

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivana Matanić

Problemski zadaci u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivana Matanić

Problemski zadaci u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc. Ivan Matić

Osijek, 2015.

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Problemska nastava	2
2.1. Problemski zadatak	2
2.2. Izmjena tradicionalne nastave	2
2.3. Problemska i heuristička nastava	3
2.4. Problemski nastavni sat	4
3. Problemska nastava u Japanu	9
3.1. Nastava, razmišljenje i proces učenja	10
3.2. Razvoj nastavnih materijala i učinkovita organizacija nastavnog sata	12
3.3. Pregled istraživanja o nastavnom sadržaju	14
3.3.1. Utjecaj nastavnog sadržaja na učenje	16
3.3.2. Revizija plana nastavnog sadržaja	17
3.4. Sustav ocjenjivanja	17
4. Eksperiment problemske nastave u BiH	19
4.0.1. Zadaci istraživanja	19
4.0.2. Način provođenja problemske nastave i rezultati	20
5. Problemska nastava u drugim zemljama	23
6. Problemska nastava u 21. stoljeću	27
7. Zaključak	29
Sažetak	30
Title and summary	31
Literatura	32
Životopis	33

1. Uvod

Nastava matematike još uvijek je usmjerena na nastavni plan i opsežan program, a nastavnici matematike izvršavaju glavni zadatak, a to je da učenici usvoje što više propisanog gradiva.

Suvremena nastava matematike zahtjeva razvijanje stvaralačkog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika, te osposobljavanje nastavnika matematike. Učenike treba naučiti rješavati probleme, za što nam je potreban nastavni sustav – problemska nastava. Problemska nastava ima niz dobrih strana, a najbolje od njih su: veća motiviranost učenika, primjerena mogućnost suradnje, istraživački pristup rješavanja problema, razvoj kritičkog mišljenja, bolje shvaćanje biti i zakonitosti, povećanje količine znanja i veća primjenjivost stečenih znanja. Učenik je istraživač i dizajner, a učitelj organizator i pokretač. Ideja učenja putem rješavanja problema nije nova, ali je u nastavnoj praksi prilično zapostavljena.

U radu su opisana istraživanja o utjecaju problemske nastave na proces razmišljanja i učenja matematike te trajnost znanja u nekoliko zemalja. U Japanu je testiran utjecaj na rješavanje matematičkih problema u obrazovanju kroz tri perspektive: istraživanje, praksu i procjenu. U cilju provjere nekoliko hipoteza proveden je eksperiment u trećem razredu Ekonomske škole u Zenici kojim su se ispitivale posljedice učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni uspjeh u srednjoškolskoj nastavi matematike. Zemlje poput Malezije ne pripremaju učenike za izazove sa kojima će se susresti na radnom mjestu, zato im je potrebno uvođenje problemske nastave. U 21. stoljeću zadaci modeliranja predstavljaju arenu za nastavu i učenje koji pomažu nastavnicima u razumijevanju pristupa sa usmjerenošću na problem i istovremene primjene tih načela u nastavi. Te zadatke mogu uspješno koristiti nastavnici i učenici kojima nije poznat pristup rješavanjem problema.

2. Problemska nastava

2.1. Problemski zadatak

Prema složenosti i težini zadatke dijelimo na standardne i nestandardne, odnosno one koji nemaju nepoznatih sastavnica i one koji imaju barem jednu nepoznatu sastavnicu. Ako nam nisu poznate dvije ili više sastavnica tada govorimo o problemskim zadacima. Oni su izdvojeni iz razloga što se u nastavi matematike rijetko pojavljuju, ali se isto tako matematička natjecanja ne mogu zamisliti bez njih. Takvi zadaci mogu se rješavati na više načina, a neki od tih načina su jednostavniji od drugih. Da bi se došlo do najboljeg, racionalnog i lijepog tijeka rješavanja, potrebno je dobiti rezultat na više načina. Dovoljan je samo jedan način da dođemo do rješenja, ali to je nedovoljno da prođemo kroz sve teorijske činjenice i metode. Za rješavanje problemskog zadatka potrebni su nam pojačan umni napor, veća koncentracija, dublja analiza, ustrajnost i dosjetljivost.

Razlikujemo problem od problemske situacije. Rješavanje postavljenog problema može biti trenutni cilj, ali ne smijemo zaboraviti trajni cilj, odnosno razvoj učeničkog stvaralačkog mišljenja. Sredstvo za postizanje trajnijeg cilja jest rješavanje problema. Pojam problem razlikujemo od pojma zadatak. Problem je zadatak koji ima nešto nepoznato što treba otkriti dok je zadatak nešto puno opširnije. Učenik se pri rješavanju problema ne može osloniti na ništa poznato ili već riješeno, te će se morati osloniti na svoje stvaralačko mišljenje.

U problemskoj situaciji pokreće se emocionalna napregnutost pojedinca koji treba riješiti problem. To je psihičko stanje iznenađenja i velike zainteresiranosti.

2.2. Izmjena tradicionalne nastave

Tradicionalna nastava u kojoj prevladavaju kognitivni ciljevi učenja je prisutna još i danas. U središtu metodičkih i organizacijskih opredjeljenja je stjecanje znanja i misaonih sposobnosti. Učitelj poučava, planira učenje i odgovoran je za uspjeh učenika, dok sa druge strane učenici pasivno upijaju informacije, odgovaraju na pitanja i izvršavaju zadane zadatke.

Potrebne su promjene u ciljevima i zadaćama obrazovanja, nastavnim planovima i programima. Nastava u kojoj učenici nisu samostalni i ne iznose svoje stavove i različita mišljenja, koja ne razvija kreativnost i kritičnost već inicira disciplinu i prihvaćanje mišljenja autoriteta. Nastava u kojoj nema stvaralaštva kao rezultat daje pojedince koji nemaju vlastiti stav i neće preuzeti nikakvu odgovornost. Zato ju moramo redizajnirati u stvaralački proces spoznavanja, što će pridonijeti razvoju mišljenja, motivacije, mašte.

Podaci UNESCO-a ukazuju da se broj znanstvenih informacija svakih pet godina udvostručuje. Kako bi ih mogli iskoristiti, trebaju biti osposobljeni za samostalno

učenje i cjeloživotno obrazovanje. Potrebni su novi načini učenja, a jedan od njih je rješavanjem problemskih zadataka.

Takvo učenje povoljno djeluje na razvijanje samostalnosti učenika, pokreće interes i stvaralačko mišljenje. Samostalnim istraživanjem i rješavanjem problemskog zadatka brzo se dolazi do rezultata, što je motivacija za daljnje traganje i učenje. Učenik postaje aktivan sudionik odgojno-obrazovnog procesa koji usvojenim metodama i tehnikama samostalno otkriva zadovoljstvo učenja. Osnovne smjernice za suvremenu nastavu su pokretanje mišljenja učenika i ustrajanje u tome da nova znanja stječu vlastitim snagama i sposobnostima. Važno je primjereno odabrati nastavni oblik i nastavnu metodu, a to je karakteristika jednog kreativnog nastavnika.

2.3. Problemska i heuristička nastava

Problemska nastava je viši nastavni sustav koji je učenicima i nastavnicima matematike teži od drugih nastavnih sustava. Samostalno rješavanje problema učenicima nije jednostavno i lako. Tako i najbolji učenici na matematičkim natjecanjima pokazuju loše rezultate u rješavanju problemskih zadataka. Stoga je nužno učenike osposobiti za *umni rad*, što se postiže primjenjivanjem problemske nastave na svim razinama matematičkog obrazovanja.

Najviši oblik učenja je rješavanje problemskih zadataka i sastoji se u otkrivanju odnosa i veza između danih podataka i rješenja zadatka. Aktivnost učenika je maksimalna, susreće se s manjim ili većim teškoćama i koristi prethodno usvojena znanja i iskustvo u svom putu do rješenja pojedinog zadatka. Uloga nastavnika je savjetovati učenika i navesti ga na teorijske činjenice koje može upotrijebiti. Usmjeravati učenika na izvor koji će koristiti te na kraju dati svoj komentar na dobiveni rezultat. Da bi to uspio treba biti dobro osposobljen za svoj rad, što je bitna stavka za primjenu problemske nastave.

Matematički sadržaji pružaju bogatstvo stvaranja problemskih situacija u kojima možemo učenika staviti pred neki problem. Nastavnik to treba znati dobro iskoristiti u postizanju veće motiviranosti učenika, za suradnju i razvoj kritičkog mišljenja. Učenik će shvatiti smisao i učiniti svoje znanje dugotrajnijim. Rješavanjem problemskih zadataka postupno uvodimo problemsku nastavu u matematiku. To je najviši oblik učenja u kojem se otkrivaju odnosi i veze između danih podataka i rješenja.

Iz potrebe da se prevlada predavačka nastava, uvodi se samostalni rad učenika. Iz toga je nastala i heuristička nastava. Ona se primjenjuje onda kada se problemska nastava ne može primjeniti zbog svoje težine ili matematičkog sadržaja koji se treba obraditi. U heurističkoj nastavi su smanjeni aktivnost i samostalnost učenika, ali umni rad i dalje se razvija misaonim vođenjem nastavnika. Karakteristika ove nastave je neposredna komunikacija nastavnika i učenika. Slobodan razgovor i rasprava navode učenika da postavlja pitanja čiji odgovori dovode do rješenja problema. Iako heuristička

nastava, za razliku od problemske nastave, ne dovodi učenike do potpuno samostalnog rada, do otkrivanja matematičkih istina vodi ih nastavnik. Treba naglasiti da se heuristička nastava može primjeniti na svakom nastavnom satu matematike, dok problemska ne može. Tako te dvije vrste nastave povezujemo i kombiniramo za uspješno vođenje nastavnog sata.

2.4. Problemski nastavni sat

Glavni zadatak škole je da učenici shvate i usvoje nastavne sadržaje kako bi svoja znanja samostalno primjenjivali u novim, do sada neviđenim situacijama. Time se najviše razvija njihovo stvaralačko mišljenje što je cilj problemske nastave. Ona je prožeta zadacima u kojima dominiraju poteškoće, prepreke i problemi, što ju čini zanimljivom. Kod učenika izaziva radoznalost i razvija stvaralačke sposobnosti te omogućuje osamostaljivanje učenika za mišljenje i zaključivanje.

Vrijednosti koje problemska nastava ima su doprinos misaonoj aktivizaciji, redovna povratna informacija i kontinuirano praćenje rada učenika. Navikava učenika da postojeće znanje primjenjuje i koristi, a nastavniku omogućuje da, na temelju povratne informacije, poboljša nastavu i svoj pristup radu te ostvari postavljeni cilj. Problemska nastava otklanja nepravilnosti i zaostajanja u redovitoj nastavi, gradi mišljenje umjesto mehaničkog pamćenja i bori se protiv kopiranja i oponašanja.

Organizacija problemske nastave zahtjeva sljedeće didaktičke postupke:

- Promjena strukture nastavnog sata
- Pripremanje učenika
- Obrada gradiva usko povezana sa rješavanjem problema
- Ispreplitanje ponavljanja, vježbanja i provjeravanja.

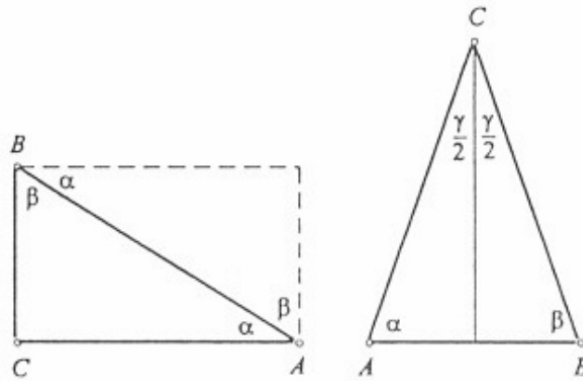
Problemska nastava primjerenija je dobi učenika viših razreda, ali izvediva je i ranije. Tijek sata osmišljava nastavnik koji zna kakva su prethodna znanja učenika i kakav problemski zadatak će rješavati. Etape takvog sata su *stvaranje problemske situacije, rješavanje problema, vježbanje i ponavljanje, te domaća zadaća*.

U uvodnom dijelu nastavnog sata nastavnik zadaje problemski zadatak kojim potiče radoznalost učenika i privlači njihovu pažnju. Glavni dio nastavnog sata je rješavanje tog problema. Novo gradivo učenici mogu savladati koristeći prethodna znanja i iskustvo, aktivno razmišljajući te rješavanjem problemskih zadataka koje je nastavnik pripremio. U završnom dijelu nastavnog sata učenicima treba zadati još neki problem istog tipa, ali sa nekom novom nepoznanicom i tražiti da ga riješe. Tako će oni samostalno svoje novo znanje primjeniti u novoj situaciji. Vježbanjem i primjenjivanjem usavršavaju svoja nova stečena znanja.

Od cijelog odrađenog nastavnog sata, ništa ne umanjuje vrijednost i značenje zadanja domaće zadaće. Zadaci koje nastavnik daje učenicima za rješavanje kod kuće ne smiju biti rutinski dio posla, već unaprijed pripremljeni i osmišljeni. Što su zadaci bolje osmišljeni, to će aktivnost učenika i utvrđivanje znanja biti kvalitetnije.

Pogledajmo kako izgleda problemski nastavni sat matematike u šestom razredu osnovne škole u nastavnoj jedinici *Zbroj kutova u trokutu*.

Nastavnik učenicima daje dva trokuta, pravokutni i jednakokračni. Promatranjem tih trokuta trebaju zaključiti koliki je zbroj kutova u oba trokuta. Učenici znaju da su svi kutovi u pravokutniku pravi, te da visina jednakokračnog trokuta dijeli kut uz isti vrh na dva jednaka dijela. Kako je ova nastavna jedinica namjenjena za šesti razred osnovne škole, pri rješavanju ovog problema pomogla bi nam heuristička nastava.



Slika 1: Pravokutan i jednakokračan trokut

Aktiviranjem i navođenjem učenika da koriste prikladne činjenice, pravokutni trokut će nadopuniti do pravokutnika. Uočavanjem para paralelnih pravaca i njihove presječnice, te kutova uz nju dolaze do zaključka da je zbroj kutova u pravokutnom trokutu 180° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ.$$

Promatranjem jednakokračnog trokuta učenici vide da visina dijeli trokut na dva sukladna pravokutna trokuta. Zatim mogu iskoristiti zaključak za zbroj kutova u pravokutnom trokutu kako bi dobili da je zbroj kutova u jednakokračnom trokutu također 180° .

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$$

$$2\alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Kada su učenici riješili problem zbroja kutova u zadanim trokutima, nastavnik im daje općenitiji zadatak. Pita ih što mogu reći o zbroju kutova u proizvoljnom trokutu.

Učenici mogu korištenjem kutomjera izmjeriti kutove unutar nekoliko raznostraničnih

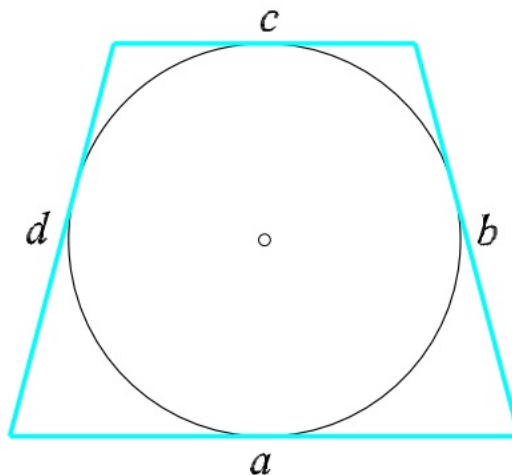
trokuta. Tako će otkriti da je zbroj kutova u svakom od njih isto 180° .
Zaključak koji slijedi iz rješavanja ovog problema je:

Zbroj kutova u svakom trokutu jednak je 180° .

Pri obradi nekog problema potrebno je pobuditi interes stvaranjem problemske situacije koju učenik može prihvatiti zahvaljujući predznanju i sposobnostima koje ima. Komponente od kojih se sastoji problemska situacija iste su kao i kod matematičkog zadatka: *objekti, poznate i nepoznate veličine, svojstve, veze i odnosi.*

Razvijanje i stvaranje navike općeg pogleda na neki problem i njegovo potpuno rješavanje je za učenje matematike didaktički jako vrijedno. Sljedeći primjer pokazuje rješavanje jedne vrste geometrijskog zadatka u kojem lako i brzo dobivamo jednostavne rezultate premda uvjetima zadatka situacija nije jednoznačno određena.

Primjer 1. Kolika je duljina srednjice trapeza čiji je opseg 24 cm , ako se trapezu može upisati kružnica?



Slika 2: Trapez sa upisanom kružnicom

Nakon što smo skicirali trapez sa upisanom kružnicom, uočavamo da je to tangencijalni četverokut i za njega vrijedi *Teorem o tangencijalnom četverokutu.*

Ako su duljine stranica trapeza redom jednake a, b, c, d , onda je $a + b + c + d = 24$, a zbog spomenutog teorema je $a + c = b + d$.

Lako sada dobijemo duljinu srednjice trapeza

$$s = \frac{1}{2}(a + c) = 6\text{ cm}.$$

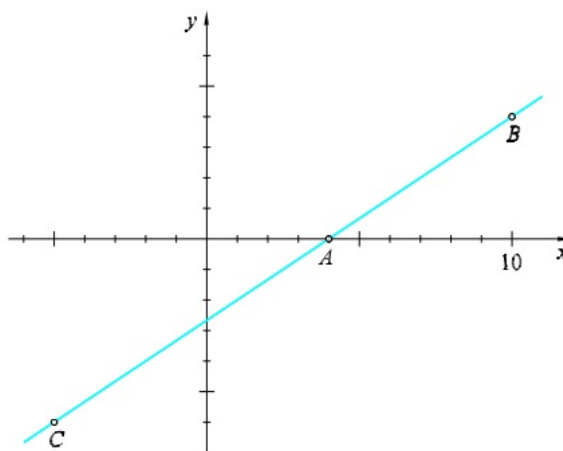
Konstrukciju trapeza možemo provesti tako da zbog $a + c = b + d = 12\text{ cm}$, za duljine stranica odaberemo četiri broja koja zadovoljavaju ove jednakosti.

Konačno, rješenje zadatka možemo iskazati jednim općim zaključkom: *Ako se trapezu može upisati kružnica, duljina njegove srednjice jednaka je četvrtini njegova opsega.*

Često se neki matematički zadatak može riješiti na više bitno različitih načina. Većina učenika izabire onaj način rješavanja zadanog zadatka koji je vezan uz nastavno gradivo koje su prethodno obradili. Navedimo primjer u kojem se na više različitih načina može doći do ispravnog rješenja.

Primjer 2. Da li točke $A(4, 0)$, $B(10, 4)$ i $C(-5, -6)$ zadane svojim koordinatama u Kartezijevom koordinatnom sustavu pripadaju istom pravcu?

NAČIN 1. Nacrtajmo zadane točke u koordinatnom sustavu i provjerimo prolazi li neki pravac kroz sve tri zadane točke (Slika 3.)



Slika 3. Pravac kroz tri točke

Ako takav pravac ne možemo nacrtati, točke ne pripadaju istom pravcu. Može nam se dogoditi da nam se čini da točka leži na pravcu, a ona je samo jako blizu njega, tako da samim crtežom ne možemo sa sigurnošću tvrditi da točke pripadaju na istom pravcu. U tom slučaju nemamo sigurno rješenje i moramo ga nastaviti dalje tražiti.

NAČIN 2. Poznajemo jednadžbu pravca zadanog dvjema točkama $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ gdje je $x_1 \neq x_2$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (1)$$

Uvrštavanjem dobivamo koordinate točkama A i B i dobijemo jednadžbu pravca AB :

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Trebamo provjeriti još nalazi li se i točka C na tom pravcu. To možemo napraviti uvrštavajući koordinate točke C u jednadžbu pravca AB

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(-5) - \frac{8}{3} = -6.$$

Vidimo da je $y = -6$ za $x = -5$, pa točka C pripada pravcu AB .

Mogli smo i odrediti jednadžbu pravca AC po formuli (1) i dobili bi jednadžbu pravca

AC

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Pravci AB i AC jedan su pravac. Tako točke A, B i C pripadaju istom pravcu.

NAČIN 3. Vrlo jednostavno možemo riješiti ovaj zadatak ako se sjetimo jednadžbe za površinu trokuta ABC :

$$P = \frac{1}{2}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|. \quad (2)$$

Imamo zadane koordinate točkaka $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$. Uvrštavanjem u formulu (2) dobijemo

$$P = \frac{1}{2}|4(4 - (-6)) + 10(-6 - 0) - 5(0 - 4)| = 0.$$

Površina trokuta jednaka je nuli. Zaključujemo da točke A, B i C ne određuju trokut. One leže na jednom pravcu.

3. Problemska nastava u Japanu

Japanski nastavnici su ozbiljno shvatili preporuku da bi nastava matematike trebala biti fokusirana na rješavanje problema. Tijekom 80-ih i 90-ih godina prošlog stoljeća, provedeno je puno istraživanja obzirom na rješavanje problema u nastavi matematike.

U Japanu postoji nacionalni standardni kurikulum pod nazivom *Tijek studija*, koji je propisan od strane Ministarstva obrazovanja. Nakon Drugog svjetskog rata, *Tijek studija* je obnavljan gotovo svakih 10 godina. U svakoj preinaci, njegovi ciljevi i standardi odražavaju interese i potrebe japanskog društva i njegove zahtjeve obrazovanja. Slika 4. prikazuje naglasak stavljen na *Tijek studija* tijekom svake promjene u razdoblju od 60 godina.

1947	1948	1951	1958	1968	1977	1989	1998	
Iskustva u svakodnevnom životu		Sustav sadržaja u matematici		Osuvoimenjivanje matematike		Razvoj individualnosti i osnove u matematici	Nova vizija skolastičke sposobnosti	Volja za život i integraciju učenja

Slika 4.

Napredak *Tijeka studija* ukazuje na to da su primijenili matematičko obrazovanje temeljeno na vlastitoj filozofiji, a u isto vrijeme po uzoru na svjetske reforme i pokrete. Zahvaljujući napretku progresivnog obrazovanja naglasak je stavljen na iskustvo u svakodnevnom životu. Rješavanje problema vidjeli su kao dobar temelj u kurikulumu za osnovne škole. U 1951., rješavanje problema je navedeno kao cilj matematike u školi. To se uglavnom odnosilo na rješavanje problema koji uključuju zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, kao i razmjere. Nakon 1958., cilj matematike je poticanje učeničkog matematičkog mišljenja. U osnovnoj školi, možemo naći izjave poput *Da bi djeca razumjela osnovne pojmove i načela u vezi s brojevima, količinama i geometrijskim likovima; treba ih se osposobiti za stvaranje naprednog matematičkog razmišljanja i načina rukovanja problemskim situacijama pomoću matematike* i *Djeca razvijaju svoje stavove matematičkim razmišljanjem i načine rješavanja problema pomoću matematike u svakodnevnom životu.*

Matematičko razmišljanje i dalje je uključeno u modernizaciju matematike, i danas je glavni cilj nastave matematike u Japanu.

Interes za poboljšanje metoda poučavanja i učenja naglo je povećan, jer se smatralo da je od temeljne važnosti za realizaciju duha modernizacije matematike. Matematičko rješavanje problema bilo je jedno od njihovih središnjih tema istraživanja. Rješavanje problema važan je čimbenik u preispitivanju matematičkog obrazovanja u Japanu. Rezultati Prve i Druge međunarodne studije matematike su ih primorali da obrate veću pozornost na matematičko rješavanje problema jer su otkrili slabosti japanskih učenika

u području matematičkog razmišljanja, u odnosu na računalne vještine. Matematičko mišljenje se smatralo važnijim kod stvaranja i formiranja matematičkih pojmova, pravila i algoritama, dok se za rješavanje problema smatralo da pridonosi za fleksibilno i učinkovito korištenje i primjenu koncepata i algoritama.

Rješavanje problema je omogućilo učenicima da razumiju razlike matematičkih sadržaja. Nagasaki (1990) je naveo tri pristupa rješavanju problema:

- (1) problem kao cilj nastave matematike u obrazovanju,
- (2) problem kao proces nastave,
- (3) problem kao sadržaj nastave.

U prvom pristupu, cilj nastave je razviti sposobnost rješavanja problema kod učenika ili sposobnost razmišljanja te potaknuti njihove stavove i navike prema razmišljanju. U drugom pristupu cilj je omogućiti učenicima stvaranje matematičkih koncepata kroz rješavanje problema. Ovaj drugi pristup, koji je uključen u nastavu, za cilj ima stjecanje učeničkog znanja razmišljanjem koji se odnosi na sadržaj bitan za matematiku.

3.1. Nastava, razmišljenje i proces učenja

Yamazaki je sažeo napredak istraživanja o rješavanju problemskih zadataka u Japanu od 1980. do 1995. godine. Prikupljanjem raznovrsnih podataka iz knjiga, te istraživanja i prakse temeljene na časopisima i zbornicima, primijetio je da se broj literature povećao nakon 1980. te nastavio povećavati i nakon 1985., a potom je ostao konstantan. Iz toga je zaključio da je u tom razdoblju istraživanje rješavanjem problemskih zadataka bila jedna od važnih tema među sveučilišnim istraživačima i nastavnicima.

Sažetak znanstvenih radova i prezentacija u časopisima i godišnje konferencije od strane Japanskog društva matematičara tijekom 1991-2000 dao je Ito. On je kategorizirao sadržaj istraživanja u četiri kategorije: ponašanja u procesu problemskog rješavanja, strategije u rješavanju problema, struktura i postavke problema, te raznolike sposobnosti vezane za problemsko rješavanje. U skladu s Yamazakijevom analizom, možemo procijeniti interes istraživača za ono što se događa u umu učenika kod rješavanja matematičkih problema. Usredotočenost na analizu i interpretaciju bili su raznoliki, uključujući zalaganje, cilj, motivaciju, izradu, praćenje i promišljanje. Također su promatrani i preobrazba učenikovih prikaza i korištenja strategija u tijeku rješavanja problema.

Perspektiva procesa problemskog rješavanja također se koristi za tumačenje i prevladavanje poteškoća učenika u učenju sadržaja matematike u školama. Na primjer, Shimizu prilazi učeničkim poteškoćama u razumijevanju razloga skraćivanja razlomaka sa gledišta *meta-razmišljanja*. Učenici imaju tendenciju učiti cjeline za koje znaju

da moraju, a u pravilu ne razumiju zašto. On je istraživao razmišljanje učenika o razlomcima kada su zamoljeni da odgovore na pisane testove, koji uključuju ispravan, ali nepoznat postupak (Yoshiko metodu): brojnik i nazivnik su podijeljeni (npr. $\frac{8}{15} \div \frac{2}{5} = (8 \div 2)/(15 \div 5) = \frac{4}{3}$).

Više od 70% učenika šestog razreda, te oko 65% učenika sedmog razreda, procijenili su Yoshiko metodu kao pogrešan postupak. Mnogi učenici su tvrdili da je ova metoda netočna jer je bila drugačija od algoritma koji su znali. U nastavi matematike naučili su da razlomačka crta zamjenjuje znak za operaciju dijeljenja. Količnik $\frac{8}{15} \div \frac{2}{5}$ zapisali su $\frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{5}}$ i nazvali ga dvojni razlomak. Takve razlomke su gledali kao razlomke kojima je brojnik umnožak vanjskih, a nazivnik unutarnjih članova dvojnog razlomka, pa bi ovaj primjer zapisali $\frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 2} = \frac{4}{3}$. Klinički razgovori¹ i nastavne intervencije podrobnije su pokazale da je vrlo teško promijeniti procjenu kod učenika. Sve to ukazuje na njihovu uvjerenost u argument i predložene njihove pravilno usmjerene stavove prema učenju matematike, ili, drugim riječima, njihove slabosti u meta-razmišljanju. On je predložio potrebu za podučavanje razlomaka povećavajući učenicima meta-kognitivne aktivnosti poput isticanja svojstva djeljenja i odnosa između množenja i dijeljenja.

U Japanu je bio povećan broj studija problemskog rješavanja u stvarnom svijetu. Važne istraživačke teme su analiza procesa rješavanja problema iz stvarnog svijeta i korištenje stvarnih situacija koje su smatrali kao pravu priliku za poticanje učeničke sposobnosti rješavanja problema.

Matematičko modeliranje je rastuće područje istraživanja. Glavni sadržaj istraživanja uključuje procese sadržane u rješavanju problema u stvarnom svijetu, znanje, vještinu i razmišljanja koji se odnose na proces; važnost poučavanja matematičkog modeliranja; razvoj nastavnih materijala; ispitivanje stvarnim situacijama i razvoj nastavnih faza. Ovdje je ponovno jedna od zadaća provedba procesa matematičkog modeliranja na razini nastave. Kao primjer, Ikeda (2004) je razvio niz ciljeva i zadataka za poticanje vještina učenika u nastavi matematičkog modeliranja. Postavio je sljedeće tri faze:

- (1) razumijevanje značenja prilikom postavljanja pretpostavki;
- (2) stjecanje nekoliko važnih ideja koje su potrebne u konstrukciji i analizi matematičkog modela;
- (3) rješavanje realnih problema primjenom različitih ideja.

On uvodi sate *dodatne nastave*² u nižim razredima srednje škole. Uvedeno je niz nastavnih sadržaja jednom tjedno, od kojih svaka cjelina traje 100 minuta. Zbog vremenskog

¹Klinička procjena psihologa koja uključuje prikupljanje podataka o učeniku, njegovom ponašanju, osobinama ličnosti i sl.

²Matematika kao dodatna nastava usvojena je u devetom razredu. U skladu s mogućnostima učenika, cilj je da različite aktivnosti učenja tijekom provođenja nastave budu konstruktivne i da

ograničenja nije bilo lako provesti sate matematičkog modeliranja u javnim školama. Jedan razuman izbor bio bi korištenje izbornog predmeta, kao što je to učinio Ikeda. Ikeda je otkrio da je učinkovitije za učitelja da učenici, prije podučavanja određenih ideja koje su potrebne za izgradnju i analizu matematičkog modela, razumiju smisao postavljanja pretpostavki. Kako bi se mogli nositi s matematičkim modeliranjem u učionicama, u kojima se nalaze učenici s raznih područja i bazom znanja, puno pažnje bi trebalo dati razvijanju problema i načinu podučavanja u cilju razvoja postavki koje mogu učenicima pomoći u shvaćanju značenja matematičkog modeliranja.

3.2. Razvoj nastavnih materijala i učinkovita organizacija nastavnog sata

U časopisima za nastavnike u osnovnim školama i nižim razredima srednje škole, posebna pitanja o matematičkom rješavanju problema redovito su se pojavljivala tijekom 80-ih godina prošloga stoljeća. Štoviše, u Japanu imaju tradiciju *praksa na iskustvu* istraživanja od strane nastavnika. Oni predstavljaju rezultate svojih istraživanja u regionalnim i nacionalnim susretima. Do danas, mnoga istraživanja u praksi na iskustvu proširila su svoje fokuse različitim temama, uključujući i one koje potiču učenike na matematičko razmišljanje i kreativnost te kapitaliziranje individualnim razlikama među učenicima u razredu. U nižim razredima srednje škole, mnoge studije o rješavanju problema također su povezane s razvojem zadataka i organiziranjem nastave gdje bi se učenje svelo na rješavanje problemskih situacija. Ova istraživanja temeljno se mogu podijeliti u dvije kategorije. Prva kategorija je razvoj nastavnih materijala kojima je cilj poticanje sposobnosti učenika u rješavanju problema, a druga je kategorija učinkovita organizacija nastave.

Svrha učenja rješavanjem problemske situacije je potaknuti učenika na spontano učenje i njegovanje vlastitih stavova i načina matematičkog razmišljanja postavljanjem odgovarajućih problemskih situacija, primjerice, integrirajući sadržaj učenja u različitim područjima koja se odnose na matematiku, poput događaja u svakodnevnom i društvenom životu, te naglašavanje aktivnosti kao što su temeljne manipulacije, promatranje ili eksperimentiranje. Cilj učenja rješavanjem problemske situacije je bio stvaranje više prostora za motivaciju i stav nego stjecanje i konsolidacija znanja i vještina. Planirano je da se uključe u osmom i devetom razredu u nastavnom planu s odgovarajućom raspodjelom i implementacijom.

Nastava matematike pomoću problema otvorenog tipa je jedan od reprezentativnih metoda promicanja sposobnosti matematičkog rješavanja problema kod učenika u Japanu. Problem otvorenog tipa je problem koji je formuliran tako da ima više točnih odgovora. Podrijetlo ovakvog pristupa je istraživanje o procjeni koje su proveli Shi-

učenik sam ponudi moguća rješenja.

mada i ostali početkom 70-ih godina prošloga stoljeća. Njihov cilj je bio razviti metodu ocjenjivanja učenika postizanjem ciljeva višeg stupnja razmišljanja u matematici. Viši stupanj razmišljanja podrazumijeva da učenici mogu dani problem postaviti na matematički ispravan način i riješiti ga. Pritom bi trebalo uključiti probleme u kojima bi učenik bio u situaciji između naučenih metoda odabrati primjerenu i njemu najdražu. Stoga je potrebno razviti problemsku situaciju koju bi učenik mogao analizirati iz različitih perspektiva. Tu tek počinje razvoj problema otvorenog tipa.

Rezultat njihovog istraživanja pokazuje potrebu da se podučavanjem usmjeri na postizanje viših ciljeva matematike, što opet usmjerava pozornost na razvoj nastavnih materijala i način organiziranja nastavnog sata pomoću problema otvorenog tipa.

U osnovnoškolskim i srednjoškolskim udžbenicima se mogu naći problemi otvorenog tipa. Iako njihov broj nije velik, oni se šire kroz sve razrede. Zadaci u udžbenicima uključuju probleme pronalaženja uzoraka i odnosa iz tablica ili geometrijskih likova u kojima učenici stvaraju svoje skice koje zadovoljavaju zadane uvjete i tako stvaraju svoje vlastite probleme na temelju izvornog problema. Slika 5 prikazuje primjer problema otvorenog tipa u udžbeniku devetog razreda pod nazivom *Problem kalendara: Kada ste izabrali i zaokružili tri broja, koja pravila ili uzorke možete naći u ta tri broja? Što ako ste izabrali i zaokružili četiri broja?*

日	月	火	水	木	金	土
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Slika 5.

Mnogi od tih problema otvorenog tipa koriste se za uvodne i napredne aktivnosti. Njihovi ciljevi su pobuditi interes kod učenika i potaknuti njihove matematičke poglede i razmišljanja. Nastavnici također uključuju probleme otvorenog tipa u nižim razredima srednje škole u nastavne sadržaje u kojima rješavaju problemske situacije.

TIMSS je identificirao japanski način podučavanja nastavnog sadržaja kao niz od pet aktivnosti: ponavljanje prethodne nastavne jedinice; predstavljanje dnevnog problema; učenici koji rade pojedinačno ili u skupinama raspravljaju metode rješenja; te naglašavanje i rezimiranje glavnih točaka. Ovdje se različitost nastavnog sata u Japanu, u usporedbi s druge dvije zemlje, očituje u tome što se učenicima najprije predstavlja skup problema te oni zatim samostalno rade na razvoju postupka rješavanja. Nasuprot tome, u SAD-u i Njemačkoj, učenici rade na problemu nakon što nastavnik pokaže kako riješiti problem (SAD) ili nakon što nastavnik usmjeri učenike na razvojne procedure za rješavanje problema (Njemačka). Ovaj način, ili moto japanske nastave, se naziva

strukturirano rješavanje problema.

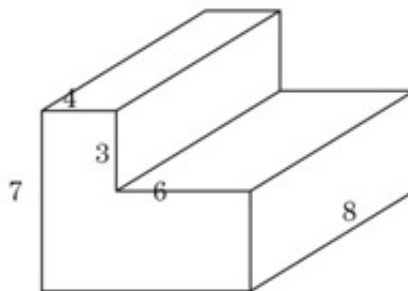
U Japanu, podučavanje matematike u stilu strukturiranog rješavanja problema učitelji općenito cijene. Gotovo svi istraživački nastavni sati su provedeni u takvom stilu. Još uvijek postoje nastavni sadržaji koji se provode izravnim podučavanjem od strane nastavnika, bez prostora za učenika da sam pomnije razmišlja o problemu.

Morici 2003. godine je izdvojio četiri vrste nastave s rješavanjem problema pomoću 2D modela (učitelj-centriran ili učenik-centriran; te cijeli razred ili individualno učenje) i izrazio potrebu za korištenjem modela učenik-centriran u nastavi, bilo to u stilu strukturiranog rješavanja problema ili izravno podučavanje. Ovi problemi pokazuju da nije uvijek jednostavno učinkovito poučavati matematiku kroz strukturirano problemsko rješavanje, i to je razlog zašto su u ovom istraživanju gledali karakteristike dobre problemski orijentirane nastave. Uloga nastavnika u učionici smatra se drugim velikim problemom. U Lernerovom perspektivnom učenju, analiza nastave podučavanja trojice iskusnih učitelja matematike u Japanu provedena je sa različitih točaka gledišta: kako su učitelji dali podršku učenicima tijekom rada; kako su saželi nastavni sadržaj; te kako se predstavljaju, pregovaraju, ili koriste matematičke norme tijekom nastave. Te analize također pokazuju da učitelj ima važnu ulogu u problemski orijentiranoj nastavi.

3.3. Pregled istraživanja o nastavnom sadržaju

Istraživanje o nastavnom sadržaju 2006.; kojeg su proveli grupa nastavnika koji rade u bilo osnovnoj ili srednjoj školi u gradu i grupa upravitelja škola, uključujući i nadzornike grada; prikazuje kako je uvođenje problemskih zadataka poboljšalo nastavu. Osnovna ideja je bila potaknuti sposobnost učenika da prilikom rada na danom problemu izraze svoje mišljenje te ga podijele s kolegama i učiteljima. Tri pripremna nastavna sata ovog istraživanja su provedena u šestom razredu u tri osnovne škole. Nakon svakog sata je uslijedila povratna informacija i plan poboljšanja nastavnog sata na temelju prijedloga danog tijekom rasprave. Konačna istraživanja su predočena svim učiteljima u skupini, upraviteljima i drugim stručnjacima u nastavi matematike.

Cilj pripremnog istraživanja nastavnog sata je da učenici smišljaju načine pronalaženja volumena tijela prikazanog na Slici 6.



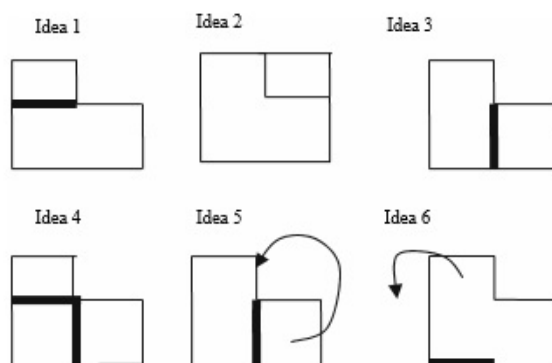
Slika 6.

Nastavni sadržaj se odnosio na primjenu formule za volumen kocke i kvadra koje su naučene na prethodnom nastavnom satu.

Na samom početku napravljen je pregled prethodnog nastavnog sata i predstavljen preliminarni problem za taj dan. Učitelj je naveo cilj nastavne cjeline, ispitao učenike o prethodno obrađenim geometrijskim tijelima i njihovim volumenima (kocka i kvadar) te izrazio formule za te volumene. Nakon toga učitelj pokazuje učenicima sliku tijela koje će koristiti na današnjem nastavnom satu. Na slici je prikazano tijelo bez brojčane vrijednosti (duljine).

Rad na problemu je individualan i predstavlja ideje. Svaki učenik radi na svom problemu, rečeno im je da napišu svoje ideje (ne odgovore) i kada završe sa jednom idejom neka probaju smisliti još jednu. U sljedećih 7 minuta, djeca samostalno rade na svome problemu. Učitelj šeta po učionici, savjetuje i odgovara na pitanja učenika.

Nakon pojedinačnog rješavanja problema, djeca izlažu svoje ideje ostalim učenicima u razredu. Neka djeca su izrazila želju da sami izlože svoj rad. To je rezultiralo sa šest različitih ideja o transformaciji tijela u kvadar što je prikazano na Slici 7.



Slika 7. Prikazi šest ideja s prednje strane

Poslije toga učitelj uvodi duljine za dano tijelo. Ovaj put učenici odabiru jednu ideju i rade na rješenju, a kad završe mogu pokušati neki drugi način. Učitelj je opet šetao učionicom i bio učenicima na raspolaganju. Istovremeno je četvero djece prozvao na ploču, čija rješenja su na temelju prve četiri ideje u Slici 7.

U svom izlaganju učenici su objasnili svoja rješenja pred cijelim razredom. Svako objašnjenje nastavnik je kratko komentirao, provjerio matematički izraz. Nije bilo pitanja ili komentara od strane djece. Uspoređujući rješenja i razmišljajući o prigodnom postupku, učitelj pita djecu da usporede ta četiri rješenja. Koji misle da je najtočniji? Većina djece složilo se s odgovorom B, kako je i prikazano na Slici 8.

Solution A	Solution B	Solution C	Solution D
$8 * 4 * 3 = 96$	$8 * 10 * 7 = 560$	$8 * 4 * 7 = 224$	$8 * 4 * 3 = 96$
$8 * 10 * 4 = 320$	$8 * 6 * 3 = 144$	$8 * 6 * 4 = 192$	$8 * 4 * (7-3) = 128$
$96 + 320 = 416$	$560 - 144 = 416$	$224 + 192 = 416$	$8 * 6 * (7-3) = 192$
			$96 + 128 + 192 = 416$

Slika 8. Izložena rješenja učenika

Zadnji dio nastavnog sata djeca pišu komentare o nastavnom sadržaju koji su učili.

3.3.1. Utjecaj nastavnog sadržaja na učenje

U pripremi istraživanja ovog nastavnog sadržaja, učitelji razmišljaju o različitim tehnikama koje pružanju učenicima da potaknu razmišljanje i izraze svoje mišljenje:

- Pružiti djeci prethodni problem u kojem su duljine stranice tijela izbrisane. Na taj način, pokušali su potaknuti dječju pozornost na ideje pretvarajući nepoznato tijelo u oblike pravokutnika kojeg su naučili.
- Osmisliti radni listić podijeljen na četiri dijela kako bi mogli potaknuti razmišljanje i pisati više transformacija tijela u one koje znaju.
- Dati vremena za pripremu djetetovog samostalnog izvještaja na kraju nastavnog sata. Pokušali su napraviti da djeca razmišljaju o tome što su napravili te razmisle o tome što su naučili i kako bi se omogućilo učitelju da procijeni svoje podučavanje.

Čini se da su ti pokušaji bili djelomično učinkoviti. Sva djeca u razredu su bila u mogućnosti razviti svoje vlastite ideje. U svojim izlaganjima, djeca su bila aktivna u podizanju svojih ruku i objašnjavanju svojih rješenja, iako njihovi odgovori nisu bili uvijek najjasniji. Kada je četvero djece predstavilo svoj rad na ploči, napisali su svoj matematički izraz uredno kako bi ga što bolje prikazali svojim prijateljima.

Međutim, nastavni sadržaj je također pružio priliku skupini nastavnika da raspravljaju o učinkovitosti uloge učitelja u postizanju cilja nastavnog sata za povećanje dječje sposobnosti razmišljanja i izražavanja. Jedan problem se istaknuo, a to je dovoljna motiviranost djeteta za rješavanje zadatka. Često se jednim od najvažnijih i nužnih pristupa smatra osmisliti svakodnevne probleme koje bi učenici mogli rješavati. U ovom nastavnom sadržaju, iako je učitelj provjerio znanje prethodnog sata, zabrinutost je podignuta oko toga je li dijete prisiljeno rješavati zadatke koje je dodijelio učitelj. Drugi problem je nedostatak vremena da se provjere i usporede različita rješenja djece. Učitelj pita djecu da iznesu svoja rješenja na ploči, ali nakon svakog izlaganja dao bi samo kratki komentar. Štoviše, učitelj proziva samo neku djecu koja podignu najviše ruku za rješenje, ali ih ne pita za razloge niti inicira raspravu o tome. Sličan problem je uočen u opisanom nastavnom satu. Učitelj nije obradio valjanost svake ideje, iako

su neka djeca pokušala procijeniti da li je moguće transformirati tijelo u pravokutnik pomoću ideje 5 i 6. Drugi nedostatak je vrijeme za rezimiranje nastave. U tom dijelu nastava je vrlo blizu kraja i učitelj moli djecu da pišu komentare u svoje bilježnice. Postavlja se pitanje je li to dovoljno za njih da razmisle o svom učenju na tom satu.

3.3.2. Revizija plana nastavnog sadržaja

Ovi problemi su uključeni kada je učitelj revidirao plan nastavnog sadržaja. U tablici su pokazane natuknice o tom planu gdje je navedena usporedba i sažetak završnog dijela nastavnog sadržaja. Slika 9 prikazuje probleme i izmjene napravljene u završnom dijelu istraživanja nastavnog sadržaja.

Problem	Izmjena
Osmisliti problem koji će djeca riješiti za taj dan	Prikazivanje tijela
Vrijeme je za uspoređivanje različitih rješenja i metode rezimiranja nastavnog sadržaja	Pustiti učenike da procjene problem prije računanja
Više podrške za izražavanje učenikovog mišljenja	Smanjeno vrijeme za upoznavanje sa problemom utoliko da učenici razmijene ideje
	Ukratko osmisliti korake za lekciju
	Pripremiti fizički model na kojem će djeca raditi
	Pustiti drugu djecu da izlože svoja rješenja na ploču.

Slika 9.

Pružanje učenicima vremena da samostalno rade na problemu nije dovoljno. Učitelj si trebao postaviti pitanja kao: *Je li problemska situacija dovoljna da učenici povećaju svoj interes u provedbi i rješavanju zadataka?*, *Na koji način treba koristiti različita rješenja tako da učenike mogu dovesti do matematičkog sadržaja koje želim da nauče?* i *Do koje mjere treba jamčiti mogućnosti za sve učenike da se zapravo uključe u aktivnosti svakog dijela nastavnog sadržaja, i da se to odrazi na njihovu aktivnost?* Sva ta pitanja treba riješiti, jer zapravo nije problem u stilu ili strukturi rješavanja problema po sebi, nego učiteljeva pažljivog usmjeravanja učenika da razmišlja u takvom stilu koji ima utjecaj na razvoj njegove sposobnosti rješavanja matematičkih problema.

3.4. Sustav ocjenjivanja

Prema sustavu ocjenjivanja na nacionalnoj razini u Japanu, ispitivali su standard ocjenjivanja učenika prema matematičkom učenju. Trenutno, imaju sustav vrednovanja koji se temelji na kriteriju referentne procjene. Svaki učenik je u uspoređeni s prethodno postavljenim standardom za prihvatljiva postignuća na temelju četiri kriterija: interes, motivacija i stav; matematičko mišljenje; vještina izražavanja i rukovanje; i znanje i razumijevanje. Ovi kriteriji uspostavljeni su zbog postojanja tendencije da se usredotoče na znanja i vještine prilikom ocjenjivanja učenikovih dostignuća. Uvod ovih kriterija i kriterija referentne procjene ocjenjivanja je velika pokretačka snaga u

širenju studija u tim područjima.

Za provedbu kriterija referentne procjene, neizbježno je analiziranje nastavnih ciljeva, napraviti plan nastave i način ocjenjivanja za svaki nastavni sadržaj. Iako su svi ti procesi teški za raditi, u izradi plana nastavnog sadržaja, s jedne strane objašnjavaju vezu između nastavnih ciljeva u nastavnoj jedinici i ciljeva svakog nastavnog sadržaja, a s druge strane način procjene. Na primjer, učitelji sa grupom učenika nastavnog sadržaja opisanog kao *Razvoj nastavnih materijala i organizacija učinkovite nastave rješavanjem problema*, razvili su nastavne planove koji sadrže takve informacije. Slika 10 prikazuje okvire izgradnje nastavne jedinice *Volumen* i metode procjene.

Specifične teme u nastavnoj jedinici	Broj nastavnih sati za temu	Izgradnja nastavne jedinice i ciljeva u svakom nastavnom sadržaju	Povezivanje sa kriterijima ocjenjivanja				Metoda vrednovanja u aktivnostima učenja
			Interes	Razmišljanje	Vještine	Znanje	
Volumen kocke i kvadra	4	Za pronalaženje volumena sastaviti formule koje se mogu primijeniti za kocku i kvadar.		✓		✓	Razmišljanje: ako dijete može pronaći ideju kako transformirati tijelo u kvadar. Znanje: ako dijete pokazuje točnu uporabu tijela i volumena i ispravno piše cm^3

Slika 10.

Ova slika samo pokazuje njihov plan o konačnom istraživanju nastavnog sadržaja koji je ranije opisan kao primjer. Oni su postavili osam specifičnih ciljeva koji obuhvaćaju sva četiri kriterija ocjenjivanja u nastavnoj jedinici *Volumen*. Iz Slike 10 možemo vidjeti da je učitelj u namjeri da postigne kriterije matematičkog razmišljanja, znanje i razumijevanje u ciljevima, pokušao procijeniti prihvatljiva učenička dostignuća na temelju pismenog i usmenog informiranja jesu li pretvorili zadano tijelo u kvadar, te da li su pokazali razumijevanje značenja volumena i ostalih matematičkih činjenica.

4. Eksperiment problemske nastave u BiH

U susjednoj nam zemlji, Bosni i Hercegovini, primijenjen je grupni eksperiment s paralelnim ujednačenim grupama školske godine 2010./2011. koji je trajao osamdeset radnih dana. Sudjelovao je 101 učenik trećeg razreda Ekonomske škole u Zenici.

4.0.1. Zadaci istraživanja

Predmet istraživanja je eksperimentalna provjera utjecaja učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovnu uspješnost u srednjoškolskoj nastavi matematike. Treba utvrditi hoće li učenici biti osposobljeni za rješavanje problemskih zadataka u nastavi.

Zadaci kojima su se vodili u istraživanju su:

- (1) Utvrditi razlike u učincima učenja s obzirom na rezultat učenika na testu osposobljenosti za samostalno rješavanje problemskih zadataka u elementarnoj nastavi matematike.
- (2) Utvrditi razlike u pogledu kakvoće učenikova znanja između načina rada organiziranoga na klasičan, tj. tradicionalan način i znanja stečenih rješavanjem problemskih zadataka.
- (3) Utvrditi razlike u pogledu trajnosti znanja, onih znanja stečenih na tradicionalan način i onih znanja koja su stečena rješavanjem problemskih zadataka na sadržajima osnovnoškolske matematike.
- (4) Utvrditi je li u eksperimentalnoj grupi nezavisna varijabla imala utjecaja na povećanje interesa učenika za novi način rada.
- (5) Utvrditi je li u eksperimentalnoj grupi nezavisna varijabla imala utjecaj na obrazovni učinak.
- (6) Utvrditi postoje li i kakve su razlike između eksperimentalne i kontrolne grupe u pogledu motivacije učenika.
- (7) Utvrditi razlike u pogledu stvaralaštva učenika, onoga stvaralaštva stečenog rješavanjem problemskih zadataka i onoga zasnovanog na tradicionalnome, uobičajenome načinu rada na sadržajima osnovnoškolske matematike.
- (8) Utvrditi kako učenici i učitelji reagiraju u novoj didaktičko-metodičkoj situaciji, tj. u situaciji učenja rješavanjem problemskih zadataka.

Ispitivale su se i mogućnosti primjene učenja rješavanjem problemskih zadataka i utvrđivao obrazovni uspjeh učenja rješavanjem problemskih zadataka na sadržajima

srednjoškolske matematike. Pod obrazovnim uspjehom podrazumijeva se uspjeh u znanju, odnosno ukupan rezultat na testu znanja iz nastavne cjeline Trigonometrija. Cilj je približiti učenike onome što je bitno u matematičkim sadržajima, kako bi raspolagali činjenicama i informacijama, te utvrditi stabilnost stečenog znanja.

4.0.2. Način provođenja problemske nastave i rezultati

Bazu eksperimentalnog programa u BiH čini nastavni plan i program iz matematike za treći razred srednjih tehničkih i srodnih škola u okviru nastavne cjeline Trigonometrija, a sam eksperimentalni program je trajao 21 školski sat u okviru kojih su osim nastavnih sati obrade novog gradiva uključeni i sati ponavljanja i vježbanja. U kontrolnoj grupi se radilo na tradicionalan način. Izrada eksperimentalnog programa uključivala je osmišljavanje nastavnog sata u kojem se obrađuje novo gradivo, izbor nastavnih jedinica u kojima će se provesti problemska nastava, utvrđivanje obrazovnih ciljeva za učenike i pisanje priprema za odabrane nastavne jedinice. Struktura nastavnog sata određena je na osnovu teorijskog dijela i podjeljena u korake:

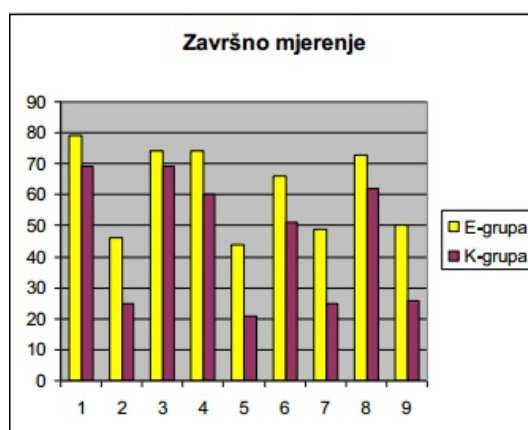
- postavljanje problemskog zadatka,
- definiranje problema,
- postavljanje hipoteza,
- rješavanje problemskog zadatka,
- analiza rezultata i zaključci,
- provjera stečenih znanja u novim problemskim situacijama.

Odabir nastavnih jedinica je napravljen na osnovu plana i programa, a izabrane su sljedeće nastavne jedinice:

1. Definicija trigonometrijskih funkcija na trigonometrijskoj kružnici,
2. Definicija trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokutu,
3. Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30° , 45° i 60° ,
4. Osnovni trigonometrijski identiteti,
5. Znak trigonometrijskih funkcija,
6. Svođenje trigonometrijskih funkcija na prvi kvadrant,
7. Adicione formule,
8. Sinusov teorem.

Nakon provedene eksperimentalne nastave, dvije grupe koje su na početku istraživanja bile ujednačene prošle su kroz završno mjerenje. Učenici obje grupe istovremeno su pisali test iz trigonometrije koji se sastojao od 9 zadataka, sa ukupno 18 bodova.

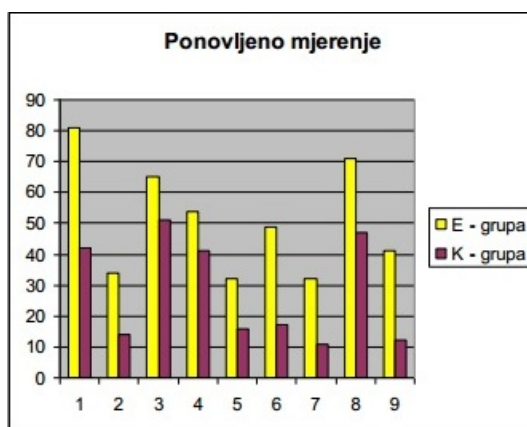
U završnom mjerenju E-grupa je pokazala bolje rezultate. U eksperimentalnoj grupi prosječan rezultat po učeniku je 10,88 bodova, a u kontrolnoj grupi 8,16. Uspješnost testa kontrolne grupe iznosi 45,3%, i taj uspjeh se obično postiže u tradicionalnoj nastavi. Ako uzmemo u obzir prosječnu ocjenu učenika iz matematike na kraju drugog razreda, a koja iznosi 2,86, ovaj rezultat je očekivan. Međutim, uspjeh eksperimentalne grupe ukazuje da je odabir drugačijeg oblika rada uticao na mnogo bolji rezultat testa, a nastao je zbog primjene učenja rješavanjem problemskih zadataka u području stjecanja znanja koja omogućuju bolji obrazovni uspjeh u nastavi matematike srednjih škola.



Slika 11.

U testu su korišteni i zadaci koji se odnose na definiranje osnovnih pojmova u nastavi trigonometrije, poznavanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30° , 45° i 60° , grafičkog predstavljanja trigonometrijskih funkcija na trigonometrijskoj kružnici, kao i poznavanje osobine periodičnosti trigonometrijskih funkcija. E-grupa ostvarila je bolji rezultat u rješavanju zadataka koji se odnose na usvajanje osnovnih činjenica iz trigonometrije u odnosu na K-grupu, što je vidljivo na Slici 11.

U želji da se utvrdi jesu li znanja stečena rješavanjem problemskih zadataka trajnija od onih stečenih tradicionalnim načinom rada, nakon devedeset dana od prestanka djelovanja eksperimentalnog programa, ponovno je izvršeno mjerenje istim pismenim ispitom znanja. Taj period smatran je dovoljnim za sređivanje učenikovog znanja, a obuhvatio je i zimske praznike. Slika 12. prikazuje rezultate ponovljenog mjerenja.



Slika 12.

Usporedba ponovljenog testa sa mjerenjem na kraju eksperimentalnog programa pokazuje da je u obje grupe došlo do pada nivoa općeg uspjeha u rješavanju testa. Eksperimentalna grupa je zadržala veću prednost u završnom mjerenju, jer je svaki učenik te grupe ostvario 50% mogućih bodova, što je više nego 45,3% kod učenika kontrolne grupe. Rješavanje problemskih zadataka omogućilo je veću stabilnost znanja u eksperimentalnoj grupi.

5. Problemska nastava u drugim zemljama

Istraživanja pokazuju da uvođenje učenja temeljenog na problemu (PBL - problem based learning) može poticati učenje problemskih zadataka, poboljšati sposobnost učenja kod učenika, promijeniti njihovu percepciju prema predmetu i stvoriti aktivne učenike. Nedovoljno je istraživanja s naglaskom na usvajanje PBL metode u kurikulumu matematike u zemljama poput Malezije.

Trenutni nastavni plan i program i pedagogija zaposlenih u višim obrazovnim institucijama u Maleziji ne pripremaju učenike za izazove sa kojima će se susresti na radnom mjestu. Visoka stopa nezaposlenosti u Maleziji nastaje zbog nedostatka osnovnih vještina, stručnosti, komunikacijskih vještina i znanja među malezijskim diplomandima. Većina poslodavaca tvrde da novim diplomandima nedostaje vještina koje su srž uvjeta za bilo koje radno mjesto. Općenito meke vještine mogu se podijeliti u tri područja; karakter, međuljudske vještine, kritičko i kreativno razmišljanje.

PBL je učenje temeljeno na problemu u kojem učenici rade u malim grupama na rješavanju danih problema. Te male skupine učenika obično vode nastavnici. PBL je bio početnički program i intenzivno se koristio u medicinskoj školi Sveučilišta McMaster, Ontario, Kanada, kako bi se prevladale ograničene sposobnosti učenika za primjenu nastave kod kliničkih problema. Danas se PBL intenzivno koristi u mnogim obrazovnim ustanovama diljem svijeta te u mnogim područjima stručnog usavršavanja, kao što su skrb, inženjering i arhitektura. Slika 18. pokazuje provedbu PBL-a u sveučilištima u Maleziji.

LOKALNE INSTITUCIJE	PODRUČJE
University Islam Malaysia	Zakon okoliša
Universiti Malaysia Sarawak	Medicina
Universiti Kebangsaan Malaysia	Medicina
Universiti Sains Malaysia	Fizika
Universiti Malaya	Matematika s informacijskom tehnologijom
Universiti Teknologi Malaysia	Informacijska tehnologija
Universiti Tun Hussein Onn	Engineering

Slika 18.

PBL je primijenjen u nekoliko stotina škola u Sjedinjenim Američkim Državama u proteklih 10 godina. PBL se vjeruje da povećavaju samo-efikasnost studenata. Da bi to dokazali, u 2004, Cerezo je proveo kvalitativno istraživanje među 14 žena koje su upisale matematičke kolegije da istraži povezanost PBL-a i samoučinkovitosti. Istraživač je provodio razgovor sa studentima iz različitih razreda u različitim školama u SAD-u. Svi ispitanici u razgovoru su izjavili da im se sviđa PBL učenje više zbog zanimljivije formulacije problema te da mogu raditi u skupinama. Nadalje, rezultati istraživanja su također pokazali da postoji pozitivna korelacija između PBL-a i samoučinkovitosti. Prema rezultatima, svi ispitanici složili su se da je PBL promijenio njihov proces učenja, povećao njihovu motivaciju, pomogao im da nauče više o temi i

stvorio osjećaj uzbuđenja oko dolaska u učionicu.

U 2005. godini, provedeno je istraživanje o učinku pristupa PBL-a na studentovo samousmjereni ponašanje u učenju matematike u Singapuru. Istraživanje je provedeno među studentima koji su upisani na inženjersku matematiku. Mnogi studenti rekli su kako su postali više usmjereni na same sebe nakon doživljaja PBL-a u matematici. Međutim, većina ispitanika smatra da nisu uživali u učenju matematike pomoću PBL pristupa i PBL im ne pomaže da bolje razumiju procese koji se događaju u matematici. Razlog je taj što većina ispitanika ima vrlo ograničena temeljna znanja o određenoj temi i smatra da im PBL ne dopušta da uče kroz više prakse za koju misle da je bitna vještina za učenje matematike. Autori su također zaključili da većina ispitanika još uvijek voli učiti matematiku na konvencionalan način koji se čini mnogo lakši za učenike.

Vjeruje se da PBL povećava sposobnost učenika da vide vezu između problema u stvarnom svijetu i matematike. Istraživanje koje su proveli Portal i Sampson 2001. je potvrdilo to vjerovanje i dalo studentima priliku da koriste vještine razmišljanja višeg reda. Osim toga, autori su također pokazali da je povećan broj studenata koji su zadovoljni matematikom.

Implementacijom PBL-a u matematici se može povećati učinkovitost studenata. Istraživanje koje je proveo Webb 1996. na PBL matematičkom programu pod nazivom Interaktivni Matematički Programi (IMP) obuhvaća materijal iz algebre, geometrije, trigonometrije, statistike i vjerojatnosti, dokazuje to. Na temelju svojih rezultata, otkrio je da učenici koji sudjeluju u pilot programu IMP-a mogu raditi, jednako, a ponekad i bolje u odnosu na njihove vršnjake koji prolaze tradicionalnu metodu učenja matematike u srednjim školama. Što se tiče rješavanja problema vještine i kvantitativno rasuđivanje, Webb je utvrdio da IMP učenici pokazuju izrazito veći napredak u usporedbi sa svojim vršnjacima koji slijede konvencionalne metode.

Primjeri matematičkih pitanja temeljenih na PBL pristupu su:

Primjer 1: *Problem bazena*

Gospođa Shannon želi u svom dvorištu izgraditi bazen veličine $67,7m^2$ ³. Gledala je u katalogu i ne može se odlučiti između dva bazena, kružnog i pravokutnog. Pravokutni bazen je $9,14m \times 7,62m$ i visine od $4,57m$. Kružni bazen ima promjer od $4,57m$ i visinu $4,57m$. Za pomoć pri odabiru u svojoj odluci, ona je angažirala tim stručnjaka koji će ju savjetovati koji bazen treba odabrati da se uklopi u dvorište i da se cjenovno isplati. Gospođa Shannon obavještava da također želi staviti ogradu oko bazena iz sigurnosnih razloga i imati bazen sa manjim troškovima vode. Koristite svoje znanje kako bi gospođa Shannon odabrala bazen koji zadovoljava sve njezine zahtjeve:

A. Koji će bazen stati u njezino dvorište?

B. Oko kojeg bazena će biti jeftinije staviti ogradu?

³ $729ft^2 = 67.72632m^2$

C. Koji će bazen imati manje troškove vode?

Primjer 2: *Restoran*

Vaš restoran je izabrao Sean Combs, poznat kao P. Diddy, za njegov subotnji poslovni sastanak sa novim pjevačem. P. Diddy je angažirao vaš tim da isplanira i pokaže kulinarsko iskustvo vašeg restorana za njega i njegovog umjetnika. Odgovornosti vašeg tima su serviranje i odabir jela za goste, obračun računa te ispunjavanje svih zahtjeva gostiju. Gospodin Combs i njegov umjetnik nemaju prehrambenih ograničenja, a željeli bi imati obrok koji uključuje četiri slijeda. Koristite svoje organizacijske vještine da isplanirate veliku večeru i nezaboravno iskustvo za gospodina Combsa, tako da odabere vaš restoran za buduće događaje. Aktivnosti koje morate ispuniti:

- A. Odaberite jelovnik za gospodina Combsa i njegovog umjetnika.
- B. Ispuni narudžbu za gospodina Combsa i njegovog umjetnika
- C. Izračunajte ukupnu cijenu jela za gospodina Combsa i njegovog umjetnika
- D. Izračunajte porez na račun
- E. Izračunate napojnicu za račun
- F. Odredite ukupni iznos večere
- G. Završna provjera narudžbe gospodina Combsa

Način na koji određuju porez postotnim računom je sljedeći:

Korak 1 : Zbrojiti troškove

Korak 2 : Odrediti lokalni porez Porez se procjenjuje na svaki iznos naplaćenog dolara. Osim toga, iznos poreza određen je po mjestu gdje živite. Porezna stopa u Rocklandu je 8.125%.

Korak 3 : Promijeniti lokalnu poreznu stopu u decimalni oblik izostavljajući znak postotka i pomičući decimalnu točku za dva mjesta u lijevo. (Primjer: $8.125\% = 8.125 = 0.08125$)

Korak 4 : Pomnožiti ukupan trošak sa pretvorenim decimalnim iznosom poreza. Upamtimo kako je određivanje iznose poreza ekvivalentno određivanju dijela broja

Korak 5 : Rješenje je iznos poreza.

Hrvatska je također provela istraživanje u kojem je provedena problemska nastava u osnovnim školama. Uzorak istraživanja u Hrvatskoj činili su učenici šestog razreda. U eksperimentalnoj grupi bilo je 78 ispitanika, a u kontrolnoj grupi 77. Ukupno je sudjelovalo 155 ispitanika.

Prije izvođenja eksperimenta napravili su polazna mjerenja u kojima su utvrdili postoje li razlike, između te dvije grupe ispitanika, u općoj sposobnosti i predznanju iz matematike i kolike su, ako postoje. Utvrdili su da ne postoje značajne razlike. Eksperimentalni rad u razrednim odjelima započeo je početkom nastavne godine, tj. početkom mjeseca rujna i trajao 14 tjedana, upravo toliko koliko je operativnim nastavnim planom predviđeno za obradu sadržaja nastavne cjeline Operacije s razlomcima i koliko je bilo predviđeno za realizaciju sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika.

Po završetku eksperimentalnog rada obavljeno je završno mjerenje. Dvadesetak dana po završetku eksperimentalnog programa obavljeno je kontrolno mjerenje sa istim testovima kao što su bili u završnom mjerenju. Time je utvrđen stupanj zaboravljivosti i koliko on varira u grupama.

Istraživanje je pokazalo da je kontrolna grupa stagnirala ili neznatno napredovala u rješavanju istog testa gledajući postotak riješenog testa svakog učenika (početno mjerenje 41,7%, završno mjerenje 44,3%), dok je eksperimentalna grupa značajno napredovala (početno mjerenje 42,6%, završno mjerenje 58,5%).

Uspoređujući istraživanje sa onim koje je provedeno u BiH, vidimo da nema velike razlike. Osim što se razlikuju u dobi učenika i nastavnom sadržaju koje je bilo dio eksperimenta, utjecaj problemske nastave je gotovo pa isti. U Hrvatskoj se ispitivanje sastojalo od više testova, mjerenja i promatranja, ali kad se provjeravala trajnost stečenog znanja učenici su kao i oni srednjoškolci u BiH pisali ponovljeni test nakon izvjesnog vremena i pokazali slične rezultate. Gotovo sa sigurnošću se može tvrditi da izvođenjem problemske nastave učenici postaju trajni vlasnici stečenog znanja.

6. Problemska nastava u 21. stoljeću

Odvajanje nastave matematike od tradicionalne neophodno je u pripremi učenika za 21. stoljeće. Učenje sa razumijevanjem pokazuje se vrlo fleksibilno i učinkovito. Stvari naučene sa razumijevanjem mogu se prilagoditi novim situacijama i korisne su u promjenjivom i nepredvidivom svijetu.

Human je rekao da problemi iskorišteni kao sredstvo za razvijanje matematičkih vještina i znanja uz nastavnika vode ka socijalnoj interakciji i nastavnoj diskusiji. Učenik ima mogućnost istražiti matematiku rješavajući problem i tako doći do odgovarajuće metode za rješavanje. Pristup kada nastavnik učenicima kaže laž i pusti ih da raspravljaju i daju objašnjenja, potiče stvaranje učeničkih metoda kao što su pristup rješavanja usmjerenog na problem i modeliranje problema. Decentralizacija od problema temeljena je u didaktičkim situacijama. To se događa kada nastavnik izaziva prilagodbu kod učenika ostavljanjem izbor problema njima. Problemi moraju biti takvi da ih učenik prihvaća i želi riješiti. Nastavnik nastoji prenijeti dio ili svu odgovornost za rješavanje problema na učenika. Upravo je ta prilagodba pristupu usmjerenom na problem ona koja omogućuje rast matematičkog razumijevanja, prilagodljivosti i fleksibilnosti. To pak potiče način razmišljanja kod problemskog rješavanja koji je potreban u 21. stoljeću na budućem radnom mjestu.

Kad učenici rješavaju probleme, treba im pružiti priliku da ostvare postojeće (ne još eksplicitno) znanje i intuicije, dođu do nekog otkrića, daju smisleno značenje i matematički djeluju. Ove četiri karakteristike opisuju što znači rješavanje problema s razumijevanjem i fleksibilnošću.

Modeliranje omogućuje učenicima da verbaliziraju svoja razmišljanja i poboljšaju način razmišljanja. U osmišljavanju otkrića, učenici su u mogućnosti koristiti svoje matematičko mišljenje u izgradnji rješenja problema.

Pristup modeliranjem znači da učenici moraju prikazati šire i dublje razumijevanje problema. Modeliranje nadilazi rješavanje problema zato jer učenici izgrađuju i kontroliraju problem – a ne ga samo rješavaju. Zadatci iz modeliranja omogućuju značajni pristup učenicima i nastavnicima problemu koji premošćuje razumijevanje učenika i sposobnosti pri problemskom rješavanju.

Provedeno je istraživanje razvoja kompetencija modeliranja kod učenika u sedmom razredu radom u grupama. Dvanaest učenika sedmog razreda podijeljeno je u tri skupine od po četiri učenika u svakoj skupini. Prikazani su rezultati samo jedne grupe učenika čiji su rezultati iz matematike prethodne godine u tradicionalnoj nastavi bili slabi.

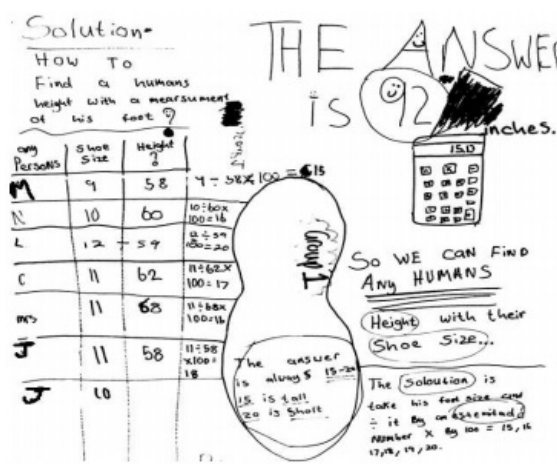
Zadatak pod imenom Big Foot tražio je od učenika da nađu visinu čovjeka ako im je zadan otisak stopala veličine 55 (što je oko 38 cm). Morali su objasniti na koji način su došli do rješenja. Materijal koji su koristili je bilo ravnalo, metar i džepno računalo. To je bio njihov prvi zadatak koji je pokazao koliki utjecaj zadaci modeliranja imaju

na razmišljanje učenika.

Ova grupa učenika imala je intuitivnu ideju da postoji univerzalni omjer stopala i visine. Krenuli su od vlastitog omjera tako što su duljinu svog stopala podijelili sa visinom i pomnožili sa 100. Učenik je uveo ideju sa postotkom iako nije znao postotke, ali kasnije se ispostavilo da je koristio množenje sa 100 kako bi uklonio decimalni broj koji je dobio dijeljenjem. Ova skupina također je imala intuitivnu ideju da je Big Foot vrlo visok, pa su i to koristiti za interpretaciju što im je omogućilo da napreduju u procesu rješavanja. Ako učenik stvara vlastite ideje i unaprijed konstruira, a potom i djeluje po njima, jasno se vidi kako je stvaranje izuma moguće. To ne bi bilo moguće kada bi se učenik koristio metodama i postupcima danim od nastavnika.

Nastavili su sa traženjem rješenja. Učenik je podijelio duljinu stopala sa visinom i pomnožio sa 100 i dobio 15. Zaključili su da moraju pokušati dobiti 16 puta onako kako su dobili 15 jer je to čovjek. Iako nisu vidjeli poveznicu između dijeljenja i množenja osmislili su način kako kraćim putem doći do približnog broja tako da bi rezultat bio 16. Nakon što je ova grupa našla omjer duljinu stopala i visine svi članovi grupe su imali četiri različita (vrlo slična) omjera. Shvatili su da je potrebno više podataka i više rada. Nastavili su raditi grupno, također su nastavili i kod kuće ali i sa drugim učenicima u školi. Nakon puno dobivenih omjera zaključili su da bi traženi omjer mogao biti 15, 16 ili 17. Dakle, Big Foot bi mogao biti visok oko 253 cm, 238 cm ili 224 cm. Vidi se da učenici razumiju ako je omjer manji od 15, procijenjena visina je previsoka, ili ako je omjer 19, procijenjena visina je prekratka.

Učeničko rješavanje problema i njihovo razmišljanje je prikazano na Slici 19⁴.



Slika 19.

⁴Na slici su prikazane mjere u inčima, 1inch = 2.54cm

7. Zaključak

Učenje rješavanjem problemskih zadataka omogućava dobar put i način da se učenici sustavno osposobljavaju za samostalan rad, što je od velike teorijske i praktične važnosti za izgrađivanje učenikove osobnosti, koja se osposobljava za učenje učenja, samoobrazovanje i stalno obrazovanje. Između rješavanja problemskih zadataka i školske nastave, postoji uzročno-posljedična veza. Naime, učenje rješavanjem problemskih zadataka, pod određenim uvjetima, postiže visoke obrazovne učinke što je važan pokazatelj o prednostima koje ovaj oblik učenja posjeduje i koje treba intenzivnije iskoristiti, ne samo u nastavi matematike, već i u drugim nastavnim predmetima i svim uzrastima. Sva istraživanja pokazala su da je prilikom primjene učenja problemskih zadataka najbolje koristiti interaktivni način rada, gdje je grupni oblik rada stavljen na prvo mjesto.

Sažetak

U radu ćemo reći nešto o problemskoj nastavi i organizaciji nastavnog sata u kojem učenici rješavaju problemski zadatak. Proći ćemo kroz istraživanja koja su provedena u zemljama poput Japana, BiH, Malezije i Hrvatske i time dobiti uvid u stupanj obrazovanja učenika u pojedinim državama. Vidjet ćemo kako je mijenjanje nastave utjecalo na izmjenu nastavnog plana i programa, literaturu i poučavanje. Zemlje poput Malezije teže prihvaćaju rad na problemu jer nemaju potrebno predznanje koje bi pomoglo učenicima da samostalno dođu do rješenja. Ulaskom u 21. stoljeće, za daljnje napredovanje i nove izume u obrazovanju se istaknulo modeliranje.

Title and summary

Problem based learning in mathematics. In this project we will introduce you with the teaching difficulties and the organization of teaching materials that also involve students to solve a problem task. Furthermore we will go through the conducted research that could give us a better insight into the educational abilities of students in countries such as Japan, Bosnia and Herzegovina, Malaysia and Croatia. We'll see how changes in the teaching influenced the change of curriculum, literature and teaching itself. For example countries like Malaysia do not accept work on the problem exercises because they do not have previous knowledge that could help students to independently come up with a solution. As we entered into the 21st century, further progression and new inventions in education pointed out that some countries need to invest more in the educational modelling.

Literatura

- [1] P. BICCARD, *Problem-centred teaching and modelling as bridges to the 21st century in primary school mathematics classrooms*, Stellenbosch University, (2010).
- [2] Ž. BJELANOVIĆ, *Jedan zadatak-više rješenja*, Matematika i škola, **15** (2002), 208-210.
- [3] K. HINO, *Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan*, ZDM Mathematics Education, **39** (2007), 503-514.
- [4] V. KADUM, *Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike*, Visoka učiteljska škola u Puli, Izvorni članak, UDK 371.38:51, (2005).
- [5] Z. KURNIK, *Heuristička nastava*, Matematika i škola, **34** (2006), 148-153.
- [6] Z. KURNIK, *Problemska nastava*, Matematika i škola, **15** (2002), 196-202.
- [7] M. LETCHUMANAN, *Problem Based Learning in Mathematics*, Math Digest: Research Bulletin Institute for Mathematical Research, **2** (2009). 21-25
- [8] O. STOJAKOVIĆ, *Problemska nastava*, Obrazovna tehnologija **3-4** (2005), 72-89

Životopis

Rođena sam 16. travnja 1990. godine u Osijeku. Godine 1997. upisujem se u područnu školu Cret, a 2001. godine nastavljam osnovnoškolsko obrazovanje u OŠ Bratoljuba Klaića u Bizovcu. Nakon završetka 2005. godine upisujem srednju školu Tehnička škola i prirodoslovna gimnazija Ruđera Boškovića u Osijeku, smjer prirodoslovna gimnazija. Završetkom srednje 2009. upisujem se na Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.