. -970.) vrlo je eksplicitno izveo ovo faktorsko pravilo u komentaru na *Sefer Yetsirah*.

Rad Abrahama ibn Ezre

Autor Sefer Yetsirah ukratko je spomenuo kako izračunati broj kombinacija od dva slova, detaljnije proučavanje kombinacija proveo je rabin Abraham ben Meir ibn Ezra (1090. - 1167.), španjolsko-židovski filozof, astrolog i biblijski komentator. U astrološkom tekstu ibn Ezra je raspravljao o broju mogućih konjunkcija sedam planeta koji se u ono vrijeme poznavalo. Vjerovalo se da će konjunkcije imati snažan utjecaj na ljudski život. Ibn Ezra je tako izračunao C_k^7 za svaki cijeli broj k od 2 do 7 i primijetio je da je ukupni iznos 120. Započeo je s najjednostavnijim slučajem, izračunao je da je broj konjunkcija od dva planeta (kombinacije od dva planeta) jednako 21. Ovaj broj je bio jednak zbroju cijelih brojeva od jedan do šest i mogao se izračunati po pravilu ibn Ezre za zbroj cijelih brojeva od jednog do određenog broja: pomnožite taj broj s njegovom polovinom i zbrojite s polovinom tog broja. U modernom zapisu kombinacije od 2 različita elementa od n-članog skupa možemo zapisati kao

$$C_2^n = \sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1)\left(\frac{n-1}{2}\right) + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Da bi izračunao konjunkcije od tri planeta (kombinacije s tri planeta), ibn Ezra je objasnio: „Počinjemo s postavljanjem Saturna s Jupiterom i s njima još jedan od preostalih planeta. Broj preostalih planeta je pet; pomnoži 5 s njegovom polovinom i dodaj još polovinu od 5. Rezultat je 15, a to su konjunkcije Jupitera." Dakle, postoji $C_2^6 = 15(= 5 \cdot \frac{5}{2} + \frac{5}{2})$ konjunkcija triju planeta od kojih je jedan Jupiter. Slično tome da bi pronašao konjunkcije triju planeta koje uključuju Saturn, ali ne i Jupiter, ibn Ezra je računao broj izbora dva planeta od preostalih pet: $C_2^5 = 10$. Zatim je pronašao konjunkcije triju planeta koje uključuju

Mars ali ne uključuju ni Jupiter ni Saturn i na kraju je zaključio s rezultatom:

$$C_3^7 = C_2^6 + C_2^5 + C_2^4 + C_2^3 + C_2^2 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35.$$

Potom je računao konjukcije od četiri planeta analognim metodama:

$$C_4^7 = C_3^6 + C_3^5 + C_3^4 + C_3^3 = 20 + 10 + 4 + 1 = 35.$$

Ibn Ezra je tada iznio samo rezultate za konjunkcije koje uključuju pet, šest i sedam planeta. U osnovi je dao argument za slučaj $n = 7$, koji se lako može generalizirati na opće kombinatorno pravilo:

$$C_k^n = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{k-1}^i.$$

U kasnijem radu, ibn Ezra je ponovio gornje izračune za C_2^7 i C_3^7 , a zatim je primijetio simetričnost $C_2^7 = C_5^7$ i $C_3^7 = C_4^7$. U svom djelu o aritmetici 1146. godine uveo je Hebrejsku zajednicu u sustav decimalnih vrijednosti. Prvih devet slova hebrejske abecede upotrijebio je za predstavljanje prvih devet brojeva, a zatim je naznačio mjesne vrijednosti brojeva. Upotrebljavao je nulu (koju je napisao kao krug) i koristio je razne algoritme za izračunavanje u hindu-arapskom sustavu.

Levi ben Gerson i Indukcija

Početkom četrnaestog stoljeća, Levi ben Gerson dao je dokaze različitih kombinatornih formula u svom glavnom djelu *Maasei Hoshev* 1321. godine (drugo izdanje napisano 1322. godine). Levijevo djelo podijeljeno je u dva dijela, prvi dio je teorijski u kojem svaki teorem dobiva detaljan dokaz, a drugi dio je "primijenjeni" u kojem su dane izričite upute za izvođenje različitih vrsta izračuna. (U ovom dijelu koristio je ibn Ezrin "hebrejski" sustav vrijednosti mjesta.)

Kao i u bilo kojem matematičkom djelu čitatelj treba imati matematička predznanja, u ovom slučaju predznanja iz knjiga VII, VIII i IX Euklidovih elemenata, "budući da nam u ovoj knjizi nije namjera ponoviti (Euklidove) riječi." Levi je inzistirao na davanju pažljivih dokaza u euklidskom stilu svih svojih rezultata. Najvažniji dijelovi Levijeva djela su kombinatorni teoremi. U tim dijelovima koristio je nešto eksplicitnije metode od svojih islamskih prethodnika, naime osnovnu metodu matematičke indukcije, koju je nazvao procesom „dižući se korak po korak bez kraja“. Kada je Levi koristio takve dokaze, prvo je dokazivao induktivni korak, korak koji omogućuje pomicanje s k na $k + 1$. Kasnije je primjenjivao da proces započinje s nekom malom vrijednošću k, a na kraju daje cjeloviti rezultat. Nigdje nije iznio suvremeni princip indukcije, ali čini se da ga je znao koristiti. Koristio ga je u početku u dva najranija teorema u knjizi, teoremima koji se bave asocijativnosti i komutativnosti množenja.

Propozicija 9 *Ako množimo broj koji je produkt dva broja s trećim brojem, rezultat je isti ako pomnožimo bilo koja dva od ta tri broja s preostalim trećim brojem.*

Propozicija 10 *Ako množimo broj koji je produkt tri broja sa četvrtim brojem, rezultat je isti ako pomnožimo bilo koja tri od ta četiri broja sa preostalim četvrtim brojem.*

U modernom zapisu, prvi rezultat navodi da je $a(bc) = b(ac) = c(ab)$, dok drugi rezultat proširuje taj isti samo na četiri faktora. Dokaz Propozicije 9 uključuje brojanje koliko puta se razni faktori produkta pojavljuju u tom produktu. U dokazu Propozicije 10, Levi je primijetio da $a(bcd)$ sadrži bcd a puta. Budući da se prema Propoziciji 9, bcd može smatrati $b(cd)$, slijedi da produkt $a(bcd)$ sadrži acd b puta. Levi je generalizirao ova dva rezultata na bilo koji broj faktora: „Procesom dižući se korak po korak bez kraja se dokazuje navedeno; to jest, ako se množi broj koji je produkt četiri broja s petim brojem, rezultat je isti kao kad se množi produkt bilo koja od njih četiri s preostalim brojem. Stoga rezultat množenja produkta brojeva bilo kojim drugim brojem sadrži bilo koji od tih brojeva onoliko puta koliki je produkt ostalih." Ovdje vidimo bitnost principa matematičke indukcije. Levi je ponovno upotrijebio isti princip u dokazivanju da je $(abc)d = (ab)(cd)$ i zaključio da se može koristiti isti dokaz za demonstriranje rezultata „dižući se korak po korak bez kraja“: Bilo koji umnožak produkta od dva faktora je broj koji sadrži onoliko puta koliki je produkt preostalih faktora.

Levi kasnije nije bio dosljedan u primjeni svog principa indukcije. U djelu sadrži mnoge teoreme koji se bave zbrojevima različitih nizova cijelih brojeva, teoreme koji se mogu dokazati indukcijom. Za mnoge od njih, Levi se koristio drugim metodama. Dokazujući da je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$ (gdje je n paran broj), upotrijebio je ideju da je zbroj prvog i posljednjeg broja, drugog i pretposljednjeg, i tako dalje, jednak $n+1$. Dokazuje se isti rezultat kada je n neparan broj, napominjući da su ti isti zbrojevi jednaki dvostrukom srednjem cijelom broju. U svom dokazivanju formule za zbroj prvih n kubova, gdje je n cijeli broj, koristio je indukciju na način koji podsjeća na al-Karajijev dokaz. Osnovni induktivni korak je:

Propozicija 41 *Kvadrat zbroja prirodnih brojeva od* 1 *do određenog broja jednak je kubu tog broja zbrojenog kvadratu zbroja prirodnih brojeva od* 1 *do pretposljednjeg zadanog broja. [U modernom zapisu propozicija govori da je* $(1+2+\cdots+n)^2 = n^3 + (1+2+\cdots+(n-1))^2$*]*

Levijev dokaz predstavljamo u modernom zapisu. Prvo zapišemo $n^3 = n \cdot n^2$. Također zapišemo $n^2 = (1+2+\cdots+n) + (1+2+\cdots+(n-1))$. (Rezultat iz Propozicije 30.) Zatim imamo:

$$\begin{aligned} n^3 &= n[(1+2+\cdots+n) + (1+2+\cdots+(n-1))] \\ &= n^2 + n[2(1+2+\cdots+(n-1))]. \end{aligned}$$

Raspišimo $(1+2+\cdots+n)^2$ kao kvadrat zbroja:

$$(1+2+\cdots+n)^2 = n^2 + 2n(1+2+\cdots+(n-1)) + (1+2+\cdots+(n-1))^2.$$

Iz toga slijedi

$$n^3 + (1+2+\cdots+(n-1))^2 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

Levi je primijetio da iako 1 nema broj koji mu prethodi da je " Suma kubova brojeva jednaka kvadratu zbroja prirodnih brojeva do tog broja." Drugim riječima, dao je prvi korak dokaza indukcijom za rezultat naveden kao:

Propozicija 42 *Kvadrat zbroja prirodnih brojeva od 1 do određenog broja jednak je sumi kubova brojeva od 1 do tog broja.*

Levijev dokaz nije baš ono što bismo očekivali od dokaza indukcijom. Umjesto dokazivanja od n do $n+1$, dokazao je, kao i al Karaji, od n do $n-1$. Primijetio je da je $(1+2+\cdots+n)^2 = n^3+(1+2+\cdots+(n-1))^2$. Također vrijedi da je $(1+2+\cdots+(n-1))^2$ prema prethodnoj propoziciji jednako $(n-1)^3+(1+2+\cdots+(n-2))^2$. Nastavljajući na ovaj način, Levi je na kraju dobio $1^2 = 1^3$ i time je dokazao rezultat. Iako je u propoziciji navedeno u smislu proizvoljnog prirodnog broja, u svom dokazu Levi je u prvom koraku napisao samo zbroj od pet brojeva, a ne zbroj od n brojeva. Kao i mnogi njegovi prethodnici, Levi nije imao način da zapiše zbroj proizvoljno mnogo cijelih brojeva, pa se poslužio metodom generaliziranog primjera. Ipak, ideja dokaza indukcijom je očita u Levijevim dokazima.

Induktivni dokazi o permutacijama i kombinacijama također su vidljivi u završnom dijelu teorijskog djela *Maasei Hosheva*. Levijev prvi rezultat u završnom dijelu knjige pokazao je da je broj permutacija određenog broja od n elemenata ono što nazivamo $n!$.

Propozicija 63 *Ako je broj permutacija određenog broja različitih elemenata jednak zadanom broju, tada je broj permutacija skupa različitih elemenata koji sadrže još jedan broj jednak umnošku permutaciji prethodnog broja i tog sljedećeg zadanog broja elemenata.*

Propozicija iskazuje da je $P_{n+1} = (n+1)P_n$ (gdje P_k predstavlja broj permutacija skupa od k elemenata). Rezultat $P_n = n!$ pruža induktivni korak u dokazu propozicije, iako je Levi taj rezultat spomenuo tek na kraju dokaza. Njegov dokaz Propozicije 63 bio je vrlo detaljan. S obzirom na permutaciju $abcde$ prvobitnih n elemenata i novog elementa f, primijetio je da je $fabcde$ permutacija novog skupa. Budući da postoje P_n permutacije prvobitnog skupa, postoje i P_n permutacije novog skupa koje počinju sa f. Ako je jedan od prvobitnih elemenata, na primjer e, zamijenjen novim elementom f, postoje P_n permutacije skupa a, b, c, d, f, a time postoje i P_n permutacije novog skupa sa e na prvom mjestu. Budući da se bilo kojem početnom skupu od n elemenata može dodati novi element, slijedi da je broj permutacija novog skupa $(n+1)P_n$. Levi je završio dokaz Propozicije 63 pokazujući da su sve $(n+1)P_n$ permutacije različite. Zatim je zaključio: „Dakle, dokazano je da je broj permutacija određenog skupa elemenata jednak onom broju koji nastaje množenjem prirodnih brojeva od 1 do broja danih elemenata. Broj permutacija 2 elementa je 2, a to je jednako $1 \cdot 2$, broj permutacija 3 elementa jednak je $3 \cdot 2$, što je jednako $1 \cdot 2 \cdot 3$, i tako dalje nastavljamo ovim postupkom, beskrajno." Levi je spomenuo početni korak, a zatim je primijetio da se s već dokazanim induktivnim korakom dokazuje i cjelovit rezultat.

Nakon što je brojanjem dokazao da je $P_2^n = n(n-1)$ (gdje P_k^n predstavlja broj permutacija k-tog reda u skupu od n elemenata), Levi je dokazao da je $P_k^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ indukcijom po k. Kao i prije, naveo je induktivni korak kao propoziciju.

Propozicija 65 *Ako je zadan određeni broj elemenata, broj koji je različit i manji od zadanog broja elemenata (j) i broj permutacija tog broja (j) u skupu zadanih elemenata. Tada je broj permutacija još jednog dodanog elementa tom broju (j) u skupu zadanih elemenata jednak broju koji je umnožak broja permutacija tog broja (j) u skupu zadanih elemenata i razlike između zadanog broja elemenata i tog broja (j).*

Suvremenim zapisom Levijevu složenu propoziciju zamjenjujemo kratkom formulom: $P_{j+1}^n = (n-j)P_j^n$. Levijev dokaz prilično je sličan onome iz Propozicije 63. Na kraju je naveo cjelovit rezultat: „Tako je dokazano da su permutacije određenog broja u zadanom broju elemenata jednake broju nastalom množenjem broja cijelih brojeva u njihovom prirodnom slijedu koji ide od određenog broja i završava zadanim brojem elemenata.” Da bi pojasnio svoj iskaz, Levi je prvo dao početni korak indukcije navodeći svoj prethodni rezultat za slučaj $n = 7$, tj. broj permutacija reda 2 u skupu od 7 elemenata jednak je $6 \cdot 7$. Tada je broj permutacija reda 3 u skupu od 7 elemenata jednak $5 \cdot 6 \cdot 7$. Slično tome, broj permutacija reda 4 jednak je $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, "i tako se dokazuje za bilo koji broj.”

U posljednje tri propozicije teorijskog dijela *Maasei Hosheva*, Levi je dovršio svoj razvoj formula za permutacije i kombinacije. U Propoziciji 66 dokazano je da je $P_k^n = C_k^n \cdot P_k^k$, dok je Propoziciju 67 jednostavno modificirao kao $C_k^n = \frac{P_k^n}{P_k^k}$. Budući da je već dao formule za brojnik i nazivnik ovog razlomka, Levi je tako pokazao i standardnu formulu za C_k^n:

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

I na kraju, Propozicijom 68 je iskazano $C_k^n = C_{n-k}^n$.

Levi je u drugom dijelu svoje knjige dao primjere mnogih od ovih rezultata. Primijetio je da se za određivanje zbroja kubova brojeva od 1 do 6 prvo izračuna da je zbroj samih brojeva 21 i stoga je zbroj kubova kvadrat od 21, odnosno 441. Da se pronađe broj permutacija pet elemenata od skupa osam elemenata, P_5^8 , množi $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ te dobije rezultat 6720. Kako bi dobili broj kombinacija pet elemenata od osam, odnosno C_5^8, 6720 dijelimo s $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ te dobivamo rezultat 56.

Na kraju drugog dijela knjige, Levi je iznio niz zanimljivih problema, naizgled "praktičnih", a većina njih se mogla riješiti znanjem omjera i razlomaka. Ti problemi postaju sve teži, ali Levi je dao detaljno objašnjenje rješenja za svaki od njih. Neki od problema nalaze se u sljedećem poglavlju.

4 Srednjovjekovna algebra

Iako se čini da se teorija kombinatorike razvila u Europi kroz židovska predanja, za algebarske pisce u srednjovjekovnoj Europi može se reći da su bili izravni nasljednici islamskih djela.

Liber Abbaci **Leonarda iz Pise**

Jedan od najranijih europskih pisaca o algebri bio je Leonardo od Pise, najpoznatiji po svom remekdjelu *Liber Abbaci* (Knjiga računanja). Prvo izdanje ovog djela pojavilo se 1202. godine, dok je 1228. godine objavljeno prerađeno izdanje. Mnogi sačuvani rukopisi svjedoče o širokom čitateljstvu koje je knjiga imala. Izvori *Liber Abbacija* uglavnom su bili iz islamskog svijeta, koje je Leonardo posjećivao tijekom mnogih putovanja, ali je uvećao i uredio materijal kroz vlastito znanje. Knjiga ne sadrži samo pravila za računanje s novim hindu-arapskim brojevima, već i brojne probleme raznih vrsta u praktičnim temama kao što su izračunavanje dobiti, pretvorbe valuta i mjerenja. Također je knjiga još dopunjena s tada standardnim temama trenutnih algebarskih tekstova kao što su problemi sa smjesama, problemi kretanja, problemi s posudama, kineski teorem o ostacima i, na kraju, različiti oblici problema koji se mogu riješiti pomoću kvadratnih jednadžbi. Među problemima se nalazi ograničena količina teorije, poput metode zbrajanja nizova, geometrijskih dokaza kvadratnih formula, pa čak i kratke rasprave o negativnim brojevima.

Leonardo je u rješavanju problema koristio razne metode. Češće je koristio posebne postupke konstruirane da odgovaraju određenom problemu nego postupke za općenitije metode. Jedna od osnovnih često korištenih metoda je stara egipatska metoda "lažne pretpostavke" u kojoj se najprije daje prikladan, ali pogrešan odgovor, a zatim se odgovor prilagođava kako bi se dobio točan rezultat. Slično tome, koristio je metodu "dvostruke lažne pretpostavke", metodu koja potječe iz Kine, ali se koristila i u srednjovjekovnom islamu. Za mnoge probleme moguće je citirati Leonardove izvore. Često je doslovno uzimao probleme od islamskih matematičara kao što su al-Khwarizmi, Abu Kamil i al Karaji, od kojih je mnoge pronašao u arapskim rukopisima otkrivenim na njegovim putovanjima. Neki problemi su u konačnici došli iz Kine ili Indije, ali Leonardo ih je vjerojatno naučio u arapskim prijevodima. Većina problema ima njegovo vlastito razmišljanje, kojim pokazuje vlastite kreativne sposobnosti. Nekoliko Leonardovih problema i rješenja iz *Liber Abbacija* daju veliku bitnost tom najutjecajnijem matematičkom djelu.

Leonardo je započeo svoj tekst uvodeći hindu-arapske brojeve: „Devet indijskih brojeva su $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ i znak 0 kojeg Arapi zovu *šifra*, bilo koji broj koji god je napisan." Zatim je precizno dao imena raznim mjestima u sustavu mjesnih vrijednosti (samo za cijele brojeve). Leonardo se bavio raznim algoritmima za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje cijelih brojeva i uobičajenih razlomaka. Njegov zapis mješovitih brojeva brojeva razlikovao se od našega po tome što je prvo pisao razlomački dio pa tek onda cijeli dio, ali njegovi algoritmi su uglavnom bliski onima koje danas koristimo. Na primjer, da bi podijelio 83 s $5\frac{2}{3}$ (ili, kako on piše, $\frac{2}{3}5$), Leonardo je pomnožio 5 s 3 i dodao 2, dobivajući 17. Zatim je 83 pomnožio s 3, dobivajući 249 i na kraju podijelio 249 sa 17 , dobivajući $14\frac{11}{17}$. Da bi zbrojio $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$ sa $\frac{1}{10}+\frac{2}{9}$, Leonardo je pomnožio prva dva nazivnika, 4 i 5, da bi dobio 20, a zatim pomnožio 20 s nazivnikom 9 da bi dobio 180. Množenje s 10 bilo je nepotrebno jer je 10 već faktor od 180. Tada je $\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\right)$ puta 180 jednako 171, dok je $\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{9}\right)$ puta 180 jednako 58. Zbroj ova dva rezultata je 229, što je zatim podijelio sa 180 da bi se dobio konačni rezultat, $1\frac{49}{180}$. Leonardo je odgovor napisao u obliku $\frac{1\,6\,2}{2\,9\,10}1$, pod kojim je mislio $1+\frac{1}{2\cdot 9\cdot 10}+\frac{6}{9\cdot 10}+\frac{2}{10}$. Ova posljednji zapis smatra se da potječe iz pizanskog monetarnog sustava. Leonardo je svojim metodama učinkovito pokazao kako provoditi zamršene izračune potrebne za pretvorbu među mnogim valutama, koje su se u njegovo vrijeme koristile na Mediteranu.

Leonardo je predstavio nekoliko metoda za klasične probleme kupnje ptica. Pitao se kako kupiti 30 ptica za 30 novčića, ako jarebice koštaju po 3 novčića, golubovi po 2 novčića i dva vrapca za 1 novčić. Započeo je računajući da je mogao kupiti 5 ptica za 5 novčića uzimajući 4 vrapca i 1 jarebicu. Slično tome, 2 vrapca i 1 golub daju mu 3 ptice za 3 novčića. Pomnoživši prvu transakciju s 3, a drugu s 5, dobio je 12 vrabaca i 3 jarebice za 15 novčića te 10 vrabaca i 5 golubova također za 15 novčića. Zbrajanjem ove dvije transakcije dobije se željeni odgovor: 22 vrapca, 5 golubova, 3 jarebice.

Još jedan klasični problem je problem lava u špilji: Špilja je duboka 50 metara. Lav se penje $\frac{1}{7}$ metra svaki dan, a svake noći pada $\frac{1}{9}$ metra natrag. Koliko će mu trebati dana da se popne iz špilje? Leonardo je ovdje koristio metodu "lažne pretpostavke". Pretpostavio je da je odgovor 63 dana, budući da je 63 djeljivo sa 7 i 9. Tako će se za 63 dana lav popeti za 9 metara i pasti za 7 metara, odnosno popet će se za 2 metra. Prema proporcionalnosti, lavu će trebati 1575 dana da se popne na 50 metara. (Leonardov odgovor nije točan. Na kraju 1571. dana, lav će biti $\frac{8}{63}$ metra od vrha. Sljedećeg će dana doći do vrha.)

Za kineski problem o ostacima, Leonardo je tražio da se pronađe broj koji kada se podijeli s 2 ima ostatak 1, s 3 ima ostatak 2, sa 4 ima ostatak 3, s 5 ima ostatak 4, sa 6 ostatak 5 i sa 7 ostatak 0. Da bi to riješio, primijetio je da je 60 djeljivo sa $2, 3, 4, 5$ i 6. Stoga je $60-1=59$ zadovoljilo prvih pet uvjeta kao i bilo koji višekratnik od 60, umanjen za 1. Morao je pronaći višekratnik od 60 koji je imao ostatak 1 pri dijeljenju sa 7. Najmanji takav broj je 120, pa je prema tome 119 traženi broj. (Ovaj problem je dva stoljeća ranije postavio ibn al-Haytham.)

Negativni brojevi pojavljuju se u jednom od Leonardovih brojnih problema s vrećom novca koju pronađe određen broj muškaraca. U ovom konkretnom problemu postoji 5 muškaraca. Iznos kojeg prvi muškarac ima ako vreća s novcem pripadne njemu je $2\frac{1}{2}$ puta veća od ukupnog iznosa kojeg trenutno imaju ostala četvorica. Iznos drugog muškarca je $3\frac{1}{3}$ puta veći od ukupnog iznosa kojeg imaju ostali. Analogno tome za trećeg, četvrtog i petog muškarca ($4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{5}$, $6\frac{1}{6}$). Traži se koliko novca ima pojedini muškarac i koliko novca ima u vreći. Leonardo je razradio problem i otkrio da je jedini način na koji se to može riješiti je da pretpostavimo da je prvi muškarac u minusu od 49154. U nekoliko drugih problema dao je i negativne odgovore, čak je pokazao i razumijevanje osnovnih pravila za zbrajanje i oduzimanje s tim brojevima.

Leonardo je koristio razne metode za rješavanje svojih problema, ali u kasnijim poglavljima knjige težio je metodama koje su izričito algebarske. Arapima je pripisao zaslugu onoga što je nazvao "izravnom" metodom rješavanja, metodom koja uključuje postavljanje jednadžbe, a zatim pojednostavljivanje u skladu sa standardnim pravilima. Na primjer, pretpostavimo da dvojica muškaraca imaju novaca, te jedan kaže drugome: Ako mi date 7 svojih *denariusa*[2], tada ću imati pet puta više od vas. Drugi je rekao prvom, ako mi date 5 *denariusa*, tada ću imati sedam puta više od vas. Leonardo je započeo rješavati pretpostavljajući da drugi čovjek ima *stvar*[3] plus 7 *denariusa*. Tada prvi čovjek ima pet *stvari* minus 7 *denariusa*. Ako prvi tada drugom da još 5, imat će pet *stvari* minus 12, dok će drugi čovjek imati *stvar* plus 12 *denariusa*. Jednadžba je tada "jedna *stvar* i 12 *denariusa* jednako sedam puta pet *stvari* minus 12 *denariusa*." Leonardo je tada riješio jednadžbu i dobio da je $x = 2\frac{14}{17}$, prema tome drugi čovjek je imao $9\frac{14}{17}$ *denariusa*, dok je prvi imao $7\frac{1}{7}$ *denariusa*.

Leonardo se također rješavao probleme s više od dvije nepoznanice. Na primjer, pretpostavimo da postoje četvorica muškaraca takvih da prvi, drugi i treći zajedno imaju 27 *denariusa*, drugi, treći i četvrti zajedno imaju 31, treći, četvrti i prvi imaju 34, dok četvrti, prvi i drugi imaju 37. Da bi se utvrdilo koliko ima svaki čovjek, potrebno je riješiti sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice. Leonardo je to postigao zbrajanjem četiri jednadžbe kako bi utvrdio da je svota novca 129 *denariusa*. Pojedinačni iznosi tada se lako izračunavaju. U sličnom problemu koji se svodi na sustav četiri jednadžbe $x + y = 27$, $y + z = 31$, $z + w = 34$, $x + w = 37$, Leonardo je primijetio da je ovaj sustav nemoguće riješiti jer postoje dva različita načina računanja ukupne svote novca koje daju dva različita odgovora, 61 i 68. Ako se četvrta jednadžba promijeni u $x + w = 30$, jednostavno se može proizvoljno odabrati x ($x \leq 27$) i izračunati y, z i w pomoću prve, druge i treće jednadžbe.

Najpoznatiji problem u *Liber Abbaci* je problem zečeva: „Koliko parova zečeva reproducira jedan par zečeva u jednoj godini? Čovjek je imao jedan par novorođenih zečeva na zatvorenom mjestu, želio je znati koliko će imati mladih zečeva u jednoj godini ako su zečevi dovoljno stari za oplodnju nakon jednog mjeseca te dobivaju par mladih zečeva svaki sljedeći mjesec". Leonardo je računao: Nakon prvog mjeseca bit će dva para, nakon drugog mjeseca bit će tri para. U trećem mjesecu će biti nova dva para, pa će na kraju tog mjeseca biti pet parova. U četvrtom mjesecu će biti tri nova para, pa će ih biti osam na kraju tog mjeseca. Nastavljajući na ovaj način, pokazao je da će do kraja dvanaestog mjeseca biti 377 parova. Navodeći niz $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$, primijetio je da se svaki broj pronalazi dodavanjem dva prethodna broja. Ovaj niz, izračunat rekurzivno, danas je poznat kao Fibonaccijev niz.

U svom posljednjem poglavlju Leonardo je pokazao potpuno vladanje algebrom svojih islamskih prethodnika. Pokazao je kako se rješavaju jednadžbe koje se na kraju svode na kvadratne jednadžbe. Raspravljao je o svakoj od šest osnovnih vrsta kvadratnih jednadžbi koje je dao al-Khwarizmi. Slijedio je dokaze većinom preuzete iz djela al-Khwarizmija i Abu Kamila.

Liber Abbaci nije sadržavao nikakav poseban napredak u odnosu na matematička djela koja su tada bila u islamskom svijetu. Što se tiče algebre, Leonardo je samo predstavljao islamsku matematiku iz desetog stoljeća. Zanemario je napredak jedanaestog i dvanaestog stoljeća. Glavna vrijednost djela bila je u tome što je pružilo prvi sveobuhvatan europski uvod

[2] antički rimski srebrni novčići

[3] nepoznati broj

u islamsku matematiku. Oni koji su čitali djelo dobili su širok izbor metoda za rješavanje matematičkih problema, metoda koje su pružale polaznu točku od koje se u konačnici može postići daljnji napredak.

Liber Quadratorum

Još jedno djelo koje je Leonardo napisao je *Liber quadratorum* (Knjiga kvadrata) iz 1225. godine, kraće je i ima više teorije od *Liber Abbaci.* Ovo je knjiga o teoriji brojeva, u kojoj je Leonardo raspravljao o rješavanju različitih kvadratnih jednadžbi koje uključuju racionalne brojeve. Knjiga je nastala zbog pitanja koje je Leonardu postavio učenjak Ivan iz Palerma, član pratnje Rimskog cara Fridrika II. Prema Leonardu, Ivan je predložio pitanje: „pronađi kvadratni broj iz kojeg, kad se zbroji ili oduzme pet, uvijek ponovo dobiva kvadratni broj." Odnosno treba pronaći x, y, z, tako da je $x^2+5=y^2$ i $x^2-5=z^2$, problem je riješen kao sedamnaesta propozicija knjige, ali prije toga Leonardo je razvio različita svojstva kvadratnih brojeva i svojstva zbrojeva kvadratnih brojeva. Ivan je bio matematičar i arapski učenjak koji se s ovim problemom upoznao i ranije iz djela al-Karajija.

Da bi riješio problem Leonardo je uveo takozvane kongruentne brojeve, brojeve n, oblika $ab(a+b)(a-b)$ kada je $a+b$ parno i $4ab(a+b)(a-b)$ kada je $a+b$ neparno. Pokazao je da su kongruentni brojevi uvijek djeljivi s 24 i da se cjelobrojna rješenja $x^2+n=y^2$ i $x^2-n=z^2$ mogu naći samo ako je n kongruentan. Izvorni problem stoga nije rješiv u cijelim brojevima. Budući da je $720 = 12^2 \cdot 5$ kongruentan broj ($a = 5$ i $b = 4$) i budući da je $41^2 + 720 = 49^2$ i $41^2 - 720 = 31^2$, dijeljenjem obje jednadžbe sa 122 slijedi da je $x = \frac{42}{12}$, $y = \frac{49}{12}$, $z = \frac{31}{12}$ rješenje u racionalnim brojevima za $x^2 + 5 = y^2$, $x^2 - 5 = z^2$. Leonardove metode razlikuju se od metoda al-Karajija, iako se dobiva isti odgovor, ali su slične onima u drugim islamskim raspravama o teoriji brojeva iz istog razdoblja.

Jasno je da je Leonardo svladao islamsku matematiku koju je naučio na putovanjima i prenosio svoje znanje svojim europskim nasljednicima. S obzirom na teoriju brojeva *Liber Quadratoruma*, Leonardo nije imao nasljednika sve do nekoliko stoljeća kasnije kada je Diofantova *Arithmetica* bila dostupna u Europi. Praktične materijale u *Liber Abbaci* i *Practica geometriae* pokupili su talijanski geodeti i stručnjaci računanja (*maestri d'abbaco*), koji su u sljedećih nekoliko stoljeća utjecali na donošenje obnovljenog smisla za matematiku u Italiju. Trebalo je punih 300 godina da se obnovljeno matematičko znanje poveća do točke u kojoj su uvjeti u Italiji bili dovoljno napredni da se stvori nova matematika.

Jordanus de Nemore

Jedan od prvih matematičara koji je učinio napredak u odnosu na Leonardov rad bio je suvremenik Jordanus de Nemore. Iako se o samom autoru ne zna gotovo ništa, vjeruje se da je predavao u Parizu oko 1220. godine. Njegova djela uključuju nekoliko djela iz aritmetike, geometrije, astronomije, mehanike i algebre. Smatra se da je radio i na stvaranju latinske verzije kvadrivija, temeljene na njegovu radu o aritmetici. Jordanusova *Arithmetica* bila je daleko drugačija od Boethiusove aritmetike, koja je tada široko kružila Europom. Jordanusovo djelo čvrsto se temeljilo na euklidskom modelu, s definicijama, aksiomima, postulatima, propozicijama i pažljivim dokazima. Poput Euklida, Jordanus nije dao nijedan numerički primjer.

Arithmetica, djelo u 10 knjiga, obrađivalo je teme kao omjer, prosti i složeni brojevi, Euklidov algoritam i geometrijske algebarske propozicije iz Elemenata, knjige II. Također je uzeo u obzir mnoštvo drugih radova koji nisu pronađeni kod Euklida, uključujući figurativne brojeve i detaljno proučavanje omjera. Najzanimljiviji su radovi koji nisu pronađeni u grčkim izvorima. U knjizi VI Jordanus je riješio problem koji je gotovo identičan središnjem problemu Leonardove Knjige kvadrata:

Propozicija VI-12 *Pronađi tri kvadratna broja čije su razlike redom jednake.*

Jordanus je u modernim zapisu želio odrediti y^2, x^2 i z^2 tako da je $y^2 - x^2 = x^2 - z^2$. Njegovo rješenje svodilo se na postavljanje:

$$y = \frac{a^2}{2} + ab - \frac{b^2}{2}, \quad x = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad z = \frac{b^2}{2} + ab - \frac{a^2}{2},$$

gdje su a i b iste parnosti. Za razliku od Leonarda, Jordanusa su samo zanimala rješenja u cijelim brojevima, ali nije dao nijedan primjer. Može se direktno vidjeti da je razlika kvadrata u Jordanusovom teoremu kongruentan broj prema Leonardovoj definiciji.

Jordanusova *Arithmetica* bila je široko čitana, sudeći po broju sačuvanih rukopisa. Slično tome, njegovo glavno djelo o algebri, *De numeris datis* (O danim brojevima), također je imalo veliku utjecaj u srednjovjekovnoj Europi. *De numeris datis* je analitičko djelo o algebri, koje se temelji na islamskim djelima iz algebre koja je stigla u Europu početkom trinaestog stoljeća. Oblikovano je po uzoru na Euklidova djela koja su bila dostupna na latinskom prijevodu od Gerarda iz Kremone. Problemi u *De numeris datis* prije su algebarski nego geometrijski. Jordanusovi dokazi su također algebarski ili čak aritmetički. Jedan od njegovih ciljeva bio je temeljiti novu algebru na aritmetici, a ne na geometriji. Svoju knjigu također je organizirao na logičan način, u velikom odstupanju od euklidskog modela. Pružio je numeričke primjere za većinu svojih teorijskih rezultata za razliku od svoje *Arithmetice*.

Iako su mnogi stvarni problemi i numerički primjeri bili dostupni u islamskim djelima, Jordanus ih je prilagodio vlastitim potrebama. Napravio je veliku promjenu u korištenju slova kako bi označio proizvoljne brojeve. Jordanusova algebra više nije bila posve retorička, ali to ne znači da je njegova simbolika izgledala moderno. Birao je slova abecednim redom, bez razlike između slova koja predstavljaju poznate veličine i onih koje predstavljaju nepoznanice, a za operacije nije koristio nikakve simbole. Ponekad je jedan broj predstavljen s dva slova. Inače je par slova ab predstavljao zbroj dvaju brojeva a i b. Osnovne računske radnje uvijek su bile napisane riječima. Jordanus se nije služio novim hindu-arapskim brojevima, svi njegovi brojevi napisani su kao rimski brojevi. Ipak, ideja simbolizma koju je koristio bila je presudna za bilo kakav veliki napredak u algebarskim metodama rada.

Da bi razumjeli Jordanusov doprinos, uzimamo u obzir nekoliko propozicija iz djela. Poput Euklida, Jordanus je svaku propoziciju napisao u standardnom obliku. Nakon općeg iskazivanja uslijedilo je prepravljanje slovima. Korištenjem općih pravila podešavao je slova koja predstavljaju brojeve u kanonski oblik, iz kojih se lako može pronaći opće rješenje.

Propozicija I-1 *Ako je zadani broj podijeljen u dva dijela čija je razlika dana, tada je određen svaki od dijelova.*

Jordanusov dokaz je bio direktan: „Manji dio i razlika čine veći dio. Dva manja dijela i razlika čine cjelinu. Oduzmi razliku od cjeline i ostat će dvostruko više od manjeg dijela. Kada se podijeli s dva, odredit će se manji dio; pa prema tome i veći dio. Na primjer, neka se 10 razdvoji na dva dijela od kojih je razlika 2. Kada se 2 oduzme od 10, ostaje 8, čija je polovica 4, što je dakle manji dio. Drugi dio je 6."

U modernom zapisu Jordanusov problem prikazan je kao rješenje sustava dviju jednadžbi $x + y = a$, $x - y = b$. Jordanus je prvo primijetio da je $y + b = x$, slijedi da je $2y + b = a$ pa prema tome $2y = a - b$. Dakle, $y = \frac{1}{2}(a - b)$ i $x = a - y$.

Jordanus se koristio ovom početnom tvrdnjom u mnogim preostalim problemima iz Knjige I.

Propozicija I-3 *Ako je zadani broj podijeljen u dva dijela i dan je njihov umnožak, tada je određen svaki od ta dva dijela.*

Ova propozicija predstavlja jedan od standardnih babilonskih problema: $x+y = m$, $xy = n$. Jordanusova metoda rješenja razlikuje se od klasičnog babilonskog rješenja pri kojem je upotrijebio svoju simboliku: Pretpostavimo da je zadani broj abc podijeljen na dijelove ab i c. Pretpostavimo da je $ab \cdot c = d$, a $abc \cdot abc = e$. Neka je $f = 4d$, a $g = e - f$. Tada je g kvadrat razlike između ab i c. Korijen iz g je razlika između ab i c. Budući da sada imamo i zbroj i razliku od ab i c, ab i c se određuju prema prvoj propoziciji. Dao je numerički primjer, 10 kao zbroj dva dijela, a 21 kao produkt. Primijetio je da je $84 = 4 \cdot 21$, da je $100 = 10^2$ i da je 16 njihova razlika. Tada je korijen iz 16 jednako 4, razlika dva dijela koja tvore 10. Dokazom po prvoj propoziciji 4 se oduzima od 10 da bi se dobilo 6. Tada je 3 željeni manji dio dok je 7 veći dio.

Jordanusovo rješenje napisano u modernom zapisu je $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = m^2 - 4n$. Treba odrediti $x - y$ te nakon toga reducirati problem na Propoziciju I-1. Rješenje je tada $y = \frac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 - 4n})$, $x = m - y$. Metoda koju koristi je sasvim nova i nastavio ju je koristiti tijekom rada. Za rješenja problema u Knjizi I koristio se metodama koje se razlikuju od standardnih islamskih metoda. Numerički primjeri imaju poznati izgled, svaka propozicija u Knjizi I bavi se brojem podijeljenim u dva dijela, a u svakom primjeru broj koji treba podijeliti je 10. Metode rješenja mogu se donekle razlikovati od onih u islamskim tekstovima, ali je jasno da su se al-Khwarizmijevi problemi i dalje koristili.

Mnoge su se propozicije u preostale tri knjige Jordanove rasprave bavile brojevima u zadanom omjeru. Pokazale su njegovo znanje o pravilima omjera koja se nalaze u V i VII knjizi Euklidovih elemenata, od kojih se većina također nalazi u njegovoj *Arithmetici* u V. i VI. knjizi. Promotrimo sljedeću propoziciju:

Propozicija II-18 *Ako se zadani broj podijeli na koliko god dijelova i ako su zadani omjeri tih dijelova prema zadanom broju, tada je određen svaki od tih dijelova.*

Budući da Jordanus, poput svojih suvremenika, nije imao načina izraziti proizvoljno mnogo "dijelova", u svom dokazu bavio se brojem podijeljenim u tri dijela: $a = x + y + z$ gdje su omjeri $x : y = b$ i $y : z = c$ poznati. Dodatno je primijetio da su uz ove omjere poznati i omjeri $x : z$, $x : y + z$ i $a : x$. Budući da je a poznato, može se odrediti x, a zatim y i z. Njegov primjer omogućuje nam da slijedimo njegov zapis. Broj 60 podijeljen je u tri dijela, od kojih je prvi dvostruko veći od drugog, a drugi trostruko veći od trećeg. Odnosno, $x + y + z = 60$, $x = 2y$, $y = 3z$. Tada je $x = 6z$ te prema tome $y + z = \frac{2}{3}x$, slijedi da je $60 = (1\frac{2}{3})x$, odnosno $x = 36$, $y = 18$, $z = 6$. Primjećuje se da je Jordanus po potrebi lako koristio omjere i također ih znao kombinirati.

Među propozicijama iz Knjige IV nalaze se tri propozicije koje daju tri standardna oblika kvadratne jednadžbe. Sva tri oblika su predstavljena s algebarskim, a ne geometrijskim obrazloženjima. Za ove probleme Jordanus se poslužio standardnim islamskim algoritmima, ali s vlastitom simbolikom. Promotrimo sljedeću propoziciju:

Propozicija IV-9 *Ako je kvadrat broja dodan zadanom broju jednak broju dobivenom množenjem korijena kvadriranog broja i drugog zadanog broja, tada su moguća dva rješenja.*

Jordanus utvrdio da postoje dva rješenja jednadžbe $x^2 + c = bx$. Zatim je dao postupak za rješavanje jednadžbe: Uzmite polovicu od b, kvadrirajte je da dobijete f i neka je g razlika x i $\frac{1}{2}b$, tj. $g = \pm(x - \frac{1}{2}b)$. Zatim je $x^2 + f = x^2 + c + g^2$ odnosno $f = c + g^2$. Jordanus je zaključio da se x može dobiti oduzimanjem g od $\frac{b}{2}$ ili dodavanjem g sa $\frac{b}{2}$, tj.

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Njegov primjer pojasnio je njegov simbolički postupak. Da bi riješio $x^2 + 8 = 6x$, kvadrira polovinu od 6, dajući 9, a zatim je od 9 oduzeo 8, ostavljajući 1. Korijen iz 1 je 1, dakle, x može biti $3 - 1 = 2$ ili $3 + 1 = 4$.

Među ostalim kvadratnim problemima koje je Jordanus riješio u Knjizi IV su sustavi $xy = a$, $x^2 + y^2 = b$ i $xy = a$, $x^2 - y^2 = b$. U svakom od problema, kao i u svim prethodnim slučajevima, primjer koji je zadao rezultira cjelobrojnim pozitivnim rješenjem. Iako je Jordanus često koristio razlomke kao dio svojih rješenja, pažljivo je uređivao razlomke tako da su konačni odgovori uvijek bili cijeli brojevi. Da je proučavao *Algebru* Abu Kamila, koja je bila dostupna na latinskom, Jordanus bi vidio rješenja za ovu vrstu problema koja nisu u skupu cijelih i racionalnih brojeva. Izmišljao je svoje primjere te na taj način direktno izbacio mogućnost takvih rješenja. S obzirom na njegov formalni stil, Jordanus je možda još uvijek bio pod Euklidovim utjecajem i smatrao je da iracionalni "brojevi" jednostavno ne pripadaju dijelu temeljenom na aritmetici. Iako je *De numeris datis* predstavljao napredak iz islamskih djela u korištenju analize, u neprestanom stremljenju prema općenitosti i nekoj simbolizaciji, vratio se strogom grčkom načinu rada, idejama koje su Jordanusovi islamski prethodnici već bili odradili. Stoga se čini da, iako je Jordanus koristio noviji islamski materijal dostupan u Europi, njegov je cilj bio pružiti matematiku koja se temelji što je više moguće na grčkim načelima.

5 Kinematika

Algebarski rad Jordanusa de Nemorea nije se dalje razvijao u trinaestom stoljeću, iako se skupina sljedbenika pojavila u Parizu sredinom tog stoljeća. Europa tada nije bila spremna nastaviti proučavanje čiste matematike. Početkom četrnaestog stoljeća neki drugi aspekti matematike počeli su se razvijati na sveučilištima u Oxfordu i Parizu iz pokušaja razjašnjavanja određenih napomena u Aristotelovim raspravama vezanim uz fiziku.

Proučavanje omjera

Jedna od novih matematičkih ideja proizašla je iz nastojanja da se izvede odnos između sile F koja djeluje na tijelo, otpora tijela R i brzine tijela v. Osnovni postulat srednjovjekovne fizike bio je da F mora biti veći od R da bi se kretanje odvijalo. Najjednostavniji odnos između ovih veličina koji je definiran Aristotelovim riječima može se izraziti iskazom da je $\frac{F}{R}$ proporcionalno v-u. Ovaj matematički odnos brzo dovodi do kontradikcije postulata. Jer ako F ostane fiksno, stalno udvostručenje R-a jednako je stalnom prepolovljavanju v-a. Prepolovljena pozitivna brzina i dalje ostaje pozitivna, ali udvostručenje otpora na kraju čini otpor većim od sile, što je kontradikcija da sila mora biti veća od otpora da bi se kretanje tijela odvijalo.

Thomas Bradwardine (1295.-1349.) s fakulteta Merton u Oxfordu, u svom radu „*Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus*“ (Traktat o proporcijama brzina u kretanju) iz 1328. godine predložio je rješenje ove dileme, odnosno „ispravno“ tumačenje Aristotelovih riječi. Spomenuto pravilo podrazumijeva da je za dvije sile F_1, F_2, dva otpora R_1, R_2 i dvije brzine v_1, v_2 zadovoljena jednakost

$$\frac{F_2}{R_2} = \frac{v_2}{v_1}\frac{F_1}{R_1}.$$

Bradwardine je predložio da to treba zamijeniti odnosom izraženim u modernijem zapisu kao:

$$\frac{F_2}{R_2} = \left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{\frac{v_2}{v_1}}.$$

Drugim riječima, multiplikativni odnos trebao bi biti zamijenjen eksponencijalnim. Ovo rješenje je uklonilo gore spomenutu besmislenost. S obzirom na to da je u početku $F > R$, prepolovljenje brzine u ovoj situaciji ekvivalentno je uzimanju drugog korijena iz $\frac{F}{R}$. Stoga će $\frac{F}{R}$ ostati veći od 1, a R nikada neće biti veći od F. Ni Bradwardine ni bilo tko drugi u ovom razdoblju nije pokušao dati nikakvo eksperimentalno opravdanje za ovu jednakost. Studenti iz Mertona željeli su matematičko objašnjenje svijeta, a ne fizikalno. Ispostavilo se da je Bradwardineova ideja odbačena kao načelo fizike sredinom sljedećeg stoljeća, ali matematika koja je stajala iza nje dovela je do važnih novih ideja. Da bi se nosilo s tim idejama bilo je potrebno sustavno proučavanje omjera, posebno je bilo potrebno proučavanje ideja o složenim omjerima.

Do četrnaestog stoljeća omjeri su se izvodili u klasičnom grčkom stilu. Da bi se riješio omjer složen od $a : b$ i $c : d$, trebalo je pronaći veličinu e takvu da je $c : d = b : e$. Tada bi željeni omjer bio $a : e$. Međutim, postupno je uveden eksplicitniji pojam množenja omjera. Bradwardinov suvremenik na Oxfordu, Richard iz Wallingforda, definirao je omjere, kao i njihovo množenje i dijeljenje u drugom dijelu svog djela *Quadripartituma*:

1. Omjer je međusobni odnos dviju veličina iste vrste.

2. Kada prvi član omjera dijeli drugi član omjera iste vrste, ono što rezultira dijeljenjem naziva se vrijednost omjera ili kvocijent.

3. Kaže se da je omjer složen kada produkt vrijednosti omjera daje neku vrijednost omjera.

4. Kaže se da je omjer podijeljen s omjerom kada njihov količnik vrijednosti omjera daje neku vrijednost omjera.

Ovdje postoji nekoliko važnih pojmova. Richard je naglasio da se omjeri mogu uzimati samo između veličina iste vrste. To znači da se brzina ne može promatrati kao omjer udaljenosti i vremena. Naziv vrijednost omjera ili kvocijent u ovim definicijama odnosio se na omjere u pojednostavljenom obliku. Richardova terminologija zadana na ovaj način je i danas standard u Europi. Kod složenih omjera uključena je operacija množenja. Množenje se može primijeniti i kod dijeljenja omjera tako što se prvi omjer pomnoži s recipročnom vrijednosti drugog omjera. Odnosno, koristi se standardni algoritam za množenje razlomaka da bi dobili složene omjere.

Nicolas Oresme (1320.-1382.), francuski svećenik i matematičar povezan sa sveučilištem u Parizu vrlo detaljno je proučavao omjere u svojim djelima *Algorismus proportionum* (Algoritam omjera) i *De proportionibus proportionum* (O omjerima omjera). Uz izvođenje složenih omjera na tradicionalan način, Oresme je primijetio da se složeni omjeri mogu dobiti množenjem prvih članova i množenjem sljedećih članova.

Složeni omjer $20 : 3$ dobijemo od omjera $5 : 1$ i $4 : 3$ kao $5 \cdot 4 : 1 \cdot 3$. Poveznica između spomenutih metoda je vjerojatno ta da se $a : b$ može izraziti kao $ac : bc$, $c : d$ kao $bc : bd$, pa prema tome izrazimo i množenje $a : b$ s $c : d$ kao množenje $ac : bc$ s $bc : bd$ ili direktno kao što je definirao Oresme $ac : bd$. Oresme je također dijelio omjere, $a : b$ podijeljeno sa $c : d$ je omjer $ad : bc$.

Kad je definiran umnožak bilo koja dva omjera, Oresme je razmotrio umnožak zadanog omjera sa samim sobom. Omjer $a : b$ pomnožen sa sobom n puta daje ono što bi danas bilo zapisano kao $(a : b)^n$. Još važnije, s obzirom na bilo koji omjer, Oresme je smislio način za razmatranje o onome što se danas naziva "korijen" omjera. Budući da je $2 : 1$ dvostruki omjer, polovina od dvostrukog omjera je omjer koji kada se dva puta pomnoži sam sa sobom dobije $2 : 1$. (U modernom zapisu to je omjer $(2 : 1)^{\frac{1}{2}}$). $(3 : 1)^{\frac{3}{4}}$ je nazvao tri četvrtine dijela trostrukog omjera. Oresme je razvio aritmetiku za ove omjere. Da pomnoži $(2 : 1)^{\frac{1}{3}}$ s $3 : 2$, kubirao je $3 : 2$ kako bi dobio $27 : 8$ te pomnožio s $2 : 1$ da bi dobio $27 : 4$, a zatim je uzeo treći korijen od tog omjera kojeg smatra razlomkom da dobije $\left(6\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Slično tome, da bi podijelio $(2:1)^{\frac{1}{2}}$ s $4:3$, podijelio je $2:1$ s kvadratom od $4:3$, odnosno sa $16:9$, da bi dobio $9:8$, a zatim uzeo kvadratni korijen toga te dobio $(9:8)^{\frac{1}{2}}$. Oresmeova djela po prvi puta pokazuju operacijska pravila za rješavanje eksponencijalnih izraza s eksponentima u obliku razlomka.

Oresme je pokušao računati s iracionalnim eksponentima. Intuitivno je osjećao da je "svaki omjer poput kontinuirane veličine s obzirom na dijeljenje", odnosno da je moguće uzeti bilo koji "dio" takvog omjera. Postoje omjeri koji se ne mogu izraziti kao omjeri cijelih brojeva. Oresme nije imao zapise za iracionalne eksponente, smatrao je da bi omjeri oblika $(2:1)^r$ trebali postojati čak i kad r nije racionalan broj. U smisli modernih ideja, Oresme je smatrao da, budući da je brojevna crta beskonačna i budući da razlomci s potencijom 2 ne obuhvaćaju sve (realne) brojeve, moraju postojati brojevi (iracionalni brojevi) s potencijom 2 u skupu realnih brojeva koji još nisu uključeni. Kasnije u tekstu navodi teorem koji kaže da su iracionalni omjeri mnogo više rašireniji od racionalnih:

Propozicija III-10 *Vjerojatno je da su dva ponuđena nepoznata omjera neusporediva, jer ako se ponudi mnogo nepoznatih omjera, najvjerojatnije je da bi bilo koji od njih bio neusporediv s nekim drugim.*

Iako Oresme nije imao formalnog načina da dokaže ovaj rezultat, primijetio je da ako se uzmu u obzir svi cjelobrojni omjeri od $2:1$ do $101:1$, postoji 4950 načina uspoređivanja dva po dva omjera u smislu da uvijek usporedi veći omjer prema manjem, ali samo 25 načina s racionalnim eksponentima. Na primjer, $4:1=(2:1)^2$ i $8:1=(4:1)^{\frac{3}{2}}$. S druge strane, ne postoji racionalni eksponent r takav da je $3:1=(2:1)^r$.

Brzina

Nastojanja da se Aristotelove ideje o kretanju pretvore u kvantitativne ishode rezultirali su i novom matematikom. Te su ideje posebno razvili Bradwardine i znanstvenik William Heytesbury na fakultetu Merton u ranom četrnaestom stoljeću. Grčki matematičari, uključujući Autolycusa i Stratoa, bavili su se pojmom jednolike brzine i donekle akceleracijom, ali nikada nisu brzinu ili akceleraciju smatrali neovisnim veličinama koje se mogu mjeriti. S brzinama se radilo samo uspoređivanjem udaljenosti i vremena, pa su se u osnovi uspoređivale samo prosječne brzine tijekom određenih vremenskih intervala.

Četrnaesto stoljeće je početak pojma brzine, a posebno trenutne brzine kao mjerljive veličine. Tako je Bradwardine u svojoj knjizi *Tractatus de continuo* (Traktat o beskonačnosti) (oko 1330.) definirao "stupanj" gibanja kao "dio gibanja tijela podložno na ubrzavanje i usporavanje". Bradwardine je zatim pokazao kako usporediti brzine: „U slučaju dva gibanja koja nastaju u isto ili jednako vrijeme, brzine i udaljenosti koje su prešli su proporcionalne. U slučaju dva gibanja koja nastaju u istim ili jednakim udaljenostima, brzine su obrnuto proporcionalne vremenu. Drugim riječima, ako dva objekta putuju jednolikim brzinama v_1, v_2 u vremenima t_1, t_2, i prelaze udaljenosti s_1, s_2, tada ako je $t_1=t_2$ onda je $v_1:v_2=s_1:s_2$, a ako je $s_1=s_2$, onda je $v_1:v_2=t_2:t_1$. Bradwardine je jednoliku brzinu smatrao vrstom veličine koja se može usporediti s ostalim brzinama.

Heytesbury je nekoliko godina kasnije u svom djelu *Regule solvendi sophismata* (Pravila za rješavanje sofizama) (1335. godine) dao pažljivu definiciju trenutne brzine za tijelo čije gibanje nije jednoliko: „U nejednolikom gibanju... brzina će se u bilo kojem trenutku izmjeriti putem kojem bi opisali ... točku koja bi se u određenom vremenskom intervalu jednoliko pomicala istim stupnjem brzine kojom se kreće u tom trenutku, što god trenutno bilo dodijeljeno.” Heytesbury je primijetio da ako dvije točke imaju istu trenutnu brzinu u određenom trenutku, ne moraju nužno prijeći jednake udaljenosti u jednakim vremenima, jer se njihove brzine u drugim trenucima mogu sasvim razlikovati.

Heytesbury se također bavio akceleracijom: „Svako gibanje je jednoliko ubrzano ako u bilo kojem jednakom dijelu vremena postigne jednako povećanje brzine. ... Kretanje je nejednoliko ubrzano ... kad postigne ... veće povećanje brzine u jednom dijelu vremena nego u drugom jednakom dijelu. ... Budući da se bilo koji stupanj brzine razlikuje od nulte do konačne brzine ..., stoga se svako tijelo u pokretu može jednoliko ubrzati od trenutnog do bilo kojeg dodijeljenog stupnja brzine.” Ovaj iskaz pruža vrlo jasnu definiciju jednolikog ubrzanja i novonastali pojam brzine koji se mijenja s vremenom. Drugim riječima, Heytesbury opisuje brzinu kao ”funkciju” vremena.

Kako odrediti udaljenost koju prelazi tijelo koje jednoliko ubrzava? Heytesbury je dao odgovor koji je danas poznat kao pravilo srednje brzine: Kada bilo koje tijelo jednoliko ubrzava od stanja mirovanja do zadanog stupnja brzine, u tom će vremenu prijeći polovicu udaljenosti koju bi prešlo kad bi se za isto vrijeme jednoliko gibalo konačnim stupnjem brzine. ... Jer to će gibanje u cjelini odgovarati ... točno polovici tog stupnja brzine što je njegova krajnja brzina.” U suvremenom zapisu to znači da ako je tijelo ubrzano iz mirovanja u vremenu t jednolikom akceleracijom a, tada je njegova konačna brzina $v_f = at$. Heytesbury je naveo da je udaljenost koju je prešlo ovo tijelo jednako $s = \frac{1}{2}v_f t$. Uvrštavanjem prve formule u drugu formulu dobiva se standardna moderna formula $s = \frac{1}{2}at^2$.

Heytesbury je dokazao teorem o srednjoj brzini dokazom iz omjera, uzevši za svoj model tijelo d koje se jednoliko ubrzava iz mirovanja do brzine 8 u jednom satu. (Broj 8 ne predstavlja nikakvu određenu brzinu, već je samo upotrijebljen kao osnova za njegov primjer.) Zatim je promatrao tri druga tijela, tijelo a koje se jednoliko gibalo brzinom 4 tijekom jednog sata, tijelo b koje je jednoliko ubrzavalo od 4 do 8 pola sata i tijelo c koje je jednoliko usporavalo s 4 na 0 pola sata. Primijetio da tijelo d pređe put u prvih pola sata koliko i c, a u drugih pola sata koliko i b. Stoga d pređe put u cijelom satu koliko i b i c u pola sata. Tvrdio je da, budući da se b ubrzava upravo onoliko koliko c usporava, zajedno će prijeći jednake udaljenosti u pola sata kao da se obojica kreću brzinom od 4. Ta udaljenost jednaka je prijeđenom putu tijela a tijekom cijelog sata. Iz toga slijedi da d prijeđe put točno koliko i a u jednom satu, time je pokazao teorem o srednjoj brzini. Dokazao je i posljedicu teorema da je tijelo d prešlo u drugoj polovici sata točno tri puta veću udaljenost od one koju je prešlo u prvih pola sata.

Drugi učenjaci s fakulteta Merton su u istom razdoblju počeli istraživati ideju prikazivanja brzine, kao i drugih različitih veličina po dužinama. Osnovna ideja dolazi od Aristotela, jer su pojmovi kao vrijeme i udaljenost bili smišljeni od strane grčkih fizičara kao dvije različite vrste veličina. Sve su bile beskrajno djeljive, pa su stoga pokušali predstaviti pomalo apstraktnu ideju brzine, koja se sada sama određuje konkretnom geometrijskom idejom dužine. Tako bi se brzine različitih ”stupnjeva” predstavljale dužinama različitih duljina. Oresme je ovu ideju doveo do svog logičnog zaključka uvodeći dvodimenzionalni prikaz brzine koja se mijenja s obzirom na vrijeme. U svom djelu *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Traktat o ujednačenosti i različitosti intenziteta) oko 1350. godine generalizirao je ovu ideju na druge slučajeve kada je određena veličina mijenjala intenzitet na udaljenosti ili vremenu. Oresme je započeo objašnjenjem zašto se crtama mogu prikazati takve veličine kao brzina:

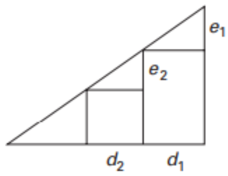
> Svaka mjerljiva veličina, osim brojeva, zamišlja se na način beskonačne veličine. Stoga je za mjerenje takve veličine potrebno predstaviti sebi točke, crte, površine ili njihova svojstva. Jer kod njih se u početku nalaze mjere ili omjeri, dok se ostale veličine prepoznaju po sličnosti jer ih intelekt upućuje na njih [geometrijske cjeline]. Iako nedjeljive točke ili crte ne postoje, ipak ih je potrebno matematički predstaviti radi mjerenja veličina i razumijevanja njihovih omjera. Stoga bi svaki intenzitet koji se može predstaviti trebao zamisliti ravnom crtom okomito postavljenom na nekoj točki.

Od dužina Oresme je konstruirao ono što je nazvao konfiguracijom, geometrijsku figuru koja se sastoji od svih okomitih crta povučenih preko osnovne linije. U slučaju brzina, osnovna linija predstavljala je vrijeme, dok su okomice predstavljale brzine u svakom trenutku. Cijela figura predstavljala je cjelokupnu raspodjelu brzina, što je Oresme protumačio kao predstavljanje ukupne udaljenosti koju je prešao objekt koji se kreće. Oresme nije koristio ono što danas nazivamo koordinatama. Nije postojala određena fiksna duljina kojom se predstavljao određeni stupanj brzine. Važna ideja bila je samo da se "jednaki intenziteti označavaju jednakim crtama, dvostruki intenzitet dvostrukom crtom i na isti način se nastavlja proporcionalno."

Oresme je tijelo koje se kreće jednolikom brzinom predstavio pravokutnikom, jer je u svakoj točki brzina jednaka (Slika 9). Površina pravokutnika predstavlja ukupnu prijeđenu

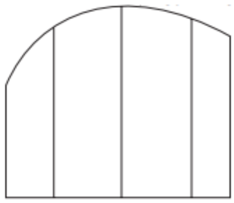
Slika 9: Jednoliko gibanje

udaljenost. Udaljenost koju je prešlo tijelo koje je počelo u mirovanju, a zatim se giba sa stalnim ubrzanjem, čiji se intenzitet jednoliko mijenja predstavlja kao površinu pravokutnog trokuta (Slika 10) i naziva "jednoliko ubrzano" gibanje. Primijetio je da, „Jednoliko ubr-



Slika 10: Jednoliko ubrzano gibanje, gdje je $d_1 : d_2 = e_1 : e_2$

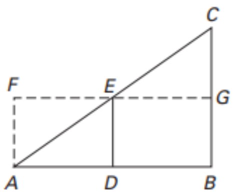
zano gibanje je ono gibanje u kojemu su, ako se uzmu bilo koje tri točke, omjer udaljenosti između prve i druge i omjer udaljenosti između druge i treće točke jednak omjeru povećanja intenziteta prve točke u odnosu na drugu točku i povećanje intenziteta druge točke u odnosu na treću točku, nazivajući prvu od te tri točke onom najvećeg intenziteta." Ova jednakost omjera prirodno definira dužinu odnosno hipotenuzu pravokutnog trokuta. Nejednoliko ubrzano gibanje, poput nejednolikog gibanja, predstavlja figuru čija je gornja linija krivulja. (Slika 11). Oresme je u osnovi razvio ideju da vezu između brzine i vremena kao funkciju



Slika 11: Nejednoliko ubrzano gibanje

prikaže krivuljom. Ovakvi geometrijski prikazi različitih veličina pružili su najbolji način za njihovo proučavanje.

S obzirom na ovakve prikaze gibanja tijela, bilo mu je lako dati geometrijski dokaz teorema o srednjoj brzini. Jer ako trokut ABC predstavlja konfiguraciju tijela koje se kreće jednolikim ubrzanim gibanjem iz mirovanja, a ako je D središnja točka baze AB, tada okomica DE predstavlja brzinu u središnjoj točki puta i polovicu konačne brzine (Slika 12). Ukupna



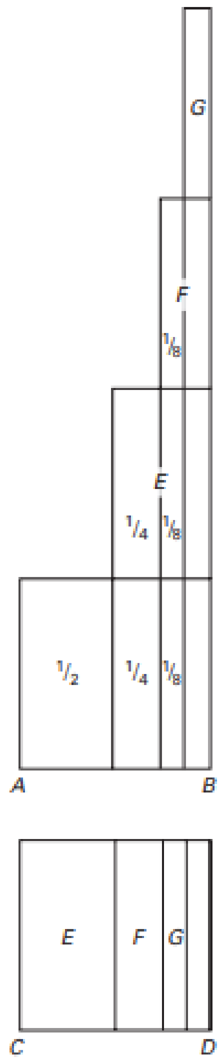
Slika 12: Dokaz teorema srednje brzine

prijeđena udaljenost, predstavljena trokutom ABC je jednaka površini pravokutnika $ABGF$.

Oresmeova geometrijska tehnika ponovno se pojavila 250 godina kasnije u djelima Galilea. Razlika između njih dvojice ležala je uglavnom u tome što je Galileo pretpostavio da je jednoliko ubrzano gibanje iz mirovanja pravilo fizike koje se ispunjava kao tijelo koje je u slobodnom padu, dok je Oresme proučavao tu temu samo apstraktno. Ova apstraktnost je vidljiva u Oresmeovom razmatranju slučajeva koji uključuju brzine koje se povećavaju bez ograničenja. Razmotrio je slučaj kada je brzina objekta tijekom prve polovice vremenskog intervala AB jednaka 1, što je u sljedećoj četvrtini jednako 2, u osmini jednako 3, u šesnaestini jednako 4, i tako dalje, i nastavio s izračunavanjem ukupne prijeđene udaljenosti. Zapravo je sumirao beskonačni niz:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \cdot n + \cdots .$$

Njegov rezultat je suma koja predstavlja ukupnu udaljenost 2. Njegov geometrijski dokaz je dan vrlo elegantano. Nacrtao je kvadrat baze CD jednak kvadratu baze AB duljine 1 i podijelio ga "do beskonačnosti na dijelove proporcionalne omjeru 2 prema 1" (slika 13). E predstavlja polovicu kvadrata, F jednu četvrtinu, G jednu osminu i tako dalje. Pravokutnik E postavljen je desno iznad polovice kvadrata baze AB, pravokutnik F postavljen je desno iznad za četvrtinu, pravokutnik G postavljen je desno iznad za osminu i tako dalje. Tada je



Slika 13: Oresmova suma $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \cdot n + \cdots$.

očito da ukupna površina nove konfiguracije koja predstavlja ukupnu prijeđenu udaljenost jednaka zbroju beskonačnog niza i jednaka je zbroju površina dvaju početnih kvadrata.

Oresmeovu geometrijsku ideju predstavljanja brzina, kao i drugih veličina, nastavili su u raznim radovima drugi matematičari tijekom sljedećeg stoljeća. Međutim, nitko nije uspio proširiti prikaz udaljenosti na slučajeve složenije od Oresma za jednoliko ubrzano gibanje. Na kraju se čak i ova ideja izgubila. Potpuno ista sudbina zadesila je ideje ostalih značajnih europskih matematičara srednjovjekovnog razdoblja. Njihova djela nisu proučavana i njihove nove ideje morale su se ponovno otkriti stoljećima kasnije. Ovaj nedostatak napretka očit je u stagnirajućim matematičkim kurikulumima na prvim osnovanim sveučilištima, kao i na mnogim novoosnovanim u sljedećim stoljećima. Budući da su Aristotelova djela i dalje bila osnova kurikuluma, jedina matematika koja se proučavala bila je ona koja je pronašla svoju upotrebu pomažući učeniku da razumije ta matematička djela. Iako je Oresme prenosio te ideje, takvi su ljudi bili rijetki. Uz to, kuga (crna smrt) i stogodišnji rat uzrokovali su značajan pad učenja u Francuskoj i Engleskoj. Stoga se u Italiji i Njemačkoj nekoliko ideja srednjovjekovnih francuskih i engleskih matematičara generiralo u nove ideje u renesansi.

Literatura

[1] B. Hughes, *Fibonacci's De Practica Geometrie*, Springer-Verlag New York, 2008.

[2] V. J. Katz, *The History of Mathemathics: An Introduction, 3th Edition*, Pearson, 2009.

[3] W. R. Laird, S. Roux, *Mechanics and Natural Philosophy before the Scientific Revolution*, Springer Science and Business Media, 2008.

[4] D. C. Lindberg, *Science in the Middle Ages*, University of Chicago Press, 1978.

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s matematikom u srednjovjekovnoj Europi. Razvoj matematike početkom srednjeg vijeka temeljio se na prevođenju djela grčkog i islamskog porijekla. Uz prevođene radove europski učenjaci su sami počeli stvarati novu matematiku. Od poznatih europskih matematičara istaknut ćemo Abrahama bar Hiyyu, Leonarda iz Pise, teologa Hugha, Richarda iz Wallingforda, Levija ben Gersona, Abrahama ibn Ezru i Jordanusa de Nemorea. Prvo ćemo razmotriti geometriju i trigonometriju, nakon toga razvoj kombinatorike i algebre, i na kraju, nešto od kinematike koja je proizašla iz proučavanja Aristotelovih djela u srednjovjekovnim sveučilištima.

Ključne riječi: geometrija, trigonometrija, kombinatorika, algebra, kinematika

Summary

In this paper we will get acquainted with mathematics in medieval Europe. The development of mathematics in the early Middle Ages was based on the translation of works of Greek and Islamic origin. With the translated works, European scholars began to create new mathematics on their own. Among the famous European mathematicians we will highlight Abraham bar Hiyya, Leonard of Pisa, the theologian Hugh, Richard of Wallingford, Levi ben Gerson, Abraham ibn Ezra and Jordanus de Nemore. We will first consider geometry and trigonometry, then the development of combinatorics and algebra, and finally, some of the mathematics of kinematics that emerged from the study of Aristotle's works in medieval universities.

Keywords: geometry, trigonometry, combinatorics, algebra, kinematics

Životopis

Rođen sam 5. lipnja 1994. godine u Slavonskom Brodu. Završio sam osnovnu školu Mijat Stojanović u Babinoj Gredi. Nakon završene osnovne škole 2009. godine upisujem srednju školu u III. gimnaziji Osijek gdje završavam prvi razred srednje škole. Ostatak srednjoškolskog obrazovanja završavam 2013. godine u Gimnaziji Županja, smjer prirodoslovno-matematička gimnazija. Iste godine upisujem Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. U međuvremenu se prebacujem na Integrirani nastavnički studij matematike i informatike na istom odjelu.