Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Ivana Tadić**

# Matematika u doba renesanse

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Ivana Tadić**

# Matematika u doba renesanse

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2015.

# Sadržaj

# Uvod

Sam početak 14. stoljeća u Europi davao je sve osim nade u bolje sutra. Kuga, glad i smrt, ono što čovjeka vodi k dnu, harali su jadnim stoljećem. Međutim, propast koja je prijatila zapadnoj civilizaciji nikad se nije dogodila.

U prvom dijelu rada ćemo vidjeti kako je populacija postupno rasla uspostavljajući urbanu kulturu različitu od feudalne i crkvene. Sve je počelo dobivati smisao, pogotovo u Italiji koja je najmanje bila pogođena nedaćama 14. stoljeća. Dogodio se preporod, preporod zvani *Renesansa.* Renesansa je grabila krupnim koracima naprijed. U doba Renesanse izumljen je tiskarski stroj koji je omogućio tiskanje tisuće knjiga od kojih je najpoznatija Gutenbergova Biblija. Prve tiskane knjige slabo su se bavile matematikom. Najpoznatija "matematička" knjiga bila je Paciolieva *Summa*. *Summa* je bila puno više od onoga što se proučavalo na sveučilištima koja su se počela osnivati u 12. i 13. stoljeću. Nastavni plan sveučilišta temeljio se na književnom obrazovanju iako je Renesansa trebala dokazati važnost matematike poput ostalih grana znanosti. Renesansni mislioci stvorili su verziju klasičnog, tj. humanističkog nastavnog plana izostavljajući matematičke discipline zajedno s logikom. U drugom dijelu rada suočit ćemo se s neproporcionalnim renesansnim postignućima u matematici u odnosu na umjetnost te uspostavljanjem algebarske tradicije. Upoznat ćemo se s jednom od najslavnijih matematičkih rasprava zbog koje će se otvoriti natjecanje u rješavanju matematičkog problema u Veneciji 1535. gdje će Fiore izazvati Tartagliu da riješi razne vrste kubnih jednadžbi. Zatim na scenu stupa Cardano koji će nepošteno "preuzeti" Tartagliine zasluge i zauvijek postati poznat po rješenju kubne jednadžbe. Ali, to nije sve. Cardanova rješenja kubnih jednadžbi bila su realni brojevi sve dok Bombelli nije dokazao da postoje i imaginarna rješenja.

Na kraju se postavilo pitanje o rješenjima jednadžbi većeg stupnja. Tako je Ferrari dao rješenja za jednadžbe četvrtog stupnja. A zatim su na red došle i jednadžbe petog stupnja gdje su svoj doprinos dala tri matematičara, Ruffini, Abel i Galois. Time je došao značajniji kraj matematičkim postignućima u doba Renesanse.

# 1 Europa u četrnaestom i petnaestom stoljeću

## 1.1 Kuga, glad i smrt

Ako se 13. stoljeće može gledati kao vrhunac srednjovjekovne Europe, onda je možda 14. stoljeće njegova najniža točka. Iako je 13. stoljeće pružilo obilje obećanja za budućnost, mnogi događaji su se urotili da bi sljedeće stoljeće izgledalo mračno poput onog perioda koji je uslijedio nakon pada Rima. Nesretne okolnosti ličile su na epokalipsu: kuga, glad i smrt.

Četrnaesto stoljeće počelo je nizom jakih padalina, tako neprekidnih i rasprostranjenih da su ga kroničari tog vremena uspoređivali s velikim potopom iz Knjige Postanka. Ne samo da je klima postala vlažnija nego je uvelike i zahladnilo pa se to doba nazivalo Ledeno doba. Cjelokupan učinak bio je užasavajući propast usjeva popraćen glađu tijekom koje se stopa smrtnosti alarmantno povećala, osobito u gradovima od kojih su neki gubili 10% svojih stanovnika u šest mjeseci. Oni koji su trpjeli pothranjenost bili su manje otporni bolestima. Ljude oslabljene glađu zadesila je još gora nesreća zvana Crna smrt.

Crna smrt je bila kuga koju su prenosili smeđi štakori, točnije muhe koje su bile paraziti na smeđim štakorima. Kuga se lako širila u prenapučenim i prljavim uvjetima srednjovjekovnih gradova. Izbijanje kuge došlo je do Sredozemlja 1347. godine preko talijanskih brodova iz Krima, glavne luke u Crnom moru. Budući da je Krim bio zadnja stanica većine karavanskih putovanja, vjerojatno je da je sjeme epidemije doneseno iz Kine. Bolest se zatim proširila velikom brzinom širom Zapadne Europe pogađajući Francusku 1348. te Englesku godinu kasnije. Medicinsko znanje bilo je beznadno ili nedovoljno; ništa se nije moglo učiniti da bi se spriječio napad. Crna smrt bjesnila je tri godine i čak kada je najgore prošlo, vraćala se manjom zaraznošću u vremenskim razmacima od 12 do 15 godina sve do kasnog 17. stoljeća. Zadnji put kuga je izbila u Londonu 1655. godine. U nedostatku vjerodostojne statistike nemoguće je točno procijeniti užasan broj umrlih. U Parizu je navodno svakog dana od kuge umiralo 800 ljudi, a u Avignonu je u prvih šest tjedana 10000 ljudi sahranjeno u jednu masovnu grobnicu. Neke brojke kojim raspolažemo ukazuju na to da je u nekim gradovima polovina, a globalno gledano možda trećina stanovništva preminula, dok su druga područja totalno lišena svojih stanovnika. Bolest je pogoršala nestašicu hrane u poljoprivrednim predjelima.

U francuskom gradu Montpellieru, umrlo je toliko stanovnika da su osnivači grada pozivali na naseljavanje iz susjedne Italije. Jedini su u opasnosti bili oni čije je zani-

manje tražilo od njih da ostanu u pogođenim gradovima: službenici koji su pokušali očuvati red, liječnici, svećenici koji su ostali pomoći i utješiti umiruće, studenti koji su nastavili svoje studije. Oni su također masovno stradali te je društvo lišeno svojih vođa bilo potreseno i nestabilno za čitavo sljedeće stoljeće.
Veo rata nadvio se nad cijelim tužnim stoljećem. Najpoznatiji od tadašnjih ratova bio je niz engleskih invazija Francuske koje su trajale od 1338. do 1452. nama poznati kao Stogodišnji rat. Dugo se vukao prije nego je jedan strana pobijedila. Čak ni kratki prekidi rata nisu prolazili u miru. Tisuće vojnika odbijalo je ostaviti svoje oružje i umjesto toga su formirali harajuće skupine razbojnika, najamničkih vojnika koji su pljačkali sela i tražili otkupninu za one koje su zarobili. Ovoj tiraniji i patnji mora se dodati prva društvena pobuna težaka i siromaha iz gradskih područja. Divlje pobune vodile su se u Flandiji od 1323. do 1328., u sjevernoj Francuskoj 1358. i Engleskoj.
U 14. stoljeću ljudi su vidjeli budućnost kao niz zala; očaj i poraz svugdje su preplavili osjećaje povjerenja i nade. Depresivno ozračje ovog vremena za nas je očuvano u *Dance Macabre* ili Plesu Smrti, stvarnom plesu u pantonimi koji se izvodio u javnim propovijedima u kojima se osoba iz svih društvenih slojeva suočava sa truplom koje mora postati.

## 1.2 Talijanski preporod

Ipak konačna propast koja je prijetila zapadnoj civilizaciji, nikad se nije dogodila. Katastrofe kuge, glada i smrti su se otpilike do 1450. postupno smanjivale tako da je populacija porasla, nadoknađujući gubitke od 1300. pa nadalje.
Gradovi su se također počeli ubrzano širiti. Blagostanje je opet bilo moguće pod uvjetom da se ponovno uspostavi javni red. Većina stanovnika Zapadne Europe postala je uvjerena da se nedaća jake monarhije treba manje plašiti nego slabosti vlade, da je pobuna mnogo opasnija društvu od kraljevske tiranije. Stoga, poslije dva stoljeća užasa, politička se sigurnost vratila sa dolaskom "novih monarhija", odnosno Luja XI u Francuskoj, Ferdinanda i Isabelle u Španjolskoj, Henrika VII u Engleskoj. Uspon ovih jakih država označio je smrt feudalizmu i osigurao čvrste temelje na kojima se mogla graditi nova europska civilizacija.
Dok je dugogodišnja stagnacija gospodarstva odgovarala poticaju dramatičnog rasta populacije, Zapadna Europa doživjela je oporavak koji je mnogima izgledao kao značajan preporod. Ne samo da su Europljani uspjeli uspostaviti red, stabilnost

i blagostanje, nego su otpočeli i niz poduhvata koji su uvelike proširili njihova književna i umjetnička stajališta. Kasnijim generacijama ovo ponovno buđenje ljudskog intelekta poznato je kao Renesansa. Riječ je nasljedstvo velikog povjesničara iz 19. stoljeća, Jacoba Burkhardta, koji je u djelu *Civilizacija Renesanse u Italiji* (1860.) popularizirao ideju talijanske renesanse kao posebno razdoblje u povijesti kulture koje se jasno razlikuje od prethodnog perioda i suvremene kulture sjeverno od Alpa. Posljednjih godina je cijeli pojam *renesansa* postao sumnjiv onima koji tvrde da se veći period kulturnog postignuća odigrao u 12. stoljeću. Ne postoji više nikakav opći dogovor oko značenja Renesanse, njezinog uzroka ili čak geografskih ili vremenskih odrednica. Jedno je samo jasno, da se naposljetku ne može zanemariti. Nije mogla u potpunosti nastaviti upijati sve veću gradsku populaciju i prilagoditi se ekonomiji zasnovanoj na trgovini, a da se ne izmjeni u nešto očito drukčije. Stoga, zavisno od konteksta, trebamo koristiti naziv *Renesansa* u oba njezina trenutna smisla: kao veliki preporod književnosti i umjetnosti sa svojom naklonošću za klasični kulturu ili kao period prelaska (otprilike 1350. − 1550.) tijekom kojeg se dogodila presudna primjena od uglavnom feudalne i crkvene kulture do pretežno svjetovne, urbane i nacionalne.

Razlog zbog kojeg se kulturni preporod dogodio i održavao u Italiji je bez dvojbe taj što Italija nije bila ozbiljno pogođena ratom i gospodarskom dislokacijom kao što je to bilo sa sjevernim zemljama. (Italija je pretrpjela mnogo manjih ratova, ali ne veći sukob.) Početkom 15. stoljeća feudalizam je iščezao iz središnje i sjeverne Italije ustupajući mjesto energičnom urbanom društvu političko neovisnih gradova-država. Intelektualci i umjetnici ovih naprednih teritorijalnih država, u nadi da će poduprijeti ili zamijeniti nestabilne srednjovjekovne kulture, mislili su da su pronašli model za njihovo svjetovno i individualističko društvo u prošlosti klasike. Cvjetala je kultura latinskih i grčkih klasika sa intenzitetom kakav nije viđen od pada Rima. Ovaj preporod klasične kulture bio je jedna od svojstvenih karakteristika Renesanse i jedan od glavnih pokretača njezine promjenjive civilizacije.

Dva su događaja pomogla ubrzati ovaj porast zanimanja za književnost antike, predaja Konstantinopola Turcima (1453.) i izum Gutenbergova tiskarskog stroja s pokretnim metalnim slovima (oko 1450.). Dugo prije nego su Arapi pokorili Egipat, odbjegli znanstvenici iz Aleksandrije stigli su u Carigrad (Konstantinopol) sa svojim knjigama, učinivši gradove-države odmorištima onoga što je ostalo od klasične književnosti. 29. svibnja 1453. Ottoman Tursk je osvojio veliki grad; iako je Carigrad dugo bio samo enklava u turskom teritoriju, njegov pad zaprepastio je kršćanstvo. Konačan propast Bizanta potaknuo je niz grčkih znanstvenika da potraže utočište na talijanskom tlu, donoseći sa sobom dragocjenu zalihu klasičnih rukopisa. Brojna blaga grčkog učenja, poznata jedino preko arapskih izvora, sada su se mogla proučavati iz originalnih izvora.

## 1.3 Umjetničko pisanje: izum tiskarskih strojeva

Izum tiskarskog stroja pokrenuo je prijenos i širenje ideja, tako čineći novostečeno znanje dostupnim široj publici. Ručno pisane knjige bile su rijetke i dragocjene te su bile vlasništvo bogatih, a znanstvenici pod njihovom zaštitom. Malobrojne knjige koje su bile dostupne široj javnosti morale su biti vezane u lance. Kao dodatno osiguranje od njihovog gubitka mnoge su sadržavale prokletstva proklinjući bilo koga tko ih ukrade, uništi ili im se samo približi, a da pri tome nije oprao ruke. Kada je postalo moguće izdavati knjige ne samo u jednom primjerku, nego u stotine ili čak tisuće njih, svijet slova i učenja postao je dostupan umjereno imućnim slojevima društva.

Nema potrebe naglašavati važnost tiskanja pomoću stroja koji ima pokretna slova. Ipak, treba naglasiti da su prvi tiskarski strojevi napravljeni u ranom 15. stoljeću u srednjovjekovnoj Njemačkoj, ne u renesansnoj Italiji, i da su talijanski znanstvenici dugo vremena prezirali novi proces. Osim toga, poticaj koji je vodio do izuma tiskanja bio je tipična srednjovjekovna želja za bržim i jeftinijim načinom pisanja religijskih tekstova. Tiskalo se i prije Gutenberga, ali je Gutenbergova Biblija zasigurno značila novi početak.

Prvi oblik tipkanja u Europi, ili uopće na papiru bilo je blok printanje (prijenos tinte sa izrezbarenih drvenih ploča) karti za igru zadnjih desetljeća četrnaestog stoljeća. Među mnogim knjigama, neke su postigle značajnu popularnost. Najbolje poznata bila je *Biblija siromašnih*, knjiga koja je sadržavala 40 stranica religijskih slika s minimalnim brojem zapisa, namijenjena za naobrazbu osnovnih biblijskih poruka za neobrazovane. Ono što je stoga uslijedilo u 15. stoljeću nije bio tiskarski izum, nego ideja odvojenih metalnih slova. Naravno, proizvodnja papira načinjenog od lana pomogla je u popularizaciji novog otkrića; malo bi koristi bilo od jeftine metode kopiranja kada bi jedini raspoloživi materijal bio pergament.

Do osmog stoljeća, kada je Islam razdvojio Istok i Zapad egipatski se papirus nije više proizvodio. Monaški znanstvenici su stoga pisali na pergamentu načinjenom od kože životinja, obično ovčje ili kozje. Pergament je pravljen za pisarske svrhe spo-

rim procesom tako što se koža namakala u otopinu octa da bi se razgradili organski materijali, rastezala u okviru i trljala vulkanskim pijeskom da bi se postigla glatkoća te se na kraju ravnala i rezala. Pergament je imao više prednosti nego papir, bio je otporan na vlagu, i ako tekst više nije bio potreban, mogao se strugati te se ista površina za pisanje mogla ponovno koristiti. No ipak, pergament je bio skup pa bez jeftinijeg materijala za tiskanje, izum tiskanja ne bi bio tako koristan ni značajan.
Prva uporaba papira od konoplje, kore drveta te ribarskih mreža i krpa, po pažljivim zapisima kineske dinastije, datira iz 105. godine, ali ovo otkriće kao i većina ostalih je vjerojatno postupan proces. Kineski zatvorenici podučavali su tajne proizvodnje papira arapskim tamničarima u 8. stoljeću. Sljedećih 500 godina samo su Arapi proizvodili papir dok te vještine nisu prenijeli Mauri na kršćanske osvajače. Početkom 14. stoljeća papir je još uvijek bio poprilično rijedak materijal u Europi koji se uvozio iz Damaska i proizvodio u malenim količinama u nekoliko novootvorenih tvornica u Italiji. Do kraja stoljeća, papir se proizvodio u Italiji, Španjolskoj, Francuskoj i južnoj Njemačkoj te je uvelike zamijenio pergament kao standardni materijal za pisanje za sve osim za bogate. Gutenbergova Biblija bila je jedan od nekoliko rano tiskanih, poznatih knjige na pergamentu, a za svaku od njih bila je potrebnu koža od 300 ovaca.
Nakon što je izumljena *božanska umjetnost* tiskanja uz pomoć pokretnih tipki, proširila se munjevitom brzinom širom Srednje i Zapadne Europe tako da su imena 1500 tiskarskih strojeva bila poznata do kraja stoljeća. Nemoguće je ustanoviti točan broj knjiga tiskanih prije 1500. godine. Prema nazivima skupljenim u raznim katalozima iz razdoblja najranijih početaka tiskanja pojavilo se oko 30000 tiskanih radova. Pretpostavljajući da su izdanja bila malena i da su u prosjeku imala 300 kopija, postojalo je gotovo 9 miliona knjiga (uključujući brošure) u Europi do 1500. godine u odnosu na nekoliko tisuća rukopisa koji su sadržavali svu nenadoknadivu predaju iz prošlosti.

Prve tiskane knjige slabo su se bavile matematikom. Mnoga matematička djela pisana sredinom 15. stoljeća kao što je Regiomontanusova studija *De Trianglis* su se pojavila u tisku mnogo kasnije. Ono što je prethodilo tiskanim knjigama bile su knjige poput Biblije (koja se pojavljuje u mnogim izdanjima na latinskom i drugim jezicima), knjige meditacije i razne religiozne rasprave. Ona matematička djela koja su tiskana bila su neoriginalna te su zaostajala za djelima velikih matematičara 13. i 14. stoljeća. Prvi popularni udžbenik *Treviso Arithmetic* objavljen je 1478.

u Trevisu, važnom trgovačkom gradu sjeverno od Venecije. Zapravo je sadržavao skup pravila za izračunavanje uobičajenih kalkulacija, tvrdi nepoznati autor. Izdan je na zahtjev mladih ljudi koji su se pripremali otpočeti trgovačke karijere. *Treviso Arithemtic* bilo je značajno djelo ne toliko zbog svog sadržaja koliko zbog uvođenja izvanrednog pokreta. Prije kraja 15. stoljeća tiskalo se preko 200 matematičkih knjiga samo u Italiji. Euklidovi *Elementi* s latinskim tumačenjima koja je davao Campanus Novara, objavljeni su 1482. u Veneciji, a potom 1491. u Vicenzi. Campanus nije dovoljno poznavao arapski tako da je ova verzija sadržavala brojne greške i divljačku terminologiju. 1505. godine Zamberti je objavio novi prijevod koristeći obnovljeni grčki rukopis.
Jedan od prvih europskih znanstvenika koji je iskoristio prednost obnove izvornog grčkog teksta bio je matematičar, astronom Johannes Müller (1436. – 1476.) bolje poznat pod imenom Regiomontanus, ime koje je dobio po latinskom nazivu svog rodnog grada Königsberga. Najistaknutiji znanstvenik tog vremena, Regiomontanus, aktivno je prevodio i objavljivao raspoložive klasiče rukopise, uključujući Ptolomejevu studiju astronomije *Almagest*. Plodovi ovog proučavanja pokazali su se u njegovoj najistaknutijoj publikaciji *De Triangulis Omnimodis* (O trokutima svih vrsta). Djelo je završeno oko 1464., ali nije tiskano do 1533. Tigonometrija je bila jedan od nekoliko grana matematike koja se znatno razvila zahvaljujući Grcima i Arapima. U *De Triangulis*, Regiomontanus je sustavno sažeo djela ovih začetnika i nastavio rješavati sve vrste problema vezanih za ravninske i sferne trokute. Jedine trigonometrijske funkcije koje su se uvele bile su sinus i kosinus, ali je kasnije Regiomontanus zapisao i tablicu s vrijednostima funkcije tangens. *De Trianglisu* je svrsishodno uspostavio trigonometriju kao posebno granu matematike, neovisnu o astronomiji.
Ispravljanje kalendara bila je glavna briga u to vrijeme, posebno kada je u pitanju izračunavanje datuma Uskrsa. Nicejski sabor (održan 325.) ugovorio je da se Uskrs mora staviti prve nedjelje poslije proljetne ravnodnevnice, prvi dan proljeća, 21. ožujka za sve buduće godine. Rimski ili julijanski kalendar koji je uveo Julije Cezar zasnovan je na godini koja traje 365 i 1/4 dana sa prijestupnom godinom svake četvrte godine. Ovo nije bila dovoljno precizna mjera jer duljina solarne godine, vrijeme koje je potrebno da Zemlja obiđe orbitu oko Sunca, je 365.2422 dana. Ova malena greška značila je da Uskrs dolazi kasnije svake 128. godine nego što bi to bilo slučaj po solarnoj godini.
Regiomontanus je postavio zvjezdarnicu i privatni tiskarski stroj u Nurembergu.

Objavio je dva kalendara 1472., jedan na latinskom i jedan na njemačkom. Iako je svaki kalendar dodao crkvene datume Uskrsa za period od 1475. – 1531., latinska je verzija također sadržavala različit skup datuma koji su se računali prema Regiomontanusovim astronomskim zapažanjima. Njegovi su kalendari bili mnogo poznati, oni su među najstarijim primjercima tiskanja sa pokretnim slovima, što svjedoče prodaje i brojna izdanja. 1475. papa Siksto IV pozvao je Regiomontanusa u Rim da ih savjetuje kako uskladiti kalendar s astronomskim pojavama. Preminuo je ubrzo nakon toga, iznenada i pomalo misteriozno. Neki kažu da su ga otrovali neprijatelji, ali je najvjerojatnije postao žrtva kuge koja je harala nakon što je Tiber preplavio svoje obale.

Poslije Regiomontanusove smrti zaboravilo se na reformu kalendara i više se nije dovodila u pitanje sve do vladavine pape Grgura XII. On je okupio veliki broj matematičara, astronoma i visokih crkvenih dostojanstvenika 1552. da konačno isprave nedostatak u crkvenom računanju datuma Uskrsa. Isusovac i matematičar Christoph Clavius bio je glavni u izračunavanju potrebnih kalkulacija. Pri tome se oslonio na djelo Erasmusa Reinholda *Tabulae Pritencia* (1551.) nazvano po Reinholdovom zaštitniku, pruskom vojvodi. To su bili daleko superiorniji rezultati od bilo kojih drugih astronomskih tablica koje su bile na raspolaganju, slobodno koristeći zapažanja koja je Kopernik koristilo u svojoj *De Revolutionibus.*

Novi kalendar koji je bio nametnut pretežno katoličkim zemljama Europe, poznat kao gregorijanski kalendar, odredio je da se izostavi 10 dana u 1582. godini. Ovo se postiglo tako što se 15. listopada uslijedio odmah nakon 4. listopada te godine. Istovremeno, Clavius je ispravio shemu za prijestupne godine. To bi bile godine djeljive s brojem četiri osim onih godina koje obilježavaju stoljeća; takve godine bile bi prijestupne samo ako bi bile djeljive s brojem 400. Budući da je ova objava potekla iz Rima, anglikanska Engleska i njezini posjedi suprostavili su se promjenama. Kada je Engleska usvojila gregorijanski kalendar 1752., izbile su pobune budući da su ljudi zahtijevali povratak njihovih "izgubljenih dana" .

Teško je, ako ne i nemoguće procijeniti utjecaj ovih novih trigonometrijskih saznanja prilikom velikih otkrića kasnog 15. stoljeća. Neko vrijeme povjesničari su mislili da su portugalski moreplovci prilikom opasnih putovanje južno od ekvatora duž afričke obale koristili tablice solarne deklinacije iz Regiomontanusovog godišnjaka, *Ephemerides Astronomicae*, ali izgleda da prva izdanja (1474.) ovog djela ne sadrže takve tablice. Ono što se zna je da je Kolumbo nosio kopiju *Ephemerides* na svoja četiri putovanja do Novog svijeta. Jednom prilikom, saznavši da je Regiomontanus pre-

dvidio pomrčinu mjeseca 29. veljače 1504., Kolumbo je iskoristio ovo znanje da bi zastrašio domorodce kako bi mu oni ponovno vratili njegove brodove.
Ovaj period nije bio poznat samo po Regiomontanusu nego i po Luca Pacioli (1445.–1514.), franjevačkom svećeniku kojeg su obično zvali Fra Luca di Borga. Mnogi su učenjaci ovog vremena osjetili prisilnu potrebnu da sjedine, unutar stranica jedne velike knjige, sve poznate informacije iz neke određene oblasti. Postojao je sustavan i sažet pregled za svako zanimanje ili ukus. Paciolova *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* objavljena u Veneciji 1494. godine, bila je najutjecajnija matematička knjiga tog vremena. Prvo opsežno djelo koje se pojavilo poslije Fibonaccijevog *Liber Abaci* nije sadržavalo ništa što se nije moglo pronaći u Fibonaccijevoj raspravi. To pokazuje koliko je europska matematika napredovala u gotovo 300 godina. Ali kao enciklopedijsko izvješće glavnih matematičkih činjenica preuzetih iz Srednjeg vijeka, Summa je daleko više od onoga što se podučavalo na sveučilištima. Neoprezno ispisana na talijanskom jeziku povijesno je značajna po svojoj širokoj popularnosti.

## 1.4 Osnivanje velikih sveučilišta

Sveučilišta koja su se osnivala postala su istaknuta u kultiviranju i širenju znanja. Latinski "universitas" bio je prvobitno puki sinonim za "communitas", opća riječ koja je označavala skup pojedinaca povezanih zbog dijeljenje ideja. U početku su jedini obrazovni centri bili samostani. Njihova osnovna funkcija bila je vjerska služba, ne intelektualna, i nisu bili skloni podučavati one koji nisu bili njihovi članovi. Oni su čuvali više nego pridonosili književnosti. Dok je određeni broj laika tražio porast obrazovanja, škole povezane s crkvama biskupa postale su istaknute kao obrazovni centri. Katedralske škole bile su samo za one koji bi odabrali položaj "svjetovnog svećenstva" i nastavili rad Crkve u svijetu, ne odvojeno od nje same. Takve su škole cvjetale kao sporedna aktivnost pored posla koji su obavljali biskupi i bile su sklone utjecaju reputacije mjesnih učitelja, rastući i opadajući sa dolaskom i odlaskom različitih ličnosti.
Katedralske su škole jedva provodile slobodan tijek ideja. Stoga, mnogo prije službenog početka sveučilišta, skup studenata (učenika) okupio se oko jednog ili dva nastavnika koji nisu bili povezani s crkvom, a koji su ipak trebali dozvolu biskupa da podučavaju. Odličan učitelj postao je slavna osoba i studenti su putovali od grada do grada u potrazi za poznatim učenjacima čiji se ugled pročuo u njihovoj domovini.

Snažna osobnost Petera Abelarda (1079. – 1142.) navodno je privukla studente iz svih dijelova Europe do njegove pretrpane dvorane za predavanje u Parizu. Dvadeset njegovih učenika postalo je kardinalima, a više od 50 biskupima. Postoji jedna često pričana priča kada je Crkva otuđila Abelardove teološke spise, francuski kralj je iznenada zabranio Abelardu da podučava u njegovoj zemlji. Kada je čuo vijest, Abelard se uspeo na drvo te su se njegovi učenici skupili kako bi ga čuli. Kada mu je kralj zabranio podučavanje s drveta, Abelard je počeo podučavati u čamcu te je u tom trenutku kralj popustio. Abelard je posebno važan jer je njegova briljantnost u podučavanju popularizirala katedralsku školu u Notre Dame kao središte visokog obrazovanja tako stvarajući put za osnivanje sveučilišta u Parizu.

Širenje sveučilišta u dvanaestom i trinaestom stoljeću bila je posljedice nezadovoljavajućih katedralskih i manastirskih škola. Svjetovno znanje koje je imalo stručnu vrijednost (medicina i posebno pravo) i koje je zahtijevalo stručno osposobljavanje pod vodstvom eminentnog znalca, uzrokovalo je da sveučilišta postanu neplodne institucije. Studenti koji su živjeli u centrima koji su postali poznati po katedralskim školama smatrali su da je neophodno organizirati ih da bi se reguliralo njihovo vladanje, da bi se zaštitili od ucjena lokalnih građana te da bi osigurali zakonska prava jer su mnogi dolazili iz drugih gradova. Tako su studenti u dobrovoljnim udruženjima bili skloni formirati samovladajuća udruženja, kao i trgovci i obrtnici tog doba, i konačno dobiti zakonsko priznanje preko povelje kralja ili pape. Sveučilišta u Bologni (1158.), Parizu (1200.), Padovi (1222.), Oxfordu (1214.) i Cambridgeu (1231.) mogu naći tragove svojih početaka u ovom razdoblju. Ova nerazvijena sveučilišta imala su malo fizičku sličnosti s onim što su kasnije postala i postojale su velike varijacije između institucija različitih gradova. Sveučilišta nisu stekla stalne građevine sve do petnaestog stoljeća. Prije toga, učitelji su predavali u svojim vlastitim četvrtima ili iznajmljenim dvoranama, a glavni sastanci su se održavali u crkvama ili manastirskim dvoranama. Natjecanje za emitentnog znanstvenika postepeno je vodilo do ugovorenih plaća tako da je već 1180. Bologna platila nekoliko profesora iz općinskih fondova. Izbor profesora je, međutim, ostao povlastica studenata. Studenti su pojedinačno plaćali nastavnika koji je podučavao humanističke znanosti jer je vještina podučavanja bila jednaka vještini bilo kojeg trgovca. Učiteljima teologije je, s druge strane, bilo zabranjeno ugovarati pristojbe unaprijed jer je teologija ”duhovni dar”, ali im je bilo dopušteno prihvatiti donacije nakon završetka predavanja.

Pariz i Bologna bili su dva velika sveučilišta služeći kao modeli za kasnija sveučilišta koja su se pojavila u svakom dijelu Europe tijekom sljedeća dva stoljeća. Sveučilišta u Italiji i južnoj Francuskoj slijedila su akademski uzorak Bologne dok su se ona sveučilišta u sjevernoj Europi ugledala na Pariz. Obe su škole razvile iste metode podučavanja i dodjeljivale iste diplome, ali su naglašavale različite studije i bile su drukčije organizirane. Porast sekularne administrativne vlade u Italiji označio je pravne studije kao put do visokih položaja i isplativog zaposlenja. Tako je u Bologni pravna nauka uvijek dominirala, a malo se pažnje pridavalo teologiji i filozofiji. Zbog ovakvih stvari studenti su išli u Pariz gdje je kanonsko pravo bilo sporedno, a građansko se pravo uopće nije podučavalo. Obrazovanje je na Sjeveru još uvijek bilo pod vodstvom Crkve tako da je bilo pitanje vremena kada će teološke studije prevladati u Parizu i kada će crkvene vlasti tražiti veliki dio u sveučilišnoj upravi. U Bologni je postojalo ujedinjenje studentskih udruženja koje je dobilo kontrolu nad svim akademskim poslovima, osim onih koji dodjeljuju diplome, koja su bila dozvola za podučavanje. U Parizu je sustav organizacije bio suprotan sa upravom sveučilišta u rukama učitelja. Jedan od razloga ove razlike će se pronaći u različitim dobnim skupinama studenata. U Bologni su s velikim zanimanjem za "isplative znanosti" prava mnogi studenti bili zreli ljudi koji su već postigli visoke građanske pozicije. Studenti na umjetničkim studijima u Parizu, daleko najvećem u tom gradu, bili su premladi (od $12-14$ godina starosti) i presiromašni da bi se isticali na sličan način. Sveučilišta su uživala ogroman ugled kao čuvari znanja u doba u kojem je obrazovanje cijenjeno kao ni jedan drugi period u povijesti. Gradska trgovina, stanovništvo i značaj su ovisili o postojanju sveučilišta tako da su gradovi bez školskih ustanova bili voljni osigurati sveučilišta koja su se mogla odcijepiti od njihovih utvrđenih sjedišta. Srednjovjekovna sveučilišta nisu imala stalne građevine i imala su malo korporativnog vlasništva tako da je studentima jednostavno odseliti u drugi grad kada su iz bilo kojeg razloga nezadovoljni. Budući da je njihovo izdržavanje potpuno ovisilo o oskudnoj plaći, učitelji nisu imali drugog izbora nego da učine isto. Cambridge je, na primjer, postigao status sveučilišta migracijom studenata iz Oxforda 1209.

Studenti su dobili brojne privilegije, uključujući pravo vođenja sudskog postupka svojih članova u gotovo svim građanskim i kriminalnim slučajevima preko snažne prijetnje povlačenja u suparničke gradove. Prijeteće odcjepljenje od Bologne 1321. je povučeno pod uvjetom da se sudac koje se tuži javno izbičuje i da grad izgradi kapelu za sveučilište. Studenti koji su ponizili općinske vlasti nemilosrdnim bojkotom neposlušnih učitelja nastavili su primjenjivati niz zakona koji upravljaju svim fa-

zama nastave. Svaki je učitelj morao održati određeni broj predavanja koji uključuje propisan minimum rada te mogao biti novčano kažnjen zbog kašnjenja ili zbog izbjegavanja teških tema koje je morao tumačiti. Nije mogao napustiti grad bez dozvole rektora ili čak prilikom svog vjenčanja mogao je dobiti samo jedan slobodan dan. Dugoročno, snaga studentskog tijela dokazala je svoju propast. Kako su lokalne vlasti počele isplaćivati učiteljske plaće, umilostivile su studente održavajući reputaciju lokalnog sveučilišta. Država je postupno dobila odgovornost za ugovorene sastanke i nadzor nad fakultetima.
Budući da se akademska osnova sastojala od sedam umjetnosti tradicionalnog trivija (gramatika,logika i retorika) i kvadrivija (aritmetika, glazba, geometrija i astronomija), matematika nije bila najvažnija. Međutim, malo se pozornosti pridavalo drugoj skupini jer su te nauke imale praktičnu primjenu. Pariz, Oxford i Cambridge su sustavno odbijali svu tehničku nastavu smatrajući da bi sveučilišno obrazovanje trebali biti opće, a ne tehničko. Stvarni razlog je bio taj što se razlika lakše mogla postići u teologiji i filozofiji nego u prirodnim znanostima. Do 1336. u pokušaju da se potakne zanimanje za matematiku, donesen je zakon u Sveučilištu u Travisu da ni jedan student ne može diplomirati a da nije pohađao nastavu nekih matematičkih kolegija. Također se čini da su poslije 1452. kandidati koji su htjeli steći diplomu magistra umjetnosti u Parizu morali zakleti da su pročitali šest Euklidovih knjiga. Iako je Renesansa trebala dokazati da je matematika važna kao i druge grane znanosti, sveučilišni nastavni plan je osiguran više književnim nego znanstvenim obrazovanjem.

## 1.5 Žudnja za klasičnim učenjem

Kako je preporod trgovine i razvoj gradskog života u 14. stoljeću postupno mijenjao srednjovjekovnu kulturu mnogo je napora uloženo da je se izbriše i zamijeni nečim novim. Kada se ni feudalna, niti crkvena tradicija ranijeg razdoblja nisu pokazale adekvatnim, intelektualci talijanskih gradova država su se osvrtali na mnogo dalju prošlost kako bi pronašli blisku civilizaciju. Većina latinskih autora, i kako se kasnije otkrilo, grčkih autora, pisali su za urbano, svjetovno i individualističko društvo kao što je bilo i njihovo. Talijanski učenjaci su se strastveno posvetili proučavanju klasičnih spisa tumačeći ih u svijetu njihova doba. Iza ovog "kulta klasike" bilo je uvjerenje da su antička i latinska i grčka kultura nudile savršenstva prema kojem se procjenjuju sve civilizacije za sve političke, društvene i etičke pro-

bleme. Tu je počela sustavna i iznenađujuće uspješna potraga za zagubljenim ili zaboravljenim rukopisima od kojih su mnogi još uvijek postojali u samo nekoliko raštrkanih kopija. Znanstvenici su širom Europe premetali stare knjižnice u gradovima i samostanima. Prikupljanje, umnožavanje (u početku ručno, a kasnije tiskarskim strojem) i rasprostranjenost blaga koje su otkrili bilo je tek početak.
Rukopisi su se morali ispraviti kako bi se "očistili" od pogrešaka koje su napravili srednjovjekovni prepisivači te da bi se osigurala pravilna forma za svaki odlomak. Kolekcionari knjiga sastavili su gramatiku i rječnike te ukomponirali vodiče za drevna djela i komentare na njih. Pojavila se tradicija kritične procjene rješavanja autoritativnih tekstova. Takav napredak je bio gotovo nemoguć u doba kada je Crkva imala isključivo pravo na znanost. Ovo će biti od velike vrijednosti kada se interes obrazovanih ljudi preusmjeri na znanstveno istraživanje.
Renesansna želja za antičkom kulturom nadahnula je sve veći trend otvaranja knjižnica. Ovo je oduševljenje prožimalo sve slojeve društva te su se crkvene, državne vlasti i trgovina međusobno natjecale u skupljanju knjiga. Ljudi koji su živjeli u doba Renesanse poštovali su rukopise poput njihovih djedova koji su obožavali relikvije Svete zemlje. Neki bogati vlasnici su bili snobovi hvaleći se kako njihova kolekcija ne sadržava tiskana djela. Razvoj vatikanske knjižnice u Rimu tijekom ovog perioda bilo je uvelike djelo pape Nikole V (1395. − 1455.) koji je prije stupanja na prijestolje bio knjižničar u Cosimo de Medici. Ne može se reći da je vatikanska knjižnica bila značajna u to vrijeme jer je sadržavala tek 350 knjiga koje nisu bile nove. Papa Nikola poslao je zastupnike širom Europe da prikupe rukopise s ovlašću da izopće one koji su odbili predati iste. Istovremeno su neki od najistaknutijih znanstvenika u Rimu morali prevoditi grčka djela na latinski sve do svoje smrti. Papa Nikola je izgradio knjižnicu od 5000 knjiga i načinio je jednom od najboljih u Italiji. Dok je osnovna svrha bila prikupiti i očuvati povijesna djela i crkvene nauke, sve veći broj nereligioznih djela se našao u kolekciji. Vespasiano da Bisticci, tadašnji pisac, je rekao: "*Nikada od doba Ptolomeja nismo imali ni upola tako velik broj knjiga svih vrsta.*"
Povremeno se činilo da ljudi koji su živjeli tijekom Renesanse nisu imali namjeru stvaranja nečeg novog, nego oživljavanja nečeg starog te da nisu htjeli napredovati u budućnosti, nego vraćati se prošlosti. Kao i svaki drugi hir ova zanesenost antičkim životom dovodila je neke od njezinih obožavatelja do nesmislenih krajnosti. Formirali su se književni klubovi nazvani akademijama po drevnom grčkom načinu na kojima su se održavali govori praćeni raspravama. Na sastancima se razgovaralo na

grčkom jeziku te su članovi prihvaćali grčkih imena. Uspješni pisci su imitacijom drevnih običaja bili okrunjeni lovorovim vijencima. Klasični način razmišljanja i pisanja očarao je neke naučnike tako da su oni stvorili naviku pretvaranja da su Grci ili Rimljani oživljavajući progonske vjerske rituale. Usprkos ovim pretjerivanjima Talijani ovog doba su napravili dragocjenu uslugu budućim generacijama. Svu preživjelu baštinu grčke književnosti su potpuno uredili i objavili tiskana izdanja. Uspjeh postaje sve više impresivniji ako se prisjetimo da je znanje drevnih grčkih rukopisa bilo gotovo nestalo na Zapadu tijekom srednjeg vijeka. Kada je domet helenističke proze i stiha vraćen u maticu zapadnjačkog obrazovanja, razvio se ideal edukacije. Ovaj novi stav prema učenju se tako primjetno razlikovao od striktno utilitarne ili profesionalne školske naobrazbe koja je prevladavala stoljećima prije, tako da je izazvao potpuno novo iskustvo.
Sve ove aktivnosti u korist klasike su izravno utjecale na sveučilišta postupno mijenjajući prevladavajući nastavni plan u humanističke znanosti. Pojam "humanističke znanosti" jednostavno je prijevod antičke latinske fraze "studia humanitatis" i koristio se u Renesansi kako bi označavao jasno definiran skup obrazovnih disciplina (gramatika, retorika, poezija, povijest i moralna filozofija) osnovan na klasičnim grčkim i rimskim djelima. Humanističke znanosti Renesanse nisu bile sedam humanističkih znanosti pod jednim nazivom jer su humanističke znanosti izostavljale ne samo matematičke discipline nego i logiku dodajući tri predmeta, poeziju, povijest i moralnu filozofiju. Tako su renesansni mislioci stvorili verziju klasičnog nastavnog plana koji je u svim svojim oblicima trebao postati jedna od glavnih spojnica sveučilišta sve dok ga nisu zasjenile prirodne znanosti, moderni jezici i društvene znanosti u 19. i 20. stoljeću.
Još jedan znak prekida tradicionalnih disciplina bio je svjesna i namjerna kreacija novog edukacijskog modela, kavalirstva. Kavalirska obuka zahtijevala je da se osoba obrazuje u kavalirskom pisanju; da bude ljupka u proučavanju, prikladno obučena i da ima svojstven ukus u glazbi, slikanju i književnosti. Na sveučilištima je izniknulo ozračje uglavnom verbalne edukacije koja se uglavnom zasnivala na gramatici, što je podrazumijevalo čitanje, pisanje i rigoroznu analizu jezika i stila književnih djela, i retorici, vještini uvjeravanja i elokvencije u govoru. Elegantni latinski se smatrao ključnim za javne dokumente te su se Ciceronske fraze od tada uzimale kao sredstvo diplomacije. Kako bi se takav stil postigao, nužni su bili pomno poučavanje i imitacija drevnih djela.
Ono što je razlikovalo grčki preporod renesanse od njezinih srednjovjekovnih pret-

hodnika nije bilo samo to što je grčki postao dijelom općeg kurikuluma obrazovanja, nego je cijeli fokus interesa bio na književnim i povijesnim remek djelima grčke književnosti. Naglašavajući akademsku vrijednost humanističkih znanosti kao modela kavalirskih karakteristika, renesansni su prosvjetitelji podčinjeni i ponekad čak negativno utjecali učeći iz iskustva i neposrednog zapažanja. Posljedica je bila spriječiti proučavanje prirodnih znanosti i matematike koje su bile izvan područja književnosti i vrijeđale estetski smisao. Iako je renesansni pokret napravio relativno malo napretka u znanosti, ipak je indirektno prokrčio put znanstvenoj revoluciji 17. stoljeća povrativši više antičkog znanja nego što su ga posjedovali srednjovjekovni znanstvenici. Iako su Euklid, Ptolomej i Arhimed bili poznati u srednjem vijeku, djela poznatih autora poput Diofanta i Pappusa prvi su se put prevodila tijekom Renesanse. Do 17. stoljeća je gotovo cijeli postojeći kodeks grčkih matematičara bio dostupan onima koji su se zanimali za matematiku. Rezultat, očit od 16. stoljeća, bio je brz i uočljiv porast na razini sofisticiranosti europske matematike.

# 2 Bitka znanstvenika

## 2.1 Uspostavljanje algebarske tradicije

Renesansa je proizvela malo briljantne matematike proporcionalne s postignućima u literaturi, slikanju i arhitekturi. Općenito niska razina prevladavajućeg matematičkog znanja sprječavala je bilo kakav intelektualni uspjeh. Iako je matematika bila uključena u kurikulum većine sveučilišta, nije bila prihvaćena sa entuzijazmom.
Zaista, tijekom kasnog 15. stoljeća Bologna je skoro bila jedino mjesto gdje se podučavanje matematike propisno organiziralo. Međutim, čak i tamo se pojavila uglavnom kao sporedni predmet pokraj astronomije. Postojalo je i nekoliko sveučilišnih katedri za matematiku i ni jedan matematičar nije mogao zahtijevati poštovanje od učenog svijeta a da sam nije učitelj, naučnik ili zaštitnik renesansnih humanističkih znanosti.
Regiomontanus je postavio model za spajanje matematike sa humanističkim znanostima. Na sveučilištu u Beču oduševljeno je podučavao o klasičnim latinskim pjesnicima Virgiliju, Juvenalu i Horaciju privukavši veću publiku nego kada bi podučavao o astronomiji ili matematici. Prilikom posjete Rimu kopirao je Senekine tragedije dok je učio grčki da bi preuzeo mnogo razumljiviji prijevod *Almageste* i potom Apolonijeve *Conic Sections*. Kako bi učinio grčku tradiciju dostupnom, Regiomontanus je postao strastven zastupnik tiskanja čak postavljajući tiskarski stroj u svojoj kući da bi objavljivao svoje i tuđe rukopise. Počevši od Regiomontanusa matematičari su pokazali lukavu zahvalnost za moć tiskanja. Tijekom matematičkog preporoda se učestalo ponavljao program ambicioznog tiskanja osmišljen da bi se postiglo brže širenje tekstova i prijevoda.
Matematičari su imali mnogo koristi od humanističke strasti, gotovo misionarskog žara, za otkrićima, prijevodima i tiražima antičkih grčkih tekstova. Iako su njihov osnovni interes bili književni klasici, humanisti su uzeli cijelo njihovo znanje o klasici kao svoje područje te su se matematička djela jednako čuvala kao i književna. Ovi kolekcionari rukopisa zaslužni su za skupljanje gotovo cijele zbirke grčkih matematičkih spisa u Italiji. Srednjovjekovni znanstvenici bili su ograničeni na Euklida, Ptolomeja i ponekad Arhimeda čija su djela prevedena s arapskog. Do 15. stoljeća ta su djela obuhvaćala ne samo ranije spomenute autore na latinskom i grčkom nego i Diofanta, Apolonija, Pappusa i Prokla. Matematičari, kao i mnogi njihovi renesansni suvremenici, često su pokušali tek shvatiti što su drevni pisci učinili uvjereni da

je to najviše što se može spoznati. Iako je većina ovog truda bila uzaludna, povratak originalnim izvorima napravio je prvi korak prema intelektualnom napretku. Bilo je samo pitanje vremena kada će matematičari izgraditi nove pojmove i rezultate koje Grci još nisu predvidjeli. Osim toga, bilo je mnogo bolje čitati pisca, primjerice Euklida, nego čitati što je neki komentator mislio da arapsko prepričavanje pisca znači.

Do 1500. situacija se potpuno promijenila. Iznova prevedena djela bila su prihvaćena i naučnici nezadovoljni osvrtanjem antici bili su spremni nadići matematičko znanje koje su posjedovali Grci. Bilo je ogromno i stimulirajuće iznenađenje kada je talijanski algebraičar ranog 16. stoljeća pokazao kako riješiti kubnu jednadžbu, što Grci i Arapi nisu znali uraditi. U aritmetici, sve veći interes za trgovinu i bankarstvo stimulirao je naprednije metode računanja poput korištenja decimalnih razlomaka i logaritama. Trigonometrija sa pojačanom uporabom u navigaciji, analizi i vojnoj tehnici se počela odvajati od astronomije te poprimati status zasebne grane matematike. Prerađeni astronomski instrumenti zahtijevali su računanje proširenih tablica trigonometrijskih funkcija. U spomen na njemačku ustrajnost i marljivost, Georg Joachim (obično poznat kao Rhaetikus, 1514. − 1576.) izradio je tablicu sinusa za svakih 10 sekundi do 15 decimalnih mjesta. Samo je u geometriji napredak manje očit. Renesansni geometri bili su skloni prihvatiti osnovna svojstva iz Euklidovih *Elemenata* kao isključivi model za svoje ponašanje i ignorirati događaje koji nisu dio grčkog porijekla.

Matematičari su željeli obznaniti novootkrivene načine kojima su mogli pomoći običnom puku. Tako bi pomogli trgovcima od podučavanja kako računati profit do pokazivanja osnova kriptografima koje su bile temelj za projekciju kružnih površina na ravninu. Čak se u 16. stoljeću smatralo da su pravila jednostavne aritmetike i geometrije teška za shvatiti. Stoga su se sredinom 16. stoljeća počele objavljivati knjige osnovnih uputa ispisane razumljivim, jednostavnim rječnikom. Ovi su praktični udžbenici, iako nisu proizveli ništa novo, bili bitni u širenju matematike sve većoj publici. Velika većina udžbenika ispisana je na latinskom, ali mnogo njih se pisalo dijalektom. Dobri primjeri su djela engleskog matematičara Roberta Recorde (1510. − 1558.), *The Grounde of Artes* (1542., popularni aritmetički tekst koji je prošao kroz 29 izdanja), *The Pathewaie of Knowledge* (1551., geometrija koja je sadržavala skraćenu verziju *Elemenata*), i *The Whetstone of Witte* (1557., o algebri). Knjige o algebri postale su tako brojne u Njemačkoj da je predmet bio dugo poznat u Europi kao "cossic art", od njemačke riječi "coss" što znači nepoznat. Kroz trend

proizvodnje udžbenika na popularnim jezicima matematika je poprimila sve veću važnost u obrazovanju svih ljudi, ne samo stručnjaka koji se obučavaju za zanimanje.
Iako slavljen kao tvorac engleske škole autora matematičkih tekstova, Robert Recorde nije bio autor prvog matematičkog teksta u Engleskoj niti prvi čija su se djela pojavila na engleskome jeziku. Svećenik Cuthbert Tonstall objavio je latinski *De Arte Supputandi* (1552.) koji se uvelike temeljio na talijanskim izvorima iste godine kada je postao londonski biskup te je anonimni dijalektni tekst *An Introduction for to Lerne to Recken with the Pen and with the Counters* objavljen 1537. Unatoč tome Recordeova djela su uživala najširu popularnost tiskajući se bezbroj puta u ovom i sljedećem stoljeću.
Recorde se školovao u Oxfordu i potom stekao diplomu doktora medicine 1545. u Cambridgeu. Privatno je predavao matematiku u oba sveučilišna grada prije nego je započeo medicinsku praksu u Londonu. Govorilo se da je bio doktor kralja Eduarda VI i kraljice Mary. Nekada oko 1551. imenovan je za nadzornika rudnika srebra u Irskoj. Njegova sreća bila je kratkog vijeka jer je umro u zatvoru nekoliko godina kasnije. Razlog njegovog pritvora nije poznat, ali je najvjerojatnije povezan sa njegovim ponašanjem u politici.
Recordeovo djelo *Castle of Knowledge* (1556.), udžbenik o astronomiji ispisan kao dijalog između naučnika i učitelja je jednako vrijedno pažnje jer sadrži prvu raspravu u Engleskoj o Kopernikovoj hipotezi zemljinog kretanja. Njegova se pretpostavka čuvala i nije se objavljivala možda zbog straha od podsmijeha ili, još gore, od vjerskog progona. Kada mladi naučnik opisuje Kopernikove ideje "uzaludne fantazije", učitelj mu se suprotstavlja: "*Previše si mlad... bolje bi ti bilo ne osuđivati stvari koje dobro ne razumiješ.*"
Algebraičari su počeli uvoditi simbolizam koji bi učinio algebarsko pisanje mnogo djelotvornijim i kompaktnim i koji bi bolje odgovarao potrebama tipografije. Ovi su napredci bili vremenski isprekidani i nije postojala ujednačenost u simbolima čak i za obične aritmetičke operacije (sadašnji znak dijeljenja  često se koristio da bi označio oduzimanje). Također su se razni simboli predlagali u različitim državama, isprobavali te često odbacivali. Talijanski algebristi su bili spori u preuzimanju novih bilješki preferirajući početno slovo "m" i "p" za "minus" i "plus" u vrijeme kada su Nijemci, manje sputani tradicijom, prihvatili poznate matematičke znakove $+$ i $-$. Iako se razvoj simbola za algebarske operacije brzo odvijao, količine izražene jednadžbom još uvijek su se izražavale stvarnim umjesto općim brojevima. Kao po-

sljedica toga je da se kvadratna jednadžba ne bi mogla riješiti. Umjesto toga opisane su metode rješavanja za mnoge slučajeve od kojih je svaki ilustriran jednadžbom sa odgovarajućim numeričkim koeficijentom.
Oslobođenje algebre od potrebe rješavanja samo konkretnih primjera bilo je uvelike djelo velikog francuskog matematičara Francoisa Vieta (1540. − 1603.) koji je započeo korištenje suglasnika da bi predstavio poznate količine i samoglasnika za nepoznate. Ovaj korak je označio odlučujuću promjenu ne samo zbog praktičnosti obilježavanja nego i zbog apstrakcije matematičke misli. Od različitih do specifičnih primjera kao što su $3x^2 + 5x + 10 = 0$ do općih $ax^2 + bx + c = 0$, cijela se klasa jednadžbi može računati odjednom tako da bi rješenje apstraktnih jednadžbi riješio sve specifične jednadžbe jednim potezom.

## 2.2 Talijanski algebraičari: Pacioli, del Ferro i Tartaglia

Talijanski matematičari petnaestog stoljeća mogu se sažeti u imena del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari i Bombelli. Zajedničko postignuće ova četiri matematičara bilo je rješenje kubnih i jednadžbi četvrtog stupnja te općenito bolje razumijevanje jednadžbi. Ovaj podvig bio je možda najveći doprinos algebri od vremena Babilonaca prije nekih 3000 godina. Kubne jednadžbe nisu ni u kojem smislu bile osobitost Renesanse, nego su se rješavale već u doba klasične antike. Problem duplikacije kocke posebno popularan među Grcima nije ništa drugo osim pokušaja da se pronađu dvije prosječne proporcije između $a$ (dužina ruba dane kocke) i $2a$. To nije ništa drugo nego riješiti

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

što je uglavnom rješenje kubne jednadžbe $x^3 = 2a^3$. Još jedna pažnje vrijedna kubna jednadžba može se pronaći u Diofantovom djelu *Arithmetica* zajedno s problemom 17 Knjige VI: *Pronađi pravokutni trokut tako da područje zbrojeno s hipotenuzom daje kvadrat, a opseg je kocka.* Način na koji je Diofant postavio problem dovodi do kubne jednadžbe $x^3 + x = 4x^2 + 4$. Ne znamo kako je dobio rješenje jer je samo rekao da je $x$ jednako 4. Možda je skratio jednadžbu kao $x(x^2 + 1) = 4(x^2 + 1)$ i vidio da je $x = 4$. Arapski su pisci doprinijeli rješenjima posebnih kubnih jednadžbi, ali izgleda da su vjerovali da se mnoge ne mogu riješiti. Dio slave pjesnika Omara Khayyama (oko 1100.) kao matematičara leži u tvrdnji da je prvi riješio

svaku vrstu kubnih jednadžbi koje imaju pozitivan korijen. U trinaestom je stoljeću John Palermo predložio rješenje jednadžbe $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ Fibonacciu kao jedan od svojih izazova u njihovom natjecanju. Fibonacci je geometrijski pokazao da ne postoji racionalno rješenje, ali je dao približnu aproksimaciju rješenja. Tijekom sljedećih nekoliko stotina godina matematičari su tražili "kubnu formulu" koja bi se mogla koristiti za rješavanje kubnih jednadžbi poput dobro poznate formule za rješavanje kvadratnih jednadžbi. Zasluga za konačno otkrivanje takve formule pripada talijanskoj školi matematike u Bologni tijekom petnaestog stoljeća.
Najpotpunija i najdetaljnija matematička rasprava petnaestog stoljeća bila je *Summa de Arithemtica, Geometria, Proportioni, et Proportionalita (*1494.*)* fra Luca Paciolia. Glavni doprinos *Summe* (koja je na posljetku i bila sažetak) bio je izložiti granice suvremene matematike i ponuditi vrsni program za renesansnu matematiku. Pacioli je završio *Summu* tvrdeći da je rješenje kubne jednadžbe nemoguće kao što je nemoguća i kvadratura kruga. Ovo je neke matematičare spriječilo, a druge navelo da pokušaju pronaći rješenje. Prvog ili drugog desetljeća šesnaestog stoljeća Scipione del Ferro (1465. − 1526.) sa sveučilišta u Bologni je razorio Paciolijeve pretpostavke rješavajući kubnu jednadžbu za slučaj $x^3 + px = q$ gdje su $p$ i $g$ pozitivni. Pacioli je možda subjektivno stimulirao ovo prvo veliko postignuće renesansne algebre jer je od 1501. do 1502. predavao na sveučilištu u Bologni gdje je jedan od njegovih kolega bio del Ferro. (Papa Nicholas V je 1450. proglasio opću reorganizaciju sveučilišta i dodijelio četiri mjesta za matematičke znanosti. Do 1500. tamo je bilo pet profesora koji su predavali matematiku.)
Običaj tog vremena bio je tretirati matematička otkrića kao osobno vlasništvo ne otkrivajući ni metodu ni dokaz kako ih drugi ne bi koristili u sličnim problemima. Do toga je dolazilo iz razloga što se akademska reputacija uvelike temeljila na javnim natjecanjima. Ne samo da se odmah mogla osvojiti novčana nagrada tako što bi se izložio problem kojeg nisu mogli riješiti matematičati, nego je i ishod ovih izazova jako utjecao na akademsko imenovanje. Radna su mjesta na sveučilištima u to vrijeme bila privremena i podložna promjenama temeljenim na pokazanom uspjehu. Kako je tiskanje znanstvenih časopisa postalo svakodnevnica, ovaj stav tajnosti postupno se promijenio u stav da je objava rezultata najbolji put do priznanja jednog naučnika. U svakom slučaju, kako se nije htio odreći prednosti pred drugim natjecateljima del Ferro nikad nije objavio svoje rješenje i otkrio je tajnu samo nekolicini bliskih prijatelja među kojima je bio i njegov učenik, nasljednik Antonio Maria Fiore. Ova će razmjena dovesti do jedne od najslavnijih matematičkih rasprava zbog

koje će se otvoriti natjecanje u rješavanju matematičkog problema u Veneciji 1535. godine gdje će Fiore izazvati Nicolu Tartagliu da riješi razne vrste kubnih jednadžbi.

Slika 1. Nicolo Tartaglia

Jedan od najvažnijih obnovitelja algebarske tradicije Nicolo Tartaglia (1500. – 1557.) bio je jedan od najmanje utjecajnih matematičara. Tartaglia (čije je prezime bilo Fontana) je rođen u Bresci, u sjevernoj Italiji. Kada su Francuzi pljačkali Bresciu 1512. mnogi su od stanovnika tražili utočište u mjesnoj katedrali. Vojnici su napali i svetište katedrale i masakrirali građane. Nicolov otac bio je među ubijenima u pokolju te je i Nicolo sam smatran mrtvim nakon što je zadobio tešku posjekotinu sabljom koja je rascijepila njegovu čeljust i nepce. Iako ga je majka našla i liječila najbolje što je znala, njegove smetnje u govoru nisu prošle te je zbog njih dobio okrutan nadimak Tartaglia, "onaj koji zamuckuje". Kasnije je i službeno koristio svoj nadimak u svojim objavljenim djelima te nosio dugu bradu kako bi prekrio monstruozne ožiljke, ali nikad nije nadvladao mucanje.

Iako je svoju mladost proveo u groznom siromaštvu, Tartaglia je bio odlučan da se obrazuje. Njegova majka udovica skupila je malo novca kako bi ga privatno podučavao učitelj pisanja. Nakon petnaest dana sav je novac bio utrošen, ali je mladić ukrao pisaljku s kojom je navodno učio dalje pisati i čitati. Tartaglia je navodnu u nedostatku sredstava da kupi papir koristio nadgrobne spomenike na grobljima kao ploče na kojima je rješavao svoje vježbe. Posjedujući izvanredan um naposljetku je stekao takvu vještinu u matematici da je zarađivao za život podučavajući matematiku u Veroni i Veneciji. Ironično je da je Tartaglia, čovjek unakažen sabljom, doprinio da će se sablja kao oružje prestati koristiti objavljujući svoje djelo

*Nova Scientia* (1537.) o primjeni matematike u artiljeriji. Tartagliina "nova znanost" bila je naravno, balistička. Iako su teorije koje je on razvio često bile potpuno pogrešne, bio je prvi koji je ponudio teoretsku raspravu protiv takozvanog iskustva artiljeraca. Preduhitrujući Galilea, Tartaglia je mislio da tijela različite težine u padu prelaze jednaku udaljenost u jednakom vremenskom trajanju.
Tartagliino nesretno iskustvo iz mladosti je možda utjecalo na sumnjiv karakter. Samouk, bio je ljubomoran na povlaštene te je neprestano bio primoran potvrđivati svoje intelektualne sposobnosti. Bilo iz namjere ili običnog nepoznavanja književnosti, imao je naviku prisvajati tuđa otkrića. Tako je sebi pripisao takozvani Pascalov trokut iako je već prije u tisku objavljen kao Pascalovo djelo. Tartaglia je izgleda osjetio da ga njegovo nedostatak klasične naobrazbe stavio u nepovoljan položaj. U svom je djelu *General Trattato to Humeri et Misure* (1556. − 1560.) sa svrhom da zamijeni Paciolovu *Summu* predgovor uljepšao Ciceronovim i Ptolomejevim citatima.
1530. godine jedan njegov prijatelj mu je poslao dva zadatka:

1. Pronađi broj čiji je kub pribrojen tri puta svom kvadratu jest pet, tj. riješi jednadžbu $x^3 + 3x^2 = 5$.

2. Pronađi tri broja od kojih drugi prekoračuje prvi za dva i od kojih treći prekoračuje drugi isto za dva te čiji je umnožak 1000, tj. riješi jednadžbu $x(x + 2)(x + 4) = 1000$ ili $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$.

Neko vrijeme Tartaglia nije mogao riješiti ove zadatke, ali 1535. je konačno uspio te najavio da može riješiti bilo koju jednadžbu tipa $x^3 + px^2 = q$. Fiore, uvjeren da su Tartagliine tvrdnje prijevara, ga je izazvao na javno natjecanje u rješavanju zadataka. Svaki je natjecatelj trebao predložiti 30 zadataka, a pobjednik je bio onaj koji je mogao riješiti najveći broj zadataka za 50 dana. Tartaglia je bio svjestan da je njegov protivnik dobio rješenja nekih tipova zadataka kubnih jednadžbi od svog pokojnog učitelja i mahnito je radio da bi pronašao opći postupak. Kratko prije dogovorenog datuma uspio je pronaći shemu za rješavanje kubnih jednadžbi poput sheme za rješenje kvadratnih. Tako je Tartaglia započeo natjecanje pripreman da riješi dva tipa kubnih jednadžbi dok je njegov protivnik znao riješiti samo jedan tip. Za dva sata Tartaglia je riješio svih 30 zadataka koja su mu postavljena za posebne slučajeve jednadžbe $x^3 + px = q$ kojima je znao odgovor. Fiore nije riješio nijedan zadatak koji mu je Tartaglia postavio (većina njih vodila je do jednadžbe tipa $x^3 + px^2 = q$).

## 2.3 Giloramo Cardano

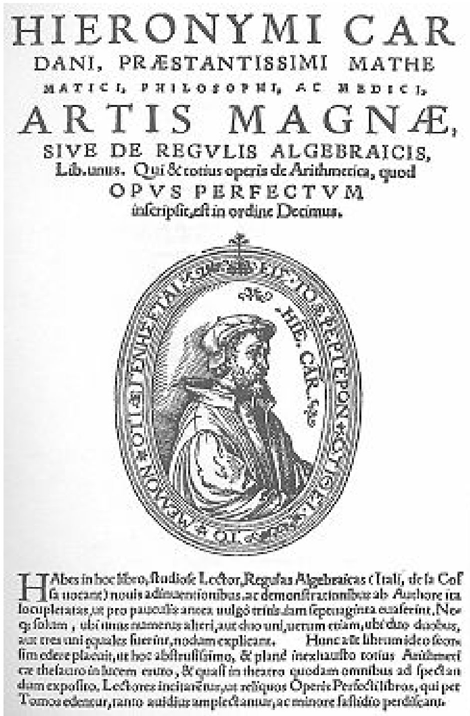
Girolamo Cardano (1501 - 1576), poznatiji kao Cardano, bio je istinski renesansni čovjek: fizičar, filozof, matematičar, astrolog i produktivan pisac. Njegov život bio je bijedan. Svjedočio je pogubljenju sina zbog trovanja žene. Osobno je podrezao uši drugom sinu koji je pokušao učiniti isti prekršaj. Bio je zatočen zbog krivovjerja poslije objavljivanja Kristovog horoskopa te je općenito dijelio svoje vrijeme na periode intenzivnog učenja i periode razuzdanosti.
Poslije neozbiljne mladosti posvećene uglavnom kockanju započeo je svoje sveučilišne studije u Pavii te ih dovršio u Padovi 1525. sa doktoratom iz medicine. Ili zbog njegovog vanbračnog rođenja, ili zbog njegove reputacije kockara više je puta odbijen na Medicinskom fakultetu u Milanu. Nije nikakvo čudo što je u svom prvom djelu *De Malo Recentiorum Medicorum Medeni Usu Libellus* (O lošim običajima medicine u svakodnevnoj upotrebi) ismijavao milanske liječnike. Do svoje pedesete godine života bio je pored Vesaliusa među najboljim europskim liječnicima te je putovao u daleke krajeve da bi liječio poznate. Njegova je slava bila toliko velika da je škotski nadbiskup bio jedan od njegovih pacijenata. Vjerovalo se da nadbiskup pati od tuberkuloze. Cardano je izjavio da može izliječiti tu bolest, što se kasnije pokazalo netočnim, pa je otputovao u Edinburgh da bi izliječio nadbiskupa. Srećom za pacijenta i Cardana se ispostavilo da je bolovao od astme. Pri povratku ga je primio mladi kralj Eduard VI u Londonu kome je uslužno izradio horoskop. Proricanje drugog života i uspješne budućnosti se ispostavilo velikom sramotom kada je neki dječak umro kratko poslije toga. Cardano je u određeno vrijeme bio profesor matematike i u Milanu, Pavii, Bologni dajući ostavku na svakom radnom mjestu zbog stalnih skandala koji su bili s njim povezani. Zbog zabrane da javno predaje ili piše i objavljuje knjige konačno se nastanio u Rimu gdje je iz nekog čudnog razloga ostvario pravo na veliku mirovinu kao astrolog papinskog dvora. Cardano se osjećao dužnim izvršiti samoubojstvo da bi potvrdio vlastito predviđanje da će umrijeti određeni dan.
Kada je Cardano čuo vijest o matematičkom natjecanju između Tartaglie i Fiore, preklinjao je Tartagliu za rješenje kubne jednadžbe nudeći objavljivanje rezultata u svojoj budućoj knjizi *Practica Arithmeticae* (1539.) pod Tartagliinim imenom. Tartaglia je odbio ponudu uz objašnjenje da je on namjeravao objaviti vlastitu raspravu o algebri. Biti zaslužan za formulu nije isto kao i napisati vlastito djelo pod vlastitim imenom; to je knjiga, ne fusnota, koju će otkriti povijest. Cardano je u nadi

da će saznati tajnu pozvao Tartagliu u posjet. Poslije mnogo molbi i laskanja Tartaglia je otkrio svoju metodu rješavanja uz obećanje, vjerojatno dano pod prisegom da će ju Cardano drži u tajnosti. Međutim, počele su kružiti glasine da Tartaglia nije bio prvi koji je otkrio formulu za rješenje kubne jednadžbe te je 1543. godine otputovao u Bolognu da bi to i porekao. Poslije proučavanja del Ferrovih studija objavljenih poslije njegove smrti zaključio je da je del Ferro bio prvi koji je otkrio metodu rješavanja kubnih jednadžbi. Cardano se više nije osjećao obveznim čuvati obećanje te je u svom djelu *Ars Magna* objavljenom 1545. godine otkrio formulu u potpunosti. Cardano je iskreno priznao (tri puta u tekstu) da je rješenje posebne kubne jednadžbe $x^3 + px = q$ dobio od svog "prijatelja" Tartaglie, ali je tvrdio da je sam došao do dokaza da je formula koju je primio točna. Bijesan na ovaj očit prekršaj svečane prisege i prijevarom lišen truda Tartaglia je optužio Cardana za laž. Tako je započela jedna od najžešćih svađa u povijesti znanosti koja se nastavila psovkama i klevetanjem na najnižem nivou.

## 2.4 Cardanovo rješenje kubnih jednadžbi

Cardano je pisao o raznim predmetima uključujući matematiku, glazbu, filozofiju i medicinu. Prije njegove smrti objavljeno je 131 njegovo djelo, a 111 ih je bilo ispisano rukopisom te je tvrdio da je spalio 170 drugih djela koja nisu bila dovoljno dobra. Ova su djela imala raspon od *Practica Arithmeticae* (1539.), knjige o numeričkom računanju uvelike temeljena na Paciolievom djelu iz 1494., do *Liber de Vita Propria* (1575.), autobiografije u kojoj je otkrio najsramotnije činjenice. Njegove strasti za šahom, kockom i kartama inspirirale su ga da napiše *Liber de Ludo Aleae* (Knjiga o igrama na sreću). Pronađena među njegovim radovima poslije njegove smrti i objavljena 1663., postavila je temelje teoriji vjerojatnosti preko 50 godina ranije nego su to napravili Fermat i Pascal kojima se pripisuju prvi koraci. U tom djelu on čak daje savjet kako varati, nesumnjivo iz vlastitog iskustva. Ironično je što ga u njegovom životu kockanje koštalo vremena, novaca i ugleda, a opet pomoglo da postigne mjesto u povijesti matematike.

Prema trajnom značaju, *Ars Magna* (Velika umjetnost) nesumnjivo je kruno Cardanovog cjelokupnog opusa, bilo matematičkog ili drugog. Ovo djelo, prvi put tiskano 1545., bi se danas svrstalo kao tekst o algebarskim jednadžbama. Ono vrlo jasno govori da Cardano nije bio tek samo plagijator nego i netko tko je kombinirao pošten i težak rad s piratstvom. Iako se o negativnim brojevima u Europi saznalo preko arapskih tekstova, većina zapadnih algebraičara nije ih prihvatila kao istinske brojeve te je preferirala pisati jednadžbe samo s pozitivnim brojevima. Postojalo je samo trinaest kubnih jednadžbi u to vrijeme takvih da su se članovi različitih stupnjeva pojavljivali s iste strane znaka jednakosti ili sa suprotne. Dajući Cardanu formulu za određivanje rješenja jednadžbe oblika $x^3 + px = q$ Tartaglia nije odmah dao rješenja za sve druge oblike kubnih jednadžbi. Cardano je bio prisiljen proširiti Trtagliino otkriće da bi riješio druge slučajeve smišljajući i proučavajući pravilo za svaki primjer pojedinačno.


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa vocant) novis adinventionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgo tritis iam septuaginta evaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, verum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aut librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plane inexhausto totius Arithmeticae thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto avidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Slika 2. Ars Magna

Do tada su zapadni matematičari ograničavali svoju pozornost na ona rješenja jednadžbi koja su bila pozitivni brojevi. Cardano je prvi koji je uočio negativne korijene iako ih je nazivao "fiktivnim". Također je bio prvi koji je prepoznao da kubna jednadžba može imati tri rješenja. Drugi značajan aspekt Cardanove rasprave bio je jasno razumijevanje postojanja onoga što danas nazivamo kompleksnim ili imaginarnim brojevima (duhovima realnih brojeva, kako ih je Napier kasnije nazivao). Cardano nije uključivao ove brojeve u Ars Magnu osim u slučaju kada je razmatrao problem dijeljenja 10 na dva dijela čiji je umnožak bio 40. Dobio je ko-

rijene $5+\sqrt{-15}$ i $5-\sqrt{-15}$ kao rješenja kvadratne jednadžbe $x(10-x)=40$ te je potom obrazložio: "*Ne uzimajući u obzir psihički napor, pomnoži* $5+\sqrt{-15}$ *brojem i* $5-\sqrt{-15}$ *čime ćeš dobiti* $25-(-15)$ *odakle je umnožak* 40." Cardano se nekako osjećao dužnim prihvatiti ova rješenja, a ipak je ubrzo dodao da ne postoji tumačenje za njih napominjući: "*Tako napreduje aritmetička vještina čiji je rezultat, kao što je rečeno, profinjen koliko je i beskoristan.* Ali samo pisanje besmislenog, davalo mu je simbolično značenje i Cardano zaslužuje priznanje zbog pridavanja pozornosti situaciji.
Među inovacijama koje je Cardano uveo u "Ars Magnu" bio je trik mijenjanja kubne jednadžbe u onu koja ne sadrži član drugog stupnja.
Pokušavamo li riješiti jednadžbu,

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

sve što je potrebno je uvesti supstituciju $x=y-a/3$. Sa ovom novom varijablom dana jednadžba postaje

$$\begin{aligned}
0 &= \left(y-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c \\
&= \left[y^3-3y^2\left(\frac{a}{3}\right)+3y\left(\frac{a}{3}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3\right] \\
&\quad + a\left[y^2-2y\left(\frac{a}{3}\right)+\left(\frac{a}{3}\right)^2\right]+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c \\
&= y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right).
\end{aligned}$$

Stavimo li

$$p=b-\frac{a^2}{3} \text{ i } q=-\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right),$$

onda se jednadžba može zapisati u obliku

$$y^3+py=q,$$

što je takozvani skraćeni oblik kubne jednadžbe. Cardano je riješio kubnu jednadžbu $x^3+20x=6x^2+33$ ovom skraćenom metodom. Supstitucijom $x=y-(-6)/3=y+2$, ta je jednadžba preoblikovana u

$$(y^3 + 6y^2 + 12y + 18) + 20(y + 2) = 6(y^2 + 4y + 4) + 33,$$

ili, u pojednostavljenom obliku,

$$y^3 + 8y = 9.$$

Zadnja jednadžba ima jedno očito rješenje $y = 1$; dakle, $x = y + 2 = 3$ je rješenje polazne jednadžbe.
Kako je Cardano uspio doći do općeg rješenja skraćenih kubnih jednadžbi? Budući je renesansa bila period najvećeg strahopoštovanja prema grčkim matematičarima, nije iznenađujuće da se njegovi dokazi trebaju zasnivati na geometrijskim argumentima oponašajući Euklidovo rasuđivanje. Metoda rješavanja kubne jednadžbe

$$x^3 + px = q, \quad p > 0, \quad q > 0 \tag{1}$$

iako geometrijska, jednaka je korištenju algebarskog identiteta

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3. \tag{2}$$

Ako su $a$ i $b$ odabrani tako da je $3ab = p$ i $a^3 - b^3 = q$, onda identitet (2) postaje

$$(a - b)^3 + p(a - b) = q,$$

što pokazuje da će $x = a - b$ dati rješenje kubne jednadžbe (1).
Problem stoga uključuje rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^3 - b^3 &= q, \\ ab &= \frac{p}{3}, \end{aligned}$$

po $a$ i $b$. Da bi se tako riješio zadatak, kvadrira se prva jednadžba i druga se stavlja na treću potenciju čime se dobiva

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^6 - 2a^3b^3 + b^6 &= q^2, \\ 4a^3b^3 &= \frac{4p^3}{27}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$(a^3 + b^3)^2 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27},$$

pa stoga $\mathrm{a}^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$.

Iz jednadžbi

$$a^3 - b^3 = q \text{ i } a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

se mogu odrediti $a^3$ i $b^3$; rezultat je

$$a^3 \ = \frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}) = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$b^3 = \frac{1}{2}(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}) = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ali onda je

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

te je stoga

$$x = a - b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Kao što se Tartaglia pribojavao, ova zadnja formula je od tada poznata kao Cardanova formula za rješenje kubne jednadžbe. Matematičar kome dugujemo glavni doprinos algebri u 16. stoljeću je uvelike zaboravljen, a otkriće pripada nepoštenom Cardanu.

Cardano je ilustrirao svoju metodu rješavanja jednadžbe

$$x^3 + 6x = 20.$$

U tom slučaju, $p = 6$ i $q = 20$, tako da $p^3/27 = 8$ i $q^2/4 = 100$, odakle dobivamo

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Kao što je već napomenuto, Cardano je bio prisiljen riješiti razrađenu listu jednadžbi uvelike "proizvedenih" zbog nedopuštanja negativnih koeficijenata.

Rješavanjem jednadžbe

$$x^3 = px + q,\ p > 0,\ q > 0$$

koristio je geometrijski argument koji odgovara identitetu

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

da bi došao do rješenja

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Postoji jedna poteškoća povezana sa zadnjom formulom koju je Cardano razmatrao, ali nije mogao riješiti.
Kada je $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$, formula neizbježno dovodi do drugog korjena negativnog broja. To jest,$\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$ uključuje "imaginarne brojeve".
Razmotrimo, na primjer povijesno važnu jednadžbu

$$x^3 = 15x + 4,$$

koju je riješio Rafael Bombelli, zadnji veliki matematičar 16. stoljeća iz Bologne u svojoj "Algebri" (1572.). Direktna primjena Cardan - Tartagliine formule bi vodila do

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bombelli je ipak znao da jednadžba ima tri rješenja, $-2 + \sqrt{3}$, $-2 - \sqrt{3}$ i 4. Slijepa ulica, koja se pojavljuje kada su sva tri korijena realna i različita od nule, je poznata kao "neskrativ slučaj" kubne jednadžbe.

## 2.5 Bombelli i imaginarna rješenja kubnih jednadžbi

Bombelli je bio prvi matematičar dovoljno hrabar da prihvati postojanje imaginarnih brojeva i da stoga razjasni zagonetku neskrativih kubnih jednadžbi. Rođen je u Bologni. Nije imao nikakvu formalnu obuku iz matematike te nije predavao na sveučilištu. Bio je sin trgovca vunom, a po zanimanju je bio arhitekt. Bombelli je osjetio da je, među njegovim prethodnicima, jedino Cardano pokušao temeljito istražiti algebru, ali u svom izlaganju nije bio dovoljno jasan. On je stoga odlučio napisati sustavan postupak algebre koja će biti sljedbenik Cardanove *Ars Magne*. Bombelli je sastavio prvi nacrt svoje studije oko 1560., ali nije tiskana do 1572.,

kratko prije njegove smrti. Priprema njegove *Algebre* znatno je duže trajala, nego je sam to predvidio jer je u svom djelu napisao:
*"Grčki rukopis ove znanosti koji je napisao Diofant pronađen je u vatikanskoj knjižnici. Prevodimo ga i već smo odradili pet od sedam postojećih knjiga. Ostatak nismo bili u mogućnosti završiti zbog drugih obveza."*
Strahovito oduševljen ponovnim otkrićem *Arithmetice* Bombelli je uzeo 143 zadatka i njihova rješenja iz prve četiri knjige te ih uvrstio u *Algebru* miješajući ih sa svojim doprinosima. Rukopis *Algebre* pronađen je 1923.; nedostatak 143 zadataka posuđena iz *Arithmetice* ukazuju da Bombelli nije imao uvid u vatikanski primjerak kada je krenuo pisati djelo. Dok su Paciolina i Cardanova djela sadržavala mnoge zadatke primijenjene aritmetike, Bombellievi su zadaci svi bili apstraktni. Tvrdio je da je, dok su drugi pisali iz praktičnih prije nego li iz znanstvenih razloga, on "obnovio" djelotvornost aritmetike imitirajući antičke pisce. Objava Bombellieve *Algebre* oduševila je pokret koji je počeo u Italiji oko 1200. kada je Fibonacci uveo pravila algebre u *Liber Abaci*.
Bombellieva vještina u radu s imaginarnim brojevima omogućila mu je da demonstrira primjenu Cardanove formule čak i u neskrativoj formi (svi korijeni realni) kubne jednadžbe. Pretpostavljajući da se kompleksni brojevi ponašaju kao i drugi brojevi, on je napravio kružni prolaz u, i izvan, kompleksnog područja i završio pokazujući naočigled imaginarni izraz da rješenje jednadžbe $x^3 = 15x + 4$ daje pravu (realnu) vrijednost. Bombelli je imao genijalnu ideju da kompleksni dio rješenja

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \text{ i } \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

može biti povezan s realnim rješenjem, tj. mogu se razlikovati u predznaku.
Ovo ga je navelo da postavi

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ i } \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1},$$

gdje se trebaju odrediti $a > 0$ i $b > 0$. Kao što je Bombelli rekao:
*"Bila je to divlja misao u procjeni mnogih; i ja sam dugo imao isto mišljenje. Cijela stvar je izgledala kao da počiva na laži više nego na istini. Ipak sam toliko dugo tražio dok zapravo nisam dokazao da je to istina."*

Sada relacija $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ podrazumijeva da je

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{-121} &= (a+b\sqrt{-1})^3 \\ &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3 \\ &= a(a^2-3b^2) + b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Ova jednakost vrijedi pod uvjetom da je

$$a(a^2-3b^2) = 2 \text{ i } b(3a^2-b^2) = 11.$$

Ako se rješenja traže u cijelim brojevima, onda prvi od ovih uvjeta kaže da $a$ mora biti jednako 1 ili 2, a drugi uvjet tvrdi da $b$ ima vrijednost 1 ili 11; samo $a = 2$ i $b = 1$ zadovoljavaju oba uvjeta. Stoga,

$$2+\sqrt{-121} = (2+\sqrt{-1})^3 \text{ i } 2-\sqrt{-121} = (2-\sqrt{-1})^3.$$

Bombelli je zaključio da jedno rješenje kubne jednadžbe $x^3 = 15x + 4$ izgleda ovako:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3} \\ &= (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Dokazujući realnost korijena kubne jednadžbe $x^3 = 15x + 4$ demonstrirao je izvanrednu činjenicu da se realni brojevi mogu dobiti pomoću imaginarnih. Od tada su imaginarni brojevi izgubili nešto od svog mističnog karaktera iako su kao pravi brojevi prihvaćeni tek u 19. stoljeću.

## 2.6 Ferrarievo rješenje jednadžbi četvrtog stupnja

Kako se našlo rješenje za kubne jednadžbe bilo je prirodno da matematičari pređu na jednadžbe četvrtog stupnja. Rješenje se otkrilo tijekom rada na zadatku koji je postavio Cardano sredinom 16. stoljeća, koji je glasio podijeliti broj 10 na tri proporcionalna dijela tako da umnožak prvog i drugog dijela bude 6. Ako su brojevi $6/x$, $x$ i $x^3/6$, onda su postavljeni uvjeti jasno ispunjeni. Osobito uvjet da je

$$\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 0$$

jednak jednadžbi četvrtog stupnja

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

Poslije neuspješnog pokušaja da riješi ovu jednadžbu Cardano ju je predao svom učeniku Ludovicu Ferrariu (1522. − 1565.). Ferrari je, koristeći pravila rješavanja kubnih jednadžbi, na posljetku uspio ono što njegov učitelj nije. Cardano je barem imao zadovoljstvo da uvrsti rezultat u *Ars Magnu* sa zaslugom koju je dugovao Ferrariu.

Ferrari, dijete siromašnih roditelja, je primljen u Cardanovu kuću kao sluga kada je imao 14 godina. Iako nije imao nikakvo formalno obrazovanje, bio je izuzetno nadaren, Cardano se obavezao da ga podučava latinski, grčki i matematiku. Ubrzo ga je zaposlio kao svog osobnog tajnika te poslije četiri godine službe napustio je tu funkciju da bi javno predavao matematiku na sveučilištu u Milanu. Postao je profesor matematike u Bologni 1565. i umro iste godine otrovan bijelim arsenom. Glasine govore da je to uradila njegova vlastita sestra.

Ferrari se pridružio sukobu oko rješenja kubne jednadžbe zaklinjući se da je bio prisutan na fatalnom sastanku Cardana i Tartaglie te da se Cardano nije zakleo na tajnost. Uvijek voljan da brani svog učitelja, Ferrari je potom izazvao Tartagliu na javnu raspravu o matematici i sličnim znanostima pisajući o svom na široko distribuiranom rukopisu: *"Pisao si stvari koje netočno i nedostojno kleveću gospodina Cardana s kojim se jedva možeš usporediti."* Tartagliin odgovor na to bila je zamolba za Ferraria da ili pusti Cardana da sam vodi svoju bitku ili da prizna da radi u Cardanovu korist. Izazov bi se prihvatio da je Cardano bio voljan supotpisati Ferrarievo pismo i da (budući se Tartaglia plašio neke vrste prevare) teme iz *Ars Magne* ne dolaze u obzir. Uslijedila je još jedna oštra rasprava tijekom koje je razmijenjeno 12 pisama punih optužbi i uvreda, gdje je svaka strana pokušavala opravdati svoju poziciju. Ferrari je pogriješio u jednom od ovih odgovora kada se prozvao Cardanovom kreacijom dopuštajući Tartaglii da mu se kasnije i obraća tim imenom.

Natjecanje se konačno održalo u Cardanovom rodnom gradu Milanu 1545. godine.

Cardano je prije velikog i istaknutog okupljanja otišao iz Milana na nekoliko dana jer je možda bio svjestan svojih vlastitih ograničenja. Ne postoje nikakvi zapisnici kako se sve odvijalo osim nekoliko izjava koje su sastanak pretvorile u galamu zbog zadatka kojeg je postavio Ferrari, a Tartaglia ga nije znao riješiti. Prepirka je trajala do kasnih večernjih sati kada su se svi osjetili dužnim otići. Tartaglia je otputovao sljedećeg jutra tvrdeći da je bolje prošao u raspravi, ali se činilo da je Ferrari proglašen pobjednikom. Najbolji dokaz ovoga je da je Tartaglia izgubio radno mjesto u Brescii, a Ferrari primio nekoliko laskavih ponuda među kojima i poziv da predaje u Veneciji, Tartagliinom uporištu.
Ferrarieva metoda rješavanja kubnih jednadžbi može se, modernim zapisom, sažeti na sljedeći način. Prvo, reducirajmo jednadžbu

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

do posebne forme

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

u kojoj nedostaje član uz $y^3$, tako što uvedemo supstituciju $x = y - a/4$. Sada lijeva strana

$$y^4 + py = -qy - r$$

sadrži dva člana kvadrata $y^2 + p$. Nadopunimo do kvadrata dodajući $py^2 + p^2$ svakoj strani kako bi dobili

$$(y^2 + p)^2 = y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 + p^2 - qy - r.$$

Sada uvodimo drugu nepoznanicu zbog pretvaranja lijevog člana ove jednadžbe u $(y^2 + p + z)^2$. Ovo se postiže dodajući svakoj strani $2(y^2 + p)z + z^2$ čime dobivamo

$$(y^2 + p + z)^2 = py^2 + p^2 - qy - r + 2(y^2 + p)z + z^2$$

$$= (p + 2z)y^2 - qy + (p^2 - r + 2pz + z^2).$$

Problem se sada svodi na pronalaženje vrijednosti $z$ koja čini desnu stranu; kvadratu uz $y$, potpunom kvadratu. Ovo će biti slučaj kada je diskriminanta kvadratne jednadžbe 0, tj. kada

$$4(p + 2z)(p^2 - r + 2pz + z^2) = q^2,$$

koja zahtijeva rješavanje kubne jednadžbe po $z$; naime,

$$8z^3 + 20pz^2 + (16p^2 - 8r)z + (4p^3 - 4pr - q^2) = 0.$$

Posljednja jednadžba poznata je kao "razlučiva kubna jednadžba" dane kvadratne jednadžbe te se može riješiti uobičajenim načinom. Općenito postoje tri rješenja razlučivih kubnih jednadžbi, a $y$ se može odrediti vađenjem drugog korijena. Kada je vrijednost $y$ poznata, odmah se dolazi do rješenja prvotne kvadratne jednadžbe. Ako ova procedura izgleda komplicirano, primjer iz *Ars Magne* bi mogao pomoći u razrješavanju niza koraka. Cardano je razmotrio jednadžbu četvrtog stupnja $x^4 + 4x + 8 = 10x^2$, ili,

$$x^4 - 10x^2 = -4x - 8.$$

Dopunjavajući na kvadrat na lijevoj strani, dobije se

$$(x^2 - 10)^2 = -10x^2 - 4x + 92.$$

Dodajući izraz $2z(x^2 - 10) + z^2$ svakoj strani, jednadžba se mijenja u

$$(x^2 - 10 + z)^2 = (2z - 10)x^2 - 4x + (92 - 20z + z^2) \tag{3}$$

gdje je $z$ nova nepoznanica. Sada je desni izraz potpun kvadrat ako se $z$ uzme tako da zadovoljava uvjet

$$4(2z - 10)(92 - 20z + z^2) = 16,$$

ili jednostavnije

$$z^3 - 25z^2 + 192z = 462.$$

Ovo je kubna jednadžba iz koje se može pronaći $z$. Počinjemo zamjenom $z = u + \frac{25}{3}$ čime dobivamo jednadžbu oblika

$$u^3 = \frac{49}{3}u + \frac{524}{27}.$$

Rješenje je $u = \frac{4}{3}$ tako da je $z = 7$. To je ta vrijednost za $z$ koja bi trebala dati kvadrate sa obje strane jednadžbe (3). Rezultat zamjene $z = 7$ je

$$(x^2 - 3)^2 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2,$$

odakle je $x^2 - 3 = (2x - 1)$. Pozitivan predznak daje

$$x^2 - 2x - 2 = 0,$$

a negativan

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Rješavajući ove jednadžbe formulom za jednadžbe četvrtog stupnja nalazimo četiri rješenja polazne jednadžbe koja su

$$1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3},\ -1 + \sqrt{5},\ -1 - \sqrt{5}$$

## 2.7 Priča o jednadžbi petog stupnja: Ruffini, Abel i Galois

Naša priča nije završila. Vidjeli smo da su u slučaju kvadratnih, kubnih i jednadžbi četvrtog stupnja određene formule za rješenja formirane koeficijentima jednadžbe koristeći četiri aritmetičke operacije (zbrajanje, množenje, oduzimanje i dijeljenje) i vadeći razne korijene. Sljedeći logični korak bio je tražiti slična rješenja jednadžbi višeg stupnja pod pretpostavkom da bi se jednadžba $n$-tog stupnja mogla riješiti korjenovanjem i vjerojatno korijenom čiji eksponent nije veći od jedan. Gotovo su se 300 godina algebraičari mučili sa općom jednadžbom petog stupnja i nisu gotovo ništa uspjeli. Ali su ovi ponovni neuspjesi barem imali učinak da se predloži vjerojatnost koja je u to vrijeme zaprepastila, da se jednadžbe petog stupnja možda ne mogu riješiti na ovaj način.
Paolo Ruffini (1705. – 1822.), talijanski fizičar koji je podučavao matematiku i medicinu na sveučilištu u Modeni, potvrdio je sumnju nemogućnosti pronalaska algebarskog rješenja za opće jednadžbe petog stupnja. Ruffiniev dokaz, koji se pojavio u njegove dvije knjige *Teorie generale dele equazioni* iz 1799. bio je čvrst u glavnim crtama, ali pogrešan u nekim detaljima. Norveški genije Abel (1802. - 1829.) je proučavao isti problem kada je imao otprilike 19 godina. U početku je mislio da je pronašao rješenje općih jednadžbi petog stupnja korjenovanjem, ali je kasnije utvrdio nerješivost jednadžbe koristeći jači argument nego Ruffini. Abel je u potpunosti shvatio važnost svog otkrića te ga objavio 1824. godine na svoj trošak u brošuri koja je nosila naslov *Memoire sur les equations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'equation generale du cinquième degré.* Zbog smanjenja troškova cijela se brošura morala smanjiti na šest stranica što je otežavalo razumijevanje. Tako naučnici tog doba nisu primjetili značaj Abelovog remek djela. Kada je vodeći europski matematičar Carl Friedrich Gauss primio svoj primjerak, bacio ga je u stranu bez čitanja i sa uzvikom: *"Evo još jedna od onih monstruoznosti!"*

Abel je imao priliku pri upoznavanju s Augustom Leopoldom Crellom, njemačkim građevinskim inžinjerom i entuzijastičnim amaterom matematike. Tada je Crell planirao izdati novi časopis koji bi bio prvi koji je posvećen isključivo matematičkom istraživanju. Abel je voljno prihvatio poziv da piše članke te su prva tri primjerka *Journal für die reine und angewandte mathematik* (Časopis čiste i primijenjene matematike) ili Crellov časopis, kako su ga mnogi zvali, sadržavala 22 lista koje je ispisao Abel. U prvom primjerku (1826.) proširio je svoje ranije istraživanje na ono što je danas poznato kao Abel-Ruffinijev problem: *Nemoguće je pronaći opće rješenje za određivanje nultočaka polinoma petog ili većeg stupnja ukoliko se u formuli za rješavanje dopušta koristiti samo osnovne aritmetičke operacije i korijenovanje.* Kada je Abel objavio svoj članak, nije bio svjestan da ima svog prethodnika. Kasnije će, međutim, napisati u rukopisu *Sur la résolution algébraique des equations* (datiranom 1828., ali objavljenom tek nakon njegove smrti): *"Jedini prije mene, ako se ne varam, koji je pokušao dokazati nemogućnost algebarskog rješenja općih jednadžbi je matematičar Ruffini, ali je njegov rad tako kompliciran da je teško procijeniti točnost njegovih argumenata."*
Abelov teorem o nerješivosti jednadžbi većeg stupnja važio je samo za opće jednadžbe. Mnoge posebne jednadžbe koje su postojale bile su rješive korjenovanjem, a karakterizacija ovih ostala je nedogovoreno pitanje. To pitanje ostavljeno je za drugog mladog matematičara, Evariste Galoisa (1811. − 1832.) da u potpunosti odgovori koje posebne jednadžbe danog stupnja dopuštaju algebarsko rješenje. Posmrtna objava Galoisova rukopisa u Liouvilleu *Journal de Mathématiques* 1846. godine predstavljala je završetak Abelovog istraživanja i fundiranje teorije grupa, koja postaje jedna od najvažnijih grana moderne matematike. Uzimajući u obzir značaj njegovog otkrića, postavlja se logično pitanje zašto je trebalo 14 godina poslije Galoisove smrti da osnovni elementi njegova djela budu dostupni u tisku. Razlog tome je samo loša sreća i nemar. Originalne bilješke je zagubio urednik zadužen da ih proučiti, a nakon što su predane vratio ih je drugi urednik koji je prosudio da je njihov sadržaj nerazumljiv.
Izgleda da je to bio sljedeći niz događaja. Galois je podnio rezultate algebarskog rješenja jednadžbi Akademiji znanosti u svibnju 1829., kad mu je bilo tek 17 godina. Augustin Louis Cauchy (1789.-1875.), član akademije i profesor na sveučilištu Ecole Polytechnique bio je imenovan za referenta. Galois je potom (veljača 1820.) predao novu verziju svog istraživanja Akademiji nadajući se da će postati članom natjecanja za Veliku Nagradu iz matematike što je bio vrhunac matematičke časti. Istraživanje

je ovaj put bilo povjereno stalnom tajniku, Josephu Fourieru (1768. – 1830.), koji je umro kratko poslije toga, prije nego je proučio rukopis. Taj rukopis nikad nije vraćen među njegove ostale papire. Još jedno razočarenje čekalo je Galoisa. U siječnju 1831. predao je svoj rad treći put pod naslovom *Une mémoire sur les conditions de résolubilité des equations par radicaux.* Poslije odgode koja je trajala šest mjeseci tijekom koje je Galois pisao rektoru Akademije pitajući ga što se dogodilo, referent Simeon-Denis Poisson ga je odbio. U završetku svog izvještaja Poisson je napomenuo:
*"Njegovi argumenti nisu dovoljno jasni niti dovoljno razrađeni za nas da bismo procijenili njegovu točnost. Nadamo se da će autor objasniti svoj rad u cjelosti tako da ga možemo procijeniti."*
U svibnju 1832. Galois je bio izazvan na dvoboj pod nejasnim okolnostima. (Govorilo se da je policija unajmila rivala koji je dogovorio sukob da bi eliminirao, kako su oni mislili, opasnog radikala.) Uoči dvoboja, navodno siguran u vlastitu smrt, Galois je napisao pismo prijatelju opisujući sadržaj bilješki koje je Poisson odbio. Sedam stranica, napisanih žurno, sadržavaju kratak pregled otkrića koje nije znao protumačiti. Pismo je dovršio zamolbom:
*"Nadam se da će, naposljetku, netko smatrati profitabilnim da odgonetne ovaj nered."*
Galois je proveo ostatak noći bilježeći i ispravljajući neke od svojih radova; pored teorema naškrabao je:
*"Postoji nekoliko stvari koje su ostale nedovršene u ovom dokazu. Ja ih nemam vremena dovršiti."*
Dvoboj se održao 30. svibnja 1832., rano ujutro. Galois je bolno ranjen hitcem u trbuh te je ostao ležati gdje je pao sve dok ga nije pronašao zemljoradnik koji je prolazio tim putem i koji ga je odveo u bolnicu. Umro je sljedećeg jutra od upale trbušene maramice dok je s njim bio njegov mlađi brat. Galois ga je pokušao utješiti govoreći: *"Ne plači. Trebam svu hrabrost da umrem u dvadesetoj."* Sahranili su ga u zajedničkom jarku na groblju Montparnasse; točna lokacija nije poznata.
Do 1843., Galoisovi su rukopisi dospjeli do Josepha Liouvillea (1809. – 1882.) koji je proveo nekoliko mjeseci u pokušaju da ih shvati, postavši uvjeren u njihov značaj. Obratio se Akademiji znanosti 4. srpnja 1843., počevši ovim riječima: *"Nadam se da ću zadobiti interes Akademije izjavom da sam među Galoisovim radovima pronašao rješenje, precizno koliko i temeljno, ovog impozantnog zadatka: Je li ili nije opća jednadžba petog stupnja rješiva pomoću korijena?"* Louiville je najavio da će obja-

viti Galoisove znanstvene radove u prosinci 1843. godine u svom nedavno osnovanom časopisu *Journal Matehematiques Pures et Appliquees.* Ali iz nekih razloga, objava ove uređene verzije nije se ostvarila do izdanja iz 1846. godine za listopad-studeni. Iako nema tragova Galoisovim posmrtnim ostatcima, njegove ideje su nezaboravne. Tijekom kasnog 19. stoljeća, Galoisove teorija, kao i nova tema koju je oživjela, postala je cjelokupnim i prihvaćenim djelom matematike. Izgleda da je Galoisovu teoriju prvi put proučavao Richard Dedekind na njemačkim sveučilištima. On je predavao u Göttingenu 1856. − 1857. ; navodno su došla samo dva studenta da bi ga slušala. Prvu potpunu i jasnu prezentaciju Galoisove teorije ponudio je Camille Jordan u svojoj knjizi *Traite des substitution et des equations algebraiques.*(1870.)

# Zaključak

Renesansa kao preporod kulture, znanosti i umjetnosti zaista je upečatljivo razdoblje u ljudskoj povijesti. Ne proučavajući matematičke uspjehe u to doba, čovjek bi pomislio da je i u tom području doživjela procvat.

Dokazi, međutim, pokazuju ne baš tako veliki procvat matematike kao znanosti. Složit ćemo se da rješenje jednadžbi većeg stupnja ipak nije mala stvar. Uspostavila se algebarska tradicija koja je zasigurno pomogla budućim generacijama pa i nama danas. Ako kao učitelj promotrimo ova postignuća u matematici, sretni smo zbog otkrića, odnosno "postavljanja na zemlju" imaginarnih brojeva. Samo rješenje kubnih jednadžbi možemo korisno iskoristiti u nastavi matematike, bilo redovnoj, bilo dodatnoj.

Svako daljnje napredovanje ne bi bilo moguće da nije izumljen tiskarski stroj koji je u to vrijeme uvelike pomogao najznačajnijem "Googleu" tog vremena, knjižnicama.

# Literatura

[1] F. M. Brückler, *Matematički dvoboji*, Hrvatski matematički elektronički časopis, **4**(2005)

[2] D. M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The MacGraw - Hill Companies, 2007.

# Sažetak

Glavna tema ovog diplomskog rada je matematika u doba Renesanse, odnosno rješenje kubne jednadžbe i jednadžbi većeg stupnja. U radu smo se najprije upoznali s pojmom *renesanse* te stanjem u Europi u 14. i 15. stoljeću. Nakon toga smo prešli na matematička postignuća izdvajajući Nicola Tartagliu, Girolama Cardana, Ferraria, Bombellia, Abela te ostale matematičare tog doba.

## Summary

The main theme of this research paper is math from the age of Renaissance. To be precise, it is about the solution to cubic equation and equations of higher degree. Firstly, we were introduced to the term of Renaissance and its circumstances during the 14th and 15th century. We proceeded to the achievements in the field of math then. The outstanding mathematicians of that period are Nicola Tartaglia, Girolamo Cardan, Ferrari, Bombelli, Abel and others.

# Životopis

Rođena sam 4. lipnja 1990. godine u Zavidovićima u Bosni i Hercegovini. Živim u Lupoglavu, selu u općini Žepče. U Osnovnoj školi "Žepče" u Žepču sam završila osnovnoškolsko obrazovanje. Srednju školu za zvanje ekonomskog tehničara pohađala sam u Katoličkom školskom centru "Don Bosco" u Žepču. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2009. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.