Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Tokić

Konstrukcije origamijem

Diplomski rad

Osijek, 2012.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Tokić

Konstrukcije origamijem

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Matić
Komentor: dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2012.

Sadržaj

1. Uvod

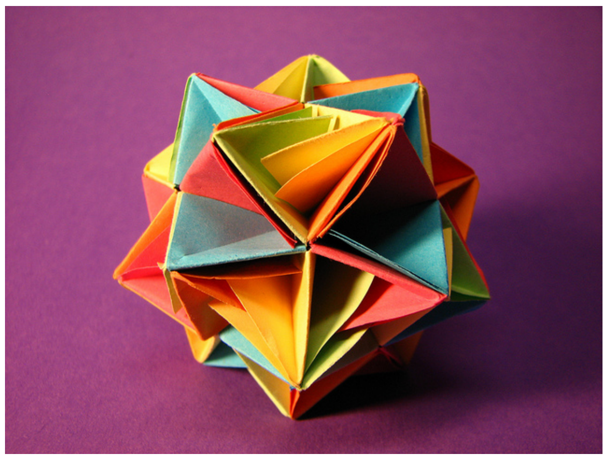
Kada kažemo ORIGAMI, ljudi zamisle ptice, žabe ili avione napravljene od presavijanog papira i misle da je to zabavna vježba za djecu. Origami je puno više od toga. Tom vještinom se bave razne znanosti, matematika i informatika posebno. Ta drevna japanska riječ crta u mislima slike neobično složenih organskih i geometrijskih oblika, aksiome i algoritme, kao i primjenu origamija na životne situacije. Origami se primjenjuje u slaganju sigurnijih zračnih jastuka u automobilima, u slaganju teleskopa u svemiru kojima se promjer kreće od 100 metara na više i u brojnim drugim životnim situacijama.

Postoji posebna privlačnost između origamija i matematičara. Slaganje papira nudi bezbrojne izazove, kako teoretske, tako i praktične i pri tome djeluje na estetske osjećaje matematičara. Ovako je o origamiju govorio Akira Yoshizawa, koji je bio zaljubljenik u ovu umjetnost:
"Moje origami kreacije, u skladu sa zakonima prirode, zahtijevaju korištenje geometrije, znanosti i fizike. One također uključuju religiju, filozofiju i biokemiju. U prvom redu, želim da otkrijete radost kreiranja vlastitom rukom ... mogućnost kreiranja iz papira je neograničena".

U ovom radu na zanimljiv način ćemo se upoznati s poviješću ove tehnike, osvrnut ćemo se na razvoj i primjenu tehnike savijanja papira u nastavi matematike i u svakodnevnom životu.

2. Origami

Origami je stara tradicionalna umjetnost savijanja papira u razne modele, tj. i sam naziv kaže: jap. *ori* = *savijanje* i *kami* = *papir*. Papir koji se koristi može biti jednobojana ili dvobojan i morao bi biti tanak i žilav da može zadržati postignuti oblik. U zemljama gdje je popularniji postoji papir baš za origami. Iako je od kvalitenijeg papira lakše napraviti lijepe modele, za početak nije nužno imati ga. Prilikom savijanja papira ne koriste se škare ni ljepilo, a postoje tradicionalni i modularni origamiji. U tradicionalnom origamiju konstrukcije se izvode korištenjem jednog lista papira koji ima oblik kvadrata ili pravokutnika. U modularnom origamiju različiti se individualni dijelovi povezuju u jednu cjelinu.



Slika 2.1. *Primjer modularnog origamija*

Origamijem se mogu izraditi različiti trodimenzionalni objekti, npr. ljudi, predmeti i apstraktni oblici. Najpoznatiji origami objekti su razne životinje savijene iz jednog lista papira. Tijekom razvoja origamija počeli su se koristit i drugi materijali za pravljenje origami figura osim papira. Primjerice vrećice od čaja složene u figuru origamija ili platneni ubrusi. Možemo koristiti još npr. pelir papir, kaširani staniol, natron...

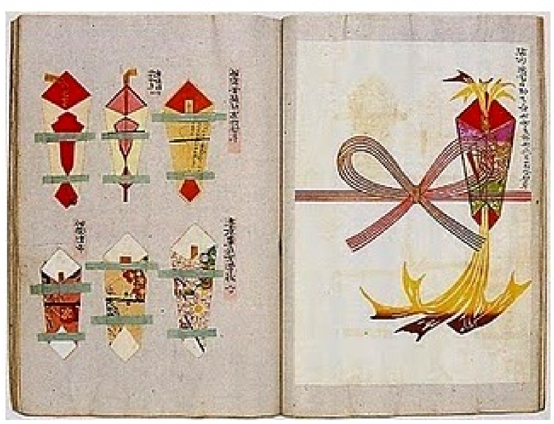
Slika 2.2. *Platneni ubrus složen pomoću origamija*

2.1. Povijest origamija

Povijest origamija se veže uz povijest otkrića papira. Oko 105. god.n.e. otkriven je papir, a za njegovo otkriće smatra se zaslužnim Kinez Ts'ai Lun. Početkom 7. stoljeća papir stiže u Japan preko budističkih svećenika. Postiže veliku kulturnu vrijednost i veliku popularnost.

Postoje vjerovanja da su Kinezi prvi savijali papir, jer jedan od najstarijih modela predstavlja kinesku džunku (kineski jedrenjak). Međutim, pravi procvat origamija dogodio se u Japanu, gdje se tradicionalno poštuje papir. Presavijeni papir u drevnom Japanu imao je posebno značenje u vjerskim obredima, kao i u odnosima između ljudi. Origami u samim svojim počecima je bio skup, tj. prilikom dolaska papira u Japan samo imućne obitelji ga koriste jer si to mogu priuštiti.

Prvi origamiji u Japanu bili su modeli leptira kojima su se ukrašavale posude sa pićem na ceremonijama vjenčanja. Prilikom tih ceremonija origami leptiri su simbolizirali mladence. Papirnati model noshi nastaje krajem 12. stoljeća. Samurajima su prije odlaska u bitku posluživali obredno jelo u listu papira, tako što su komadić osušenog mesa školjke zamotavali u papir posebno presložen i zaticali pod vrpcu kojom se vezao poklon. S vremenom, oblik papirnatog omota postao je važniji od samog jela. Ustalio se običaj darivanja papirnatih modela i u drugim prilikama, a od samurajskog jela noshi-awabi modelima je ostao naziv noshi koji je predstavljao dobru sreću. Također i figura ždrala je simbol sreće, ali i dugog života, dok origami u obliku žabe simbolizira ljubav i plodnost.



Slika 2.3. *Noshi*

Origami se proširio po cijelom svijetu. Arapi dolaze u doticaj s njim 751. god.n.e. kada su zarobili nekoliko vještih Kineza koji su znali izraditi papir. Europa dolazi u doticaj s origamijem preko Arapa. U srednjem vijeku se vidi primjena origamija zbog propisanog kodeksa ponašanja. Točno se znalo kako treba saviti pismo ili umotati poklon. U 18. stoljeću jedna od zabava na dvoru bila je savijanje ždralova od papira. Još u Egiptu je postojao običaj savijanja tkanina, a u srednjovjekovnom Bizantu su na poseban način savinuti dijelovi odjeće označavali položaj u dvorskoj hijerarhiji.

Početkom 15. stoljeća pojavljuju se u europskom višem društvenom sloju ubrusi, čiji je pravilan kvadratni oblik izazivao na savijanje. Poznata je gozba koju je papa Grgur XIII priredio za kardinale i ambasadore. Stol je bio ukrašen ubrusima savijenim u obliku brda, zvijezda, lavova. Na sredini stola je bio dvorac napravljen od ubrusa. Kako je došlo do razvoja u svijetu, tako je i proizvodnja papira porasla. Time papir postaje dostupan i ostalim ljudima, a ne samo imućnima. Tijekom 19. stoljeća origami postaje popularan među običnim ljudima u Japanu kao umjetnost, kao igračka i materijal za poučavanje djece.

Gledano kroz povijest istraživanje geometrije origamija mnogi smatraju da je započelo knjigom Sundara Tandaram Row-a pod nazivom "Geometrijske vježbe u savijanju papira" [6]. Ta knjiga je 1901. godine prevedena na engleski jezik i prvi puta objavljena na zapadu. U uvodu knjige napisano je "Madras, India, 1893." što se i smatra da je datum i mjesto štampanja originalnog rukopisa knjige. Osim nekoliko radova koji se odnose na neke posebne matematičke probleme u savijanju papira, teorija origamija nije doživjela neki veliki napredak sve do kraja prošlog stoljeća.

Najvažnija ličnost u povijesti origamija bio je Akira Joshizawa (1911.-2005.). Drevnu je japansku tradiciju savijanja papira podigao na razinu nove moderne umjenosti. Za života je kreirao nekih 50 tisuća modela, objavio 18 knjiga i inspirirao nove generacije svjetskih origami majstora. Njemu dugujemo nove tehnike oblikovanja origami modela i simbologiju dijagramiranja, tj. zapisivanja načina savijanja. Izlagao je u mnogim metropolama svijeta, među ostalima u New Yorku, Parizu, Tokiju, Salzburgu i Amsterdamu.

Slika 2.4. *Akira Joshizawa*

U 20. stoljeću Japan dolazi sve više u kontakt sa Europom i Amerikom, te origami postaje sve popularniji. Osim u Japanu jedino u Španjolskoj i Latinskoj Americi postoji kontinuirana tradicija savijanja papira, ali se ne može usporediti ni po opsegu ni kvaliteti. Širenjem origamija i zanimanje za origamijem je poraslo, kako u matematičkom svijetu tako i u umjetnosti. Počeli su se organizirati skupovi na kojima su se prikazivali različiti rezultati problema vezanih za origami konstrukcije. Prvi takav skup 1989. godine je orgnizirao talijansko-japanski matematičar Humiaki Huzita pod nazivom "First International Meeting of Origami Science and Technologies". Na tom prvom skupu je prvi puta prikazana i prezentirana jedna sistematska studija o origami konstrukcijama. Također Huzita te iste godine objavljuje "Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technologies", u kome je skupio skoro sva dotadašnja znanja o matematici origamija. Od 1989. pa do danas održano je pet skupova, a šesti se planira održati 2014. godine u Kobeu, u Japanu, a organizira ga prof. Koichi Tateishi koji radi u Kobe College-u.[14]

3. Matematika i origami

Više od desetljeća origami postaje zanimljiv matematičarima i informatičarima, jednako kao što je zanimljiv umjetnicima koji se bave origamijem, budući da origami postavlja zanimljiva temeljna geometrijska pitanja. Važno je nešto reći o položaju origamija u matematici i njegovom odnosu sa priznatim matematičkim disciplinama. Primjerice, figura ždrala naizgled nematematički objekt, usko je povezan s geometrijom. Razmotavanjem papira ždrala vidjet će se uzorak sastavljen od poligona omeđenih linijama savijanja, a cijeli objekt pokazuje određene vrste simetrija. Origamijem se mogu izrađivati modeli raznih poligona i poliedara.

3.1. Aksiomi origamija

Svaka geometrijska konstrukcija sastoji se od niza koraka koje provodimo uz pomoć ravnala i šestara. Svaki korak je određen geometrijskim pravilima tj. aksiomima. Da bi mogli riješiti geometrijski problem savijanjem papira moraju se prvo definirati dozvoljeni postupci. Kao što postoje točna pravila za geometrijske konstrukcije tako postoje i pravila kod origami konstrukcija.

Godine 1989. francuski matematičar Jacques Justin prvi otkriva aksiome origamija. Jacques Justin je svoje aksiome origamija prikazao pomoću tablice.

	Operacija	Uvjet	Opće rješenje	Broj mogućih rješenja
1.	$P \to P, P' \to P'$	$P \neq P'$	pravac PP'	1
2.	$P \to P'$	$P \neq P'$	simetrala dužine $\overline{PP'}$	1
3.	$P \to P, l \to l$		normala na l kroz P	$1, 2$
4.	$P \to l, l' \to l'$	$-(P \in l \wedge l \parallel l')$	projekcija P na l, paralelnoj l'	$0, 1$
5.	$l \to l'$	$l \neq l'$	simetrala kuta (l, l')	$1, 2$
6.	$P \to l, P' \to P'$	$-(P = P' \in l)$	rješenje jednadžbe drugog stupnja	$0, 1, 2$
7.	$P \to l, P' \to l'$	$\{P, P'\} \not\subset l \cap l'$ $\wedge \{P, l\} \neq \{P', l'\}$ $\wedge \begin{pmatrix} P \notin l \vee P' \notin l' \\ \vee l \cap l' = \varnothing \end{pmatrix}$	rješenje jednadžbe trećeg stupnja	$0, 1, 2, 3$

Tablica 3.1. *Justinovi aksiomi*[1]

[1] Tablica preuzeta iz [6], str. 4.

Prilikom nabrajanja aksioma Jacques Justin je dao i njihovu geometrijsku interpretaciju. Koristio je simboličke oznake za operacije, primjerice:

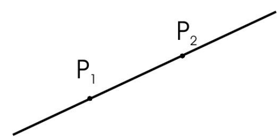
- $P \to P'$ koja ima značenje: "Točku P postaviti na točku P'.",
- $P \to P$ koja ima značenje: "Točka P ostaje nepokretna.",
- $P \to P', P' \to P'$ koja ima značenje: "Točku P postaviti na točku P', a točka P' ostaje na svom mjestu."...

Zatim talijansko-japanski matematičar Humiaki Huzita ponovno otkriva aksiome od prvog, pa do šestog. Huzita definira šest operacija kojima se dobivaju nove linije savijanja i tih šest operacija postalo je poznato kao Huzitini aksiomi. U origami krugovima prihvaćeni su Huzitini aksiomi i buduće analize raznih problema su se oslanjale na njihovu primjenu. Zbog toga je bilo uznemiravajuće da je tek 2002. godine postavljen i sedmi aksiom, tj. da je Koshiro Hatori dokazao da je moguć još jedan način dobivanja nove linije savijanja. Zajedničko svim tim aksiomima je da konstruiraju točno po jednu liniju savijanja. Od kada je K. Hatori dodao sedmi aksiom, pojavio se i naziv "Huzita-Hatorijevi aksiomi", dok neki autori koriste i naziv "Huzita-Justinovi aksiomi".

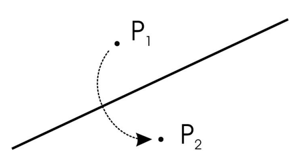
Slika 3.1. *Humiaki Huzita*

Huzitini aksiomi[2]:

(O1) Za dvije zadane točke P_1 i P_2, postoji linija savijanja koja prolazi kroz obje točke.

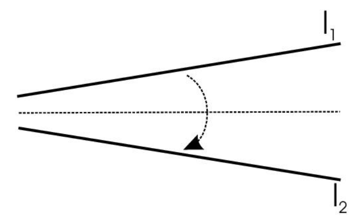


(O2) Za dvije zadane točke P_1 i P_2, postoji linija savijanja koja smiješta P_1 na P_2.

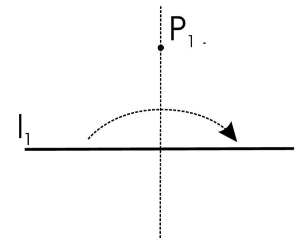


[2]Oznake i notacija su preuzete iz [7], poglavlje 1.1, str. 24.

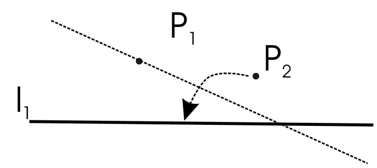
(O3) Za dva zadana pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta l_1 na l_2.



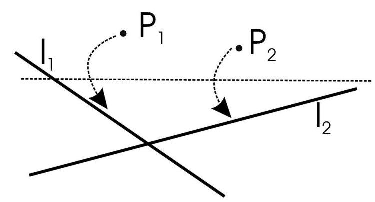
(O4) Za zadanu točku P_1 i pravac l_1, postoji linija savijanja okomita na pravac l_1, a prolazi kroz točku P_1.



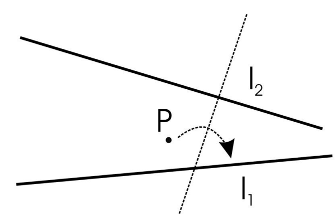
(O5) Za dvije zadane točke P_1 i P_2 i pravac l_1, postoji linija savijanja koja smješta točku P_2 na pravac l_1 i prolazi točkom P_1.



(O6) Za dvije zadane točke P_1 i P_2 i dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta točku P_1 na pravac l_1 i točku P_2 na pravac l_2.



(O7) Za zadanu točku P i dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta točku P na pravac l_1, a okomita je na pravac l_2.



Robert Lang je 2003. godine dokazao potpunost ovih aksioma tj. pokazao je da nema drugih linija savijanja kojima možemo dobiti ravan pregib između zadanih točaka i pravaca.

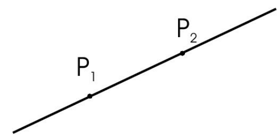
3.2. Karakteristike aksioma origamija, njihove posljedice i rezultati

Lako se vidi da u nekim aksiomima postoje dva ili tri pregiba koji zadovoljavaju aksiom. Na primjer u (O6) za rješenje možemo dobiti jedno, dva ili tri savijanja. Ali na primjer u (O1) imamo samo jedno savijanje, a isti je slučaj u (O2) i (O4). U daljnjem tekstu navedene su karakteristike svakog pojedinog aksioma.

3.2.1. Aksiom (O1)

(O1) Za dvije zadane točke P_1 i P_2, postoji linija savijanja koja prolazi kroz obje točke.

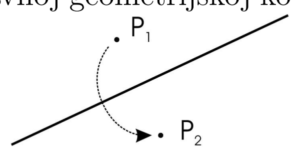
- Radi se o jednostavnoj konstrukciji i odgovara geometrijskoj konstrukciji pravca kroz dvije zadane točke.



3.2.2. Aksiom (O2)

(O2) Za dvije zadane točke P_1 i P_2, postoji linija savijanja koja smiješta P_1 na P_2.

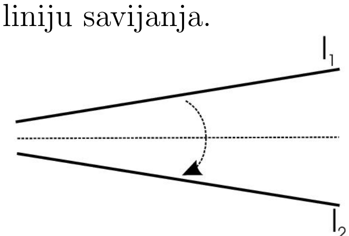
- Papir savijemo duž normale na dužinu određenu dvijema zadanim točkama P_1 i P_2. Ovo odgovara jednostavnoj geometrijskoj konstrukciji simetrale dužine $\overline{P_1P_2}$.



3.2.3. Aksiom (O3)

(O3) Za dva zadana pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta l_1 na l_2.

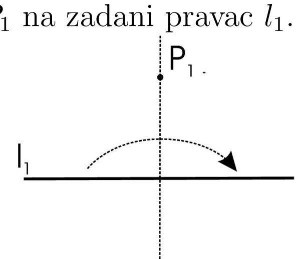
- Odgovara jedinstvenoj geometrijskoj konstrukciji simetrale kuta između pravaca l_1 i l_2 ako se sijeku. Ako su l_1 i l_2 paralelne, rješenje je pravac koji je jednako udaljen od l_1 i l_2 i paralelan je sa svakim od njih. Primjetimo da u prvom slučaju kada se pravci sijeku imamo dvije moguće linije, ali jednim potezom možemo konstruirati samo jednu liniju savijanja.



3.2.4. Aksiom (O4)

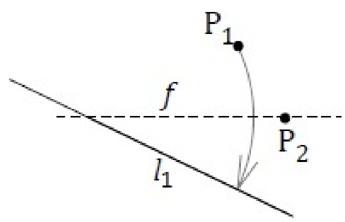
(O4) Za zadanu točku P_1 i pravac l_1, postoji linija savijanja okomita na pravac l_1, a prolazi kroz točku P_1.

- Također se radi o jednostavnoj konstrukciji i odgovara geometrijskoj konstrukciji normale iz zadane točke P_1 na zadani pravac l_1.



3.2.5. Aksiom (O5)

(O5) Za dvije zadane točke P_1 i P_2 i pravac l_1, postoji linija savijanja koja smješta točku P_1 na pravac l_1 i prolazi točkom P_2.

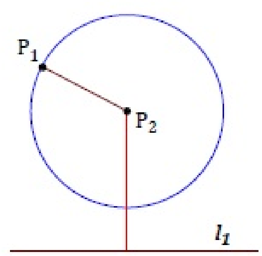


- U (O5) možemo pokazati da ako vrijedi $|P_1P_2| = d(P_2, l_1)$ onda imamo jedinstveni pregib. Pri tome kažemo:

$$d(P_2, l_1) = \inf_{R \in l_1} |P_2 - R|.$$

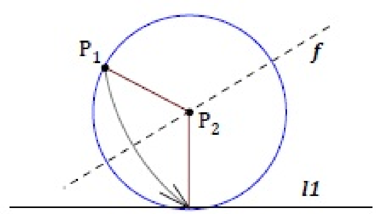
- Peti aksiom origamija je već uvod u neke specifičnosti origami konstrukcija. Taj aksiom bi se mogao geometrijski riješiti pomoću kružnice sa centrom P_2, polumjera $\overline{P_1P_2}$. Točka P_1 se u tom slučaju preslikava na točku presijeka kružnice s zadanim pravcem l_1. Kružnica s pravcem može imati jednu, dvije ili nijednu zajedničku točku, iz toga slijedi da će postojati jedna, dvije odnosno nijedna moguća konstrukcija. Sve to ovisi o položaju zadanih elemenata. Tražena linija savijanja prolazi kroz točku P_2 i kroz središte dužine $\overline{P_1P_1'}$.

  Udaljenost između točaka P_1 i P_2 manja je od udaljenosti točke P_2 do pravca l_1.



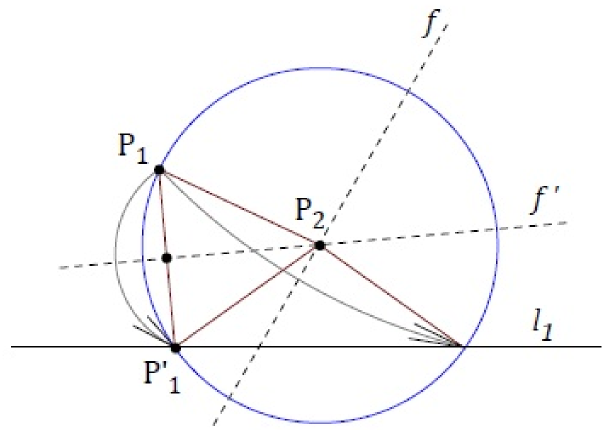
Slika 3.2. *(O5) nema rješenja*

Udaljenost između točaka P_1 i P_2 jednaka je udaljenosti točke P_2 do pravca l_1.



Slika 3.3. *(O5) ima jedno rješenje*

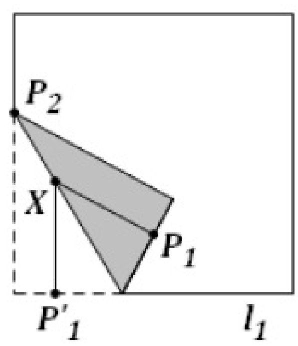
Udaljenost između točaka P_1 i P_2 veća je od udaljenosti točke P_2 do pravca l_1.



Slika 3.4. *(O5) ima dva rješenja*

- Najbolje je pokazati praktičnim origamijem na listu papira što ćemo dobiti primjenom petog aksioma. Donji rub papira kvadratnog oblika označimo s l_1, a sa P_1 označimo točku koja se nalazi na simetrali od l_1. Neka je P_2 proizvoljna točka na okomitom lijevom rubu papira. Ukoliko primjenimo (O5) dovoljan broj puta, pri tome mjenjajući položaj točke P_2 duž oba okomita ruba papira, na papiru će se ocrtati parabola.

  Točka X na dobivenoj liniji savijanja jednako je udaljena od točke P_1 i linije l_1, jer je dužina $\overline{P_1X}$ jednaka dužini $\overline{P_1'X}$. Ujedno točka X je i jedina točka na liniji savijanja koja ima ovu osobinu.

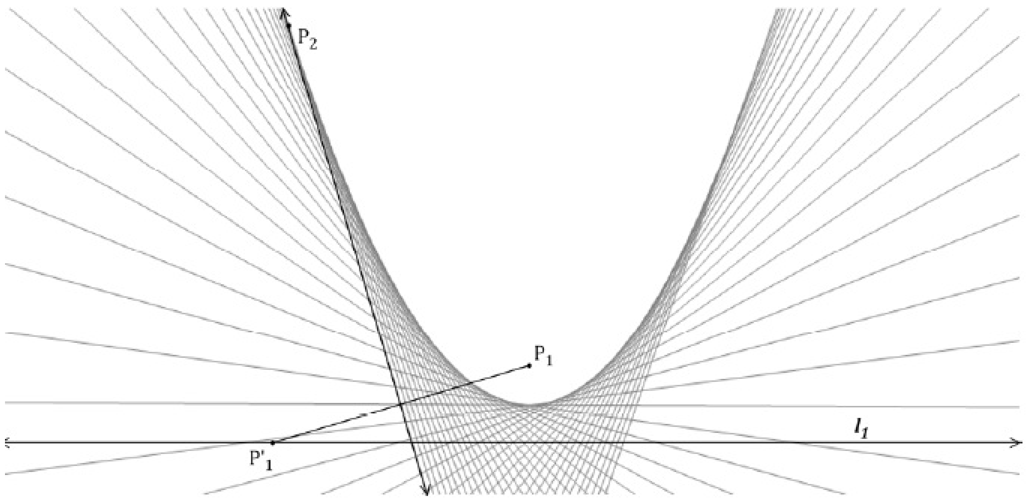
  

  Parabola je definirana skupom svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od zadane točke fokusa i zadanog pravca ravnalice. Iz toga slijedi da točka X zaista pripada paraboli, a točka P_1 predstavlja njen fokus i pravac l_1 predstavlja ravnalicu parabole. Kako točka X ujedno pripada i liniji savijanja, ta linija jeste tangenta parabole u X.

  Jednadžba parabole je drugog stupnja

  $$y^2 = 2px$$

  pa iz toga slijedi da se pomoću (O5) može riješiti neka kvadratna jednadžba. No međutim neće se moći uvijek izvesti takvo savijanje papira. Nekad će postojati dva načina da se dobije linija savijanja, a nekad točno jedan način da se dobije linija svijanja. Broj mogućih rješenja ovisi o izboru točke P_2.



Slika 3.5. *Parabola kao ovojnica svojih tangenti*

Točka P_1 i pravac l_1 su fiksni. Dok točka P_1', koja je slika točke P_1, se mijenja u ovisnosti od položaja točke P_2, tj. u ovisnosti od tangente.

- Već je opisano da se višestrukom primjenom (O5) dobije parabola, ali nije opisano niti objašnjeno kako se proizvoljna kvadratna jednadžba može riješiti pomoću origamija. Neka je na primjer zadana jednadžba[3]:

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Postupak za pronalaženje rješenja ove jednadžbe je sljedeći:

1. Postavimo osi Ox i Oy. Kod gotovo svih teorijskih analiza origami konstrukcija pretpostavlja se da je papir neograničena euklidska ravnina, pa linije savijanja u toj ravnini imaju ulogu pravaca. Kada operacije treba primjeniti na papir kvadratnog oblika, postavlja se kartezijev koordinatni sustav. Ishodište koordinatnog sustava je najčešće u središtu kvadrata, a koordinatne osi su tada paralelne s rubovima papira.
2. Pravac udaljen za 1 od osi x označimo s x'. Udaljenost se bira prema koeficijentu najstarijeg člana kvadratnog trinoma, što je u ovom slučaju jednako 1.
3. Ako krenemo od točke I i konstruiramo vektore koeficijenata na sljedeći način:
   $|\overrightarrow{IO}| = 1$, jer je koeficijent uz x^2 jednak 1.
   $|\overrightarrow{OA}| = 2$, jer je apsolutna vrijednost koeficijenta uz x jednaka 2. U odnosu na $|\overrightarrow{IO}|$, vektor $|\overrightarrow{OA}|$ postavlja se pod pravim kutom i u smjeru kazaljke na satu. Smjer je takav, jer nije došlo do promjene predznaka. Drugi koeficijent kao što se vidi je 2 i pozitivan je kao i prvi koeficijent.

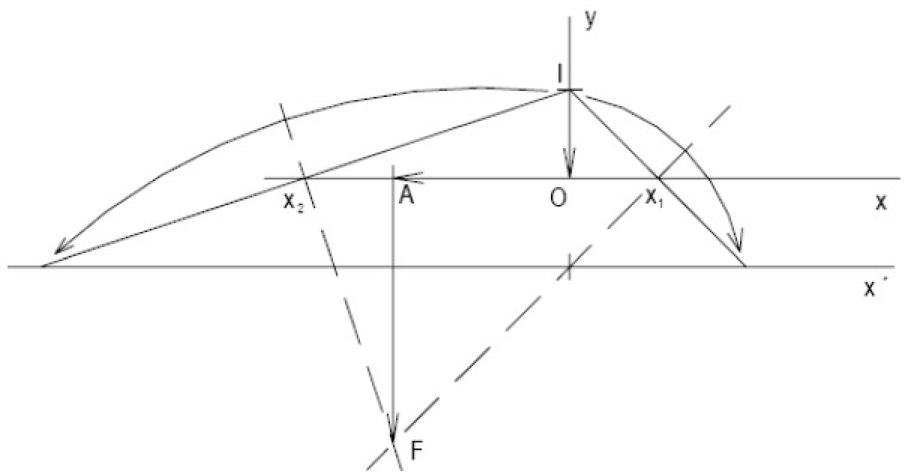
[3]Primjer preuzet iz [6], str. 9.

$|\overrightarrow{AF}| = 3$, jer je apsolutna vrijednost slobodnog člana jednaka 3. $|\overrightarrow{AF}|$ je opet pod pravim kutom u odnosu na $|\overrightarrow{OA}|$, no ovaj put u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, jer je treći koeficijent suprotnog predznaka u odnosu na drugi koeficijent.

4. Izvršimo (O5): $I \to x'$; $F \to F$.

Moguća su dva rješenja:

$$x_1 = 1 \quad i \quad x_2 = -3$$



Slika 3.6. *Prikaz rješenja kvadratne jednadžbe*

Dokaz:

$$\triangle IOX_1 \sim \triangle FAX_1 \quad i \quad \triangle IOX_2 \sim \triangle FAX_2,$$
$$\frac{IO}{OX_1} = \frac{AX_1}{AF} \quad i \quad \frac{IO}{OX_2} = \frac{AX_2}{AF},$$
$$\frac{1}{x_1} = \frac{x_1+2}{3} \quad i \quad \frac{1}{-x_2} = \frac{-x_2-2}{3}$$

Zamjenimo x_1 i x_2 sa x i iz obje jednakosti dobivamo $x^2 + 2x - 3 = 0$. ■

- Također može se postaviti pitanje: Kada dobijemo jednu liniju savijanja u petom aksiomu? Odgovor na ovo ptanje dati će nam sljedeći teoremi. No prije nego iskažemo teoreme potrebna nam je jedna definicija koja glasi:

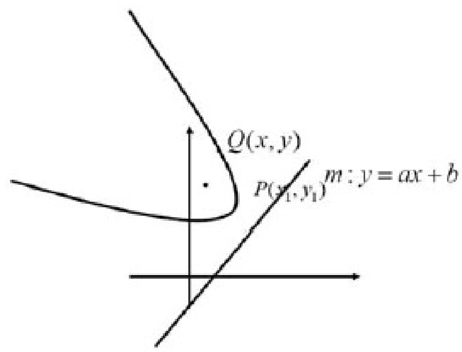
Definicija 3.1 *a) Za točke P i Q i za pravac m, ako imamo jedno savijanje zadovoljeno u O5(P,Q,m) onda to savijanje obilježavamo sa [P,Q,m]*[4].

b) Za točke P i Q i pravce n i m, ako imamo jedno savijanje u O6(P,Q,m,n) onda to savijanje označavamo s [P,Q,m,n].

[4]Oznake preuzet iz [8], str. 701.

Teorem 3.1 *Geometrijsko mjesto točke Q, za koje postoji savijanje [P,Q,m] je parabola sa fokusom u točki P i ravnalicom m.*

Dokaz: Pretpostavimo da su točka $P(x_1, y_1)$ i pravac $m : y = ax + b$ zadani, a $Q(x, y)$ proizvoljna točka u R^2. Znamo da ako imamo $|PQ| = d(Q, m)$ onda imamo i jedno presavijanje koje zadovoljava (O5). Gore spomenuta jednadžba je jednadžba parabole pa je geometrijski položaj točke Q parabola s fokusom u točki P i s ravnalicom m. ■



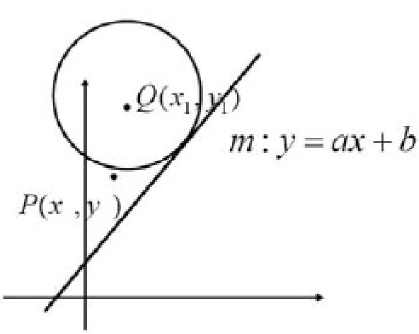
Slika 3.7. *Grafički prikaz dokaza teorema 3.1*

Teorem 3.2 *Geometrijsko mjesto točke P tako da postoji savijanje [P,Q,m] je kružnica sa centrom u točki Q i radijusom $d(Q, m)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je zadano točka $Q(x_2, y_2)$ i pravac $m : y = ax + b$ u (O5). Ako za neku točku $P(x, y)$ u R^2, $[P, Q, m]$ postoji jedinstveno savijanje u (O5) onda je $|PQ| = d(Q, m)$ i imamo:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = \frac{(y_2 - ax_2 - b)^2}{1 + a^2}.$$

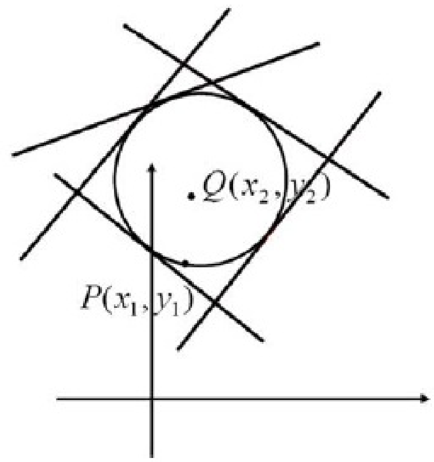
Prepoznajemo jedndžbu kružnice. Stoga je geometrijsko mjesto svih točaka P za koje postoji presavijanje upravo kružnica sa središtem u Q radijusa $d(Q, r)$. Očito za točke unutar kruga ne postoji presavijanje, dok za točke izvan kružnice imamo dva presavijanja. ■



Slika 3.8. *Grafički prikaz dokaza teorema 3.2*

Teorem 3.3 *Skup pravaca m, gdje je $[P, Q, m]$ savijanje za neke P i Q, predstavlja skup svih tangenti na kružnicu C sa središtem u Q i radijusom $|PQ|$.*

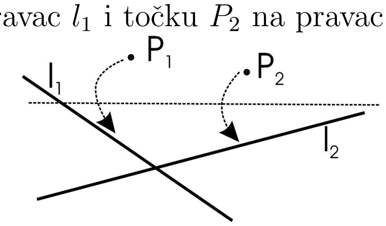
Dokaz: Analogno slijedi iz prethodna dva dokaza. ■



Slika 3.9. *Grafički prikaz dokaza teorema 3.3*

3.2.6. Aksiom (O6)

(O6) Za dvije zadane točke P_1 i P_2 i dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta točku P_1 na pravac l_1 i točku P_2 na pravac l_2.



- Šesti origamijev aksiom se može poistovjetiti sa petim aksiomom. U ovom slučaju P_1 i l_1 su fokus i ravnalica jedne parabole, a P_2 i l_2 fokus i ravnalica druge parabole. Ovaj aksiom rješava sljedeći problem: Za dvije zadane parabole u ravnini naći njihovu zajedničku tangentu. (O6) je takav da se pomoću njega može rješiti proizvoljna jednadžba trećeg stupnja sa racionalnim koeficijentima.

  Zbog (O6) konstrukcije savijanjem papira se razlikuju od euklidskih konstrukcija. Sve prethodne operacije su izvodljive pomoću ravnala i šestara, no i pomoću savijanja papira. Konstrukcije ravnalom i šestarom mogu riješiti najviše jednadžbu drugog stupnja, a nemogu riješiti jednadžbu trećeg stupnja. Iz toga slijedi razlika između konstrukcija ravnalom i šestarom i konstrukcija savijanjem papira.

  Kako se pomoću šestog aksioma rješava kubna jednadžba navodim u sljedećem primjeru[5]:

  Pretpostavimo da su parabole p_1 i p_2 te njihova zajednička tangenta t zadane sljedećim jednadžbama:

$$p_1 : (y - n)^2 = 2a(x - m),$$

[5]Primjer preuzet iz [6], str. 11.

$$p_2 : x^2 = 2by,$$

$$t : y = cx + d.$$

Ukoliko dirалište parabole p_1 i tangente t označimo sa $P_1(x_1, y_1)$, tada se zadana jednadžba tangente može zapisati kao:

$$(y - n)(y_1 - n) = a(x - m) + a(x_1 - m),$$

što je ekvivalentno sljedećem zapisu

$$y = \frac{a}{y_1 - n}x + n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n}.$$

Dalje slijedi

$$c = \frac{a}{y_1 - n} \quad i \quad d = n + \frac{ax_1 - 2am}{y_1 - n},$$

tj.

$$y_1 = \frac{a + nc}{c} \quad i \quad x_1 = \frac{d - n}{c} + 2m.$$

Također, vrijedi

$$(y_1 - n)^2 = 2a(x_1 - m) \quad \Longrightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} = 2a\left(\frac{d - n}{c} + m\right)$$

$$\Longrightarrow a = 2c(d - n + cm). \tag{1}$$

Zatim, ako diralište parabole p_2 i tangente t označimo sa $P_2(x_2, y_2)$, tada se zadana jednadžba tangente može zapisati kao:

$$y = \frac{x_2}{b}x - y_2.$$

Odavde slijedi da je:

$$c = \frac{x_2}{b} \quad i \quad d = -y_2,$$

tj.

$$x_2 = bc \quad i \quad y_2 = -d.$$

Također vrijedi da je:

$$x_2^2 = 2by_2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$y_2 = \frac{x_2^2}{2b} = \frac{(bc)^2}{2b} = \frac{bc^2}{2}$$

iz čega slijedi da je

$$d = -\frac{bc^2}{2}.$$

Zamjenom u (1), dobivamo:

$$a = 2c\left(-\frac{bc^2}{2} - n + cm\right) \Longleftrightarrow$$

$$bc^3 - 2mc^2 + 2nc + a = 0 \Longleftrightarrow$$

$$c^3 - \frac{2m}{b}c^2 + \frac{2n}{b}c + \frac{a}{b} = 0. \tag{2}$$

Rješenje c od (2) je koeficijent pravca tražene zajedničke tangente.

Šesti aksiom origamija se svodi na rješavanje jednadžbe trećeg stupnja. Da bi riješili proizvoljnu kubnu jedndžbu pomoću (O6) pretpostavimo da je zadana jednadžba:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

i da je parametar b parabole p_2 jednak 1. Tada je:

$$p = -2m, \quad q = 2n, \quad r = a$$

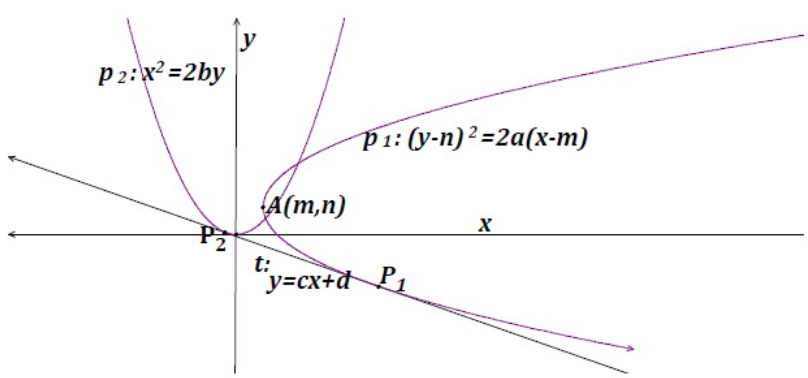
tj.

$$m = -\frac{p}{2}, \quad n = \frac{q}{2}, \quad a = r.$$

Treba se naći odgovarajuća točka $F_1(-\frac{p}{2}+\frac{r}{2}, \frac{q}{2})$ tj. fokus i pravac $l_1 : x = -\frac{p}{2}-\frac{r}{2}$ tj. ravnalicu parabole p_1. Analogno treba naći fokus $F_2(0, \frac{1}{2})$ i ravnalicu $l_2 : y = -\frac{1}{2}$ druge parabole p_2.

Kada je potrebno odrediti koordinate nekih točaka u kartezijevom koordinatnom sustavu, kao u ovom slučaju F_1 i F_2, ne misli se na crtanje koordinatnih osi i označavanje točaka pomoću ravnala u koordinatnom sustavu. Ideja rješavanja problema pomoću origamija je ta da se svaki korak riješi isključivo savijanjem papira.

Operacijama $F_1 \to l_1$ i $F_2 \to l_2$ dobijemo pravac čiji je koeficijent pravca rješenje zadane kubne jednadžbe.



Slika 3.10. *Prikaz rješenja kubne jednadžbe*

- Sada pretpostavimo da su u (O6) pravci m, n paralelni, njihove jednadžbe glase: $m : y = ax + b_1$ i $n : y = ax + b_2$. Zadana je i točka $P(x_1, y_1)$[6].

Teorem 3.4 *Neka su dani točka $P(x_1, y_1)$ i pravci m i n. Geometrijsko mjesto svih točaka $Q(x, y)$ s linijom savijanja $[P, Q, m, n]$ je kružnica sa središtem P i radijusom $d(m, n)$.*

[6]Oznake preuzet iz [8], str. 703.

Dokaz: Znamo da (O6) odgovara rješavanju kubne jednadžbe tako da je korjen te jednadžbe nagib pravca savijanja. Neka su jednadžbe pravaca m i n dane s $m : y = b_1$ i $n : y = b_2$. I pretpostavimo da je $Q(x, y)$ proizvoljna točka u R^2. Ako izračunamo jednadžbu ovog pravca savijanja $[P, Q, m, n]$ imamo:

$$y_2 = -\frac{x_2}{a} + \frac{(-y_1 - b_1)a^2 - 2x_1 a + (y_1 + b_1)}{-2a^2}$$

$$y_2 = -\frac{x_2}{a} + \frac{(-y_2 - b_2)a^2 - 2x_2 a + (y_2 + b_2)}{-2a^2}$$

A ako izjednačimo ta dva pravca:

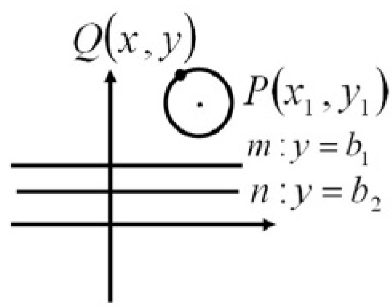
$$(y - y_1 + b_2 - b_1)a^2 + (2x - 2x_1)a + (-y + y_1 + b_2 - b_1) = 0.$$

To je kvadratna jednadžba i ona ima jedinstven korijen ako je diskriminanta jednadžbe jednaka 0. Tako dobijemo:

$$(x - x_1)^2 - ((b_2 - b_1) + (y - y_1))((b_2 - b_1) - (y - y_1)) = 0$$

$$\Longrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (b_2 - b_1)^2.$$

To je jednadžba kružnice sa središtem u P i radijusom $d(m, n)$. ■

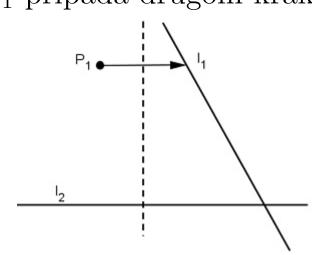


Slika 3.11. *Grafički prikaz dokaza teorema 3.4*

3.2.7. Aksiom (O7)

(O7) Za zadanu točku P_1 i dva pravca l_1 i l_2, postoji linija savijanja koja smješta točku P_1 na pravac l_1, a okomita je na pravac l_2.

- Hatorijev aksiom također se može izvesti pomoću ravnala i šestara. Linija savijanja f je visina jedakokračnog trokuta čija osnovica pripada pravcu l_2, jedan krak je na pravcu l_1, a točka P_1 pripada drugom kraku.



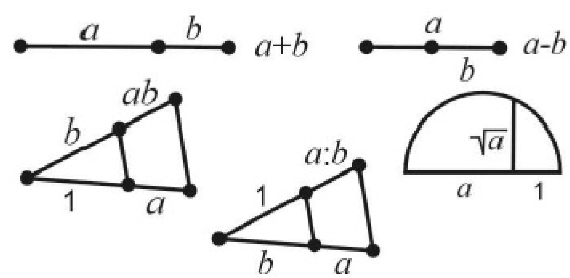
3.3. Konstrukcije origamijem vs. konstrukcije ravnalom i šestarom

Nakon objave Huzita-Hatorievih aksioma bilo je moguće napraviti neki formalniji opis geometrijskih konstrukcija izvodljivih savijanjem papira. Pokazalo se da takvih konstrukcija ima jako puno, tj. više nego konstrukcija ravnalom i šestarom.

U matematici se konstrukcije izvode ravnalom i šestarom. Pritom mislimo na jednobridno ravnalo i šestar kojim se oko svake točke može opisati kružnica s po volji zadanim polumjerom. Konstrukcije ravnalom i šestarom konačni su nizovi koraka oblika:

- konstrukcija pravca kroz zadane točke;
- konstrukcija kružnice sa zadanim središtem i radijusom.

Kao konstruirane točke uzimaju se sjecišta konstruiranih pravaca i kružnica. Tako dobivene konstrukcije su algebarski ekvivalentne rješavanju linearnih i kvadratnih jednadžbi. Ako su zadane dvije dužine, ravnalom i šestarom moguće je konstruirati dužine kojima je duljina jednaka njihovom zbroju, razlici, produktu ili kvocjentu te dužine kojima je duljina kvadratni korijen jedne od dužina. Nije moguće konstruirati kubne korijene duljina[7], što nas dovodi do pitanja mogućnosti rješivosti antičkih problema konstrukcijama ravnalom i šestarom, jer ako se neka konstrukcija ne može izvesti pomoću ravnala i šestara smatra se nerješivom. Iz toga slijedi da se konstrukcijama ravnalom i šestarom ne mogu riješiti antički problemi trisekcije kuta i duplikacije kocke, niti je moguće konstruirati pravilni sedmerokut, deveterokut ili deseterokut.



"Savijanje papira" očito se ne uklapa u gore navedeni sistem konstruiranja. Metoda rješavanja geometrijskih problema savijanjem papira nije u skladu sa pravilima koja se stoljećima poštuju u geometriji. U današnje vrijeme geometrija savijanja papira ima zakone, principe, definicije i teoreme. Danas je origami aksiomatski utemeljena disciplina i može se reći da je u tom smislu ravnopravna euklidskoj geometriji. Origami nije još jedno sredstvo za rješavanje matematičkih problema, nego matematički model u koji se ti problemi prenose i rješavaju. Ako priznamo postojanje jednog takvog modela ima smisla govoriti o konstrukcijama savijanjem papira i proučavati prednost origami konstrukcija nasuprot konstrukcijama ravnalom i šestarom.

Riješiti isti konstruktivni zadatak pomoću origamija znači na osnovu poznatih podataka, konstruirati traženu figuru, upotrebljavajući samo jedan list papira ili više listova papira ako se do figure dolazi putem modularnog origamija. Na prvi pogled, reklo bi se da origami ima i neka ograničenja u odnosu na ravnalo i šestar. Umjesto

[7] Mogu se konstruirati neki specijalni kubni korijeni, npr. dužine kojima je duljina kubni korijen od 1,8,...,preuzeto iz [4]

pravaca i kružnica, savijanjem papira primjenom Huzita-Hatori aksioma, kao rezultat dobivaju se samo pravci. Nasuprot tome uspostavilo se da nema ograničenja, nego su posljedice aksioma daleko veće od očekivanog. Pokazalo se da parabole ovdje imaju posebnu ulogu, jednako važnu kružnicama u geometriji.

U konstrukcijama koje se temelje na aksiomima origamija konstruirani pravci podudaraju se s linijama savijanja dobivenih primjenom nekog od aksioma. Točka je konstruirana na sjecištima konstruiranih pravaca. Lako se može dokazati da se origamijem mogu konstruirati sve geometrijske figure, koje se mogu konstruirati ravnalom i šestarom. Također treba napomenuti da origami uspješno rješava probleme duplikacije kocke i trisekcije kuta, te se origamijem mogu konstruirati i pravilni poligoni koji se ne mogu konstruirati konstrukcijama ravnalom i šestarom. Sustav origami aksioma također ima i svoja ograničenja. Origamijem nije moguće konstruirati pravilni jedanaesterokut ili petinu zadanog kuta.

Iz svega navedenoga da se zaključiti da svaka konstrukcija koja je izvediva ravnalom i šestarom, izvediva je i origamijem. Konstrukcije ravnalom i šestarom odgovaraju rješavanju algebarskih jednadžbi stupnja najviše 2, a konstrukcije origamijem odgovaraju rješavanju algebarskih jedndžbi stupnja najviše 4.

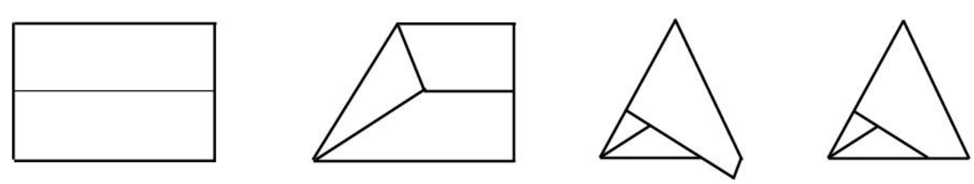
3.4. Origami konstrukcije

Kroz povijest ljudi su se susretali s različitim matematičkim problemima. Neke od njih su uspješno riješili, dok neki problemi nisu bili rješivi metodama koje su koristili. Na primjer duplikacija kocke i trisekcija kuta su poznati geometrijski problemi koje su još stari Grci pokušavali riješiti. U nastavku teksta navedeni su različiti primjeri origami konstrukcija kojima se uspješno dolazi do rješenja tog problema. Ovdje će biti prikazane još neke jednostavnije i primjenjive konstrukcije origamijem.

3.4.1. Jednakostranični trokut

Koristeći origami možemo na zanimljiv način konstruirati pravilne mnogokute. Kostrukcija jednakostraničnog trokuta vrlo je jednostavna i primjenjiva za nastavu matematike.

Za izradu jednakostraničnog trokuta treba nam papir A4 formata. Savijemo papir na pola po dužini, a zatim ga razmotamo. Savijemo gornji lijevi kut na liniju pregiba tako da nova linija savijanja prolazi donjim lijevim kutom. Zatim prema dolje savijemo gornji desni kut tako da rub papira leži duž pregiba. Dio koji viri pri dnu presavijemo u unutrašnjost trokuta.

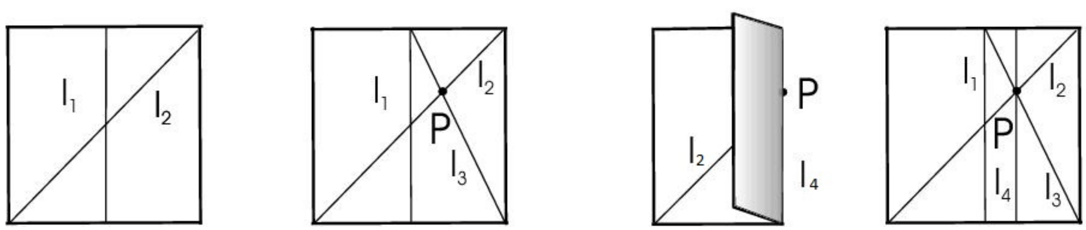


Slika 3.12. *Konstrukcija jednakostraničnog trokuta*

3.4.2. Dijeljenje kvadrata na trećine

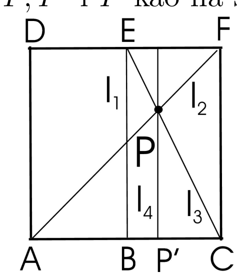
Pomoću origamija također se može kvadrat podijeliti na trećine. Ako se slijedi zadani postupak presavijanja papira na jednostavan način dolazi se do rješenja.

Za početak uzme se papir kvadratnog oblika. Presavijamo kvadrat na pola, a zatim i po dijagonali. Pregib koji se dobije savijanjem po dijagonali označimo s l_2. Taj pregib dijeli kvadrat na dva jednakokračna trokuta. Dok s l_1 označimo pregib koji smo dobili presavijanjem kvadrta na pola. Taj pregib l_1 dijeli kvadrat na dva pravokutnika. Zatim presavijamo po dijagonali jedan od ta dva pravokutnika i dobiveni pregib označavamo s l_3. Sjecište pregiba l_2 i l_3 označimo točkom P. Papir presavijemo tako da novi pregib prolazi točkom P, a da se rubovi papira preklapaju. Taj pregib označimo s l_4. Pregibom l_4 podijelili smo kvadrat na dva dijela. Veći dio predstavlja dvije trećine, a manji dio jednu trećinu kvadrata.



Slika 3.13. *Dijeljenje kvadrata na trećine*

Dokaz:
Slijedi dokaz da je kvadrat pregibom l_4 podijeljen na dvije trećine i jednu trećinu:
Neka su dane točke A, B, C, D, E, F, P' i P kao na sljedećoj slici.



Slika 3.14 *Dokaz dijeljenja kvadrata na trećine*

$\triangle BCE \sim \triangle P'CP$ iz čega slijedi:

$$|PP'| = 2|P'C|. \tag{3}$$

$\triangle ACF \sim \triangle APP'$ iz čega slijedi:

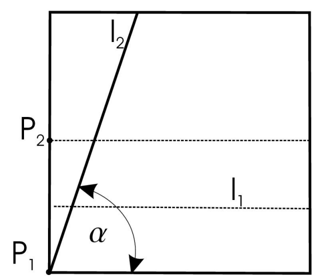
$$|PP'| = |AP'|. \tag{4}$$

Zatim iz relacija (3) i (4) zaključujemo: $|AP'| = \frac{2}{3}|AC|$ i $|P'C| = \frac{1}{3}|AC|$. ■

3.4.3. Trisekcija kuta origami konstrukcijama

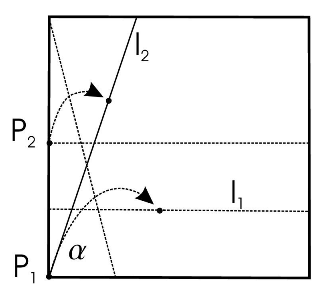
U 19. stoljeću dokazano je da se triskcija kuta ne može rješiti pomoću ravnala i šestara. Dokaz je algebarski i temelji se na činjenici da se kružnice i pravci opisuju linearnim i kvadratnim jednadžbama, dok se trisekcija kuta opisuje kubnom jednadžbom. No već je navedeno prije u radu zahvaljujući (O6) kubna jednadžba je rješiva i zbog toga može se riješiti problem trisekcije kuta. Origamijem dolazimo do rješenja koje je lako, razumljivo i jednostavno se izvodi.

Rješenje dobivamo na sljedeći način: Kut koji želimo podijeliti na tri jednaka dijela nalazi se u donjem lijevom kutu kvadratnog papira. Označimo taj kut s α. Pretpostavit ćemo u ovom slučaju da je kut α šiljasti kut, no međutim ova metoda se može jednostavno primjeniti i na tupe kutove. Napravimo dva paralelna jednako udaljena pregiba na dnu. Zatim donji pregib označimo s l_1, a drugi krak kuta kojeg dijelimo označimo s l_2. Točke P_1 i P_2 označimo kao na slici 3.15.



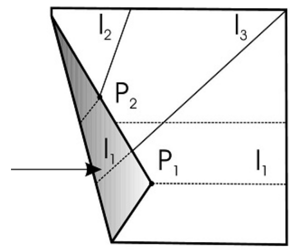
Slika 3.15. *Prvi korak*

Kao što je već navedeno pregib promatramo kao pravac. Stoga pregib l_1 gledamo kao pravac l_1. Presavijemo točku P_1 na pravac l_1 i točku P_2 na pravac l_2, zbog (O6) postoji takva linija savijanja.



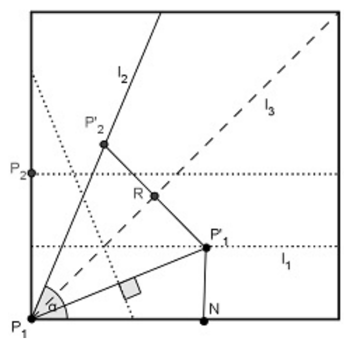
Slika 3.16. *Drugi korak*

U ovom položaju papir ponovo treba presaviti duž pregiba l_1 kao što je prikazano na slici 3.17 i zatim ga treba razmotati. Nakon toga poteza dobije se novi pregib kojeg označimo s l_3. Zatim treba proširiti pregib l_3 do donjeg lijevog ruba. Točka P_1 leži na pregibu l_3, a pregib l_3 dijeli kut α u omjeru 2 : 1.



Slika 3.17. *Treći korak*

Dokaz:
Idemo provjeriti jesmo li stvarno dobili traženu podjelu kuta. Uvedemo nekoliko dodatnih oznaka. Novu dobivenu liniju savijanja već smo označili s l_3, a pozicije na kojima su se nakon primjene (O6) našle točke P_1 i P_2 označimo sa P_1' i P_2'. Zatim sa N označimo nožište okomice iz P_1' na donji rub papira, a s R označimo polovište dužine $\overline{P_1'P_2'}$. Ako se prisjetimo početka udaljenost od P_1' do N jednaka je polovici udaljenosti od P_1 do P_2, dakle jednaka udaljenosti od P_1' do R. Sada se iz slike 3.18 lako dobije jednakost kutova $P_1'P_1N$, $P_1'P_1R$ i $P_2'P_1R$.



Slika 3.18. *Trisekcija kuta*

■

Gore opisan postupak trisekcije šiljastog kuta izveo je i dokazao Hisashi Abe. Također Jacques Justin rješava isti problem trisekcije kuta, ali on navodi i postupak trisekcije tupog kuta. Justin za početak konstrukcije ne koristi jedan kut papira kako je to naveo Abe, nego on konstrukciju izvodi i smješta na sredinu papira. Navest ćemo korak po korak trisekciju tupog kuta kako ju Justin izvodi.

1. Kut na kojem će biti izvršena trisekcija je kut ZOX, a na slici 3.19. označen je s θ.

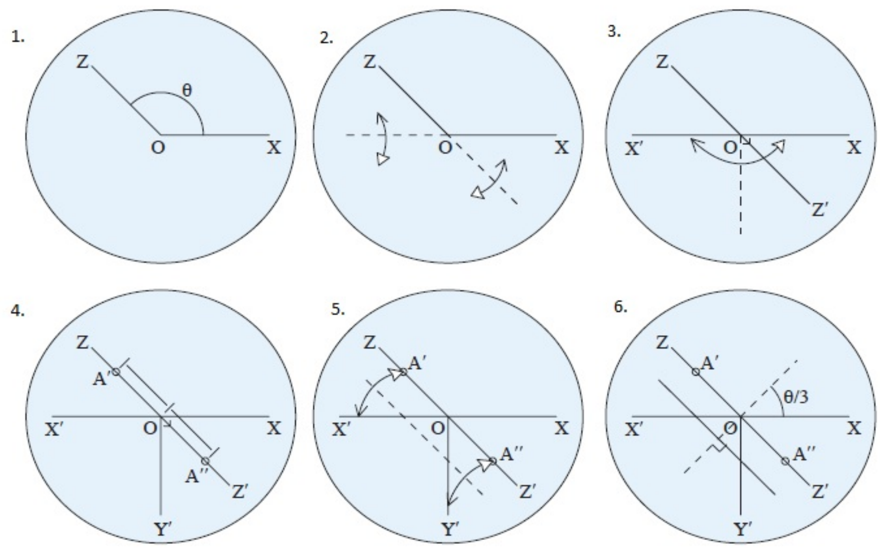
2. Produžiti linije ZO i XO.

3. Izvršiti savijanje papira tako da linija savijanja prolazi kroz točku O, a X smješta na X' .

4. Označiti točke A' i A'' na linijama ZO i $Z'O$, a pri tome paziti da točke budu na jednakim udaljenostima od O.

5. Za dvije zadane točke A' i A'' i dva polupravca $X'O$ i $Y'O$, napraviti liniju savijanja koja smješta točku A' na polupravac $X'O$ i točku A'' na polupravac $Y'O$.

6. Presaviti papir tako da se dobije linija savijanja koja je okomita na prethodnu liniju savijanja dobivenu u petom koraku i prolazi kroz točku O. Ta linija dijeli zadani kut na tri dijela. Na slici je označena prva trećina kuta sa $\frac{\theta}{3}$.

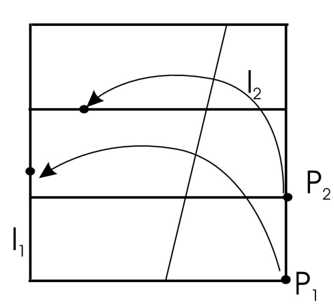


Slika 3.19. *Trisekcija tupog kuta prema Jacquesu Justinu*[8]

3.4.4. Duplikacija kocke origami konstrukcijama

Šesti aksiom na sličan način rješava i problem duplikacije kocke. Treba konstruirati kocku dvostruko većeg volumena od zadane kocke. Neka je zadana kocka duljine brida y. Rješavanjem jednadžbe $V_2 = 2V_1$ dobivamo da duljina brida nove kocke treba biti jednaka $x = y\sqrt[3]{2}$. Potrebno je konstruirati dužinu čija je duljina jednaka $\sqrt[3]{2}y$. Autor sljedeće origami konstrukcije je Peter Messer. Rješenje je objavio u jednom matematičkom časopisu 1986. godine.

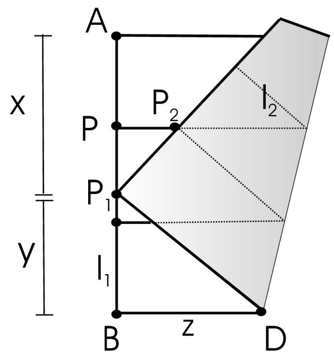
Konstrukcija origamijem kreće od kvadratnog papir koji se savijanjem podijeli na tri jednaka dijela. Označimo na papiru točke P_1 i P_2, te pravce l_1 i l_2 kao na slici 3.20.



Slika 3.20. *Prvi korak*

[8] Slika i oznake preuzete iz [9], str. 37.

Zatim točku P_1 savijanjem smjestimo na pravac l_1, a točku P_2 na pravac l_2. Točka P_1 djeli stranicu kvadrata na dvije dužine duljine x i y. Omjer duljina tih dužina je upravo traženi broj $x : y = \sqrt[3]{2}$.



Slika 3.21. *Drugi korak*

Dokaz:
Treba dokazati da je to zaista $\sqrt[3]{2}$. Neka su uz točke P_1 i P_2 zadane još i točke A,B,D i P kao što je prikazano na slici 3.21. Tada, neka su $|AB| = y + x$, $|AP_1| = x$, $|P_1B| = y$ i $|BD| = z$. Sa slike možemo vidjeti da je $|BD| + |P_1D| = x + y$ i pomoću pitagorina poučka u $\triangle P_1BD$ možemo izračunati da je $|P_1D| = \sqrt{y^2 + z^2}$. Iz tih podataka dobivamo:

$$z + \sqrt{y^2 + x^2} = x + y \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt{y^2 + x^2} = x + y - z \quad /^2 \Longleftrightarrow$$

$$y^2 + z^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y)z + z^2 \Longleftrightarrow$$

$$2(x + y)z = x^2 + 2xy / : 2(x + y) \Longleftrightarrow$$

$$z = \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)}. \tag{5}$$

Ukoliko pogledamo slike 3.20 i 3.21 vidimo da je

$$|P_1P_2| = |AP| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{y + x}{3} \quad i \quad |P_1P| = |AB| - |P_1B| - |AP| = y + x - y - \frac{y + x}{3} = \frac{2x - y}{3}.$$

$\triangle PP_1P_2$ je sličan $\triangle BDP_1$, zbog toga vrijedi: $\frac{|P_1D|}{|BD|} = \frac{|P_1P_2|}{|P_1P|}$ odnosno,

$$\frac{y + x}{z} - 1 = \frac{y + x}{2x - y} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{y + x}{z} = \frac{y + x + 2x - y}{2x - y} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{z}{y + x} = \frac{2x - y}{3x} \quad / \cdot y + x \Longleftrightarrow$$

$$z = \frac{2x^2 + xy - y^2}{3x}. \tag{6}$$

Konačno iz (5) i (6) slijedi:

$$\frac{x^2+2xy}{2(x+y)} = \frac{2x^2+xy-y^2}{3x} \Longleftrightarrow$$
$$3x^3+6x^2y = 4x^3+6x^2y-2y^3.$$

Zbog toga je $x^3 = 2y^3$, tj. $x = y\sqrt[3]{2}$. ■

3.5. Origami, algebra i analitička geometrija

Uzmimo da je list papira koji koristimo za konstrukcije dio prvog kvadranta ravnine. Jedan vrh papira uzmemo kao ishodište koordinatnog sustava, dok rubove papira koji se susreću u tom vrhu možemo uzeti kao koordinatne osi. Kao što je opće poznato, točka je potpuno određena s dvije koordinate, a pravac s dvije konstante. Npr. slobodnim članom i koeficijentom smjera ako gledamo eksplicitan oblik jednadžbe pravca. Dalje će biti navedeno kako se Huzitini aksiomi mogu opisati analitički[9]:

(O1) Ako je $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$, onda je moguće konstruirati pravac P_1P_2 kojemu je koeficijent smjera $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, a slobodan član $b = y_1 - ax_1$. Za slučaj $y_1 = y_2$ riječ je o pravcu $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

(O2) Ako je $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$ onda je moguće konstruirati pravac tj. simetralu dužine kojemu je koeficijent smjera $-\frac{(x_2-x_1)}{y_2-y_1}$, a slobodni član je $\frac{x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2}{2y_2-2y_1}$. Za slučaj $y_1 = y_2$ riječ je o pravcu $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

(O3) Zadani su (neparalelni) pravci $p_1 \equiv y = ax+b$ i $p_2 \equiv y = cx+d$. Konstrukcija je ekvivalentna određivanju njihova sjecišta S od kojeg je apscisa $x_0 = \frac{d-b}{a-c}$, a ordinata $y_0 = \frac{bc-ad}{c-a}$. Druga točka T traženog pravca polovište je dužine određene sjecištima bilo koje kružnice čije je središte S sa zadanim pravcima. Za dobivanje apscisa sjecišta kružnice s pravcima rješavaju se kvadratne jednadžbe

$$(x-x_0)^2 + (ax+b-y_0)^2 = 1 \quad i \quad (x-x_0)^2 + (cx+d-y_0)^2 = 1.$$

Općenito zapisani dobiveni izrazi za sjecišta i koordinate od točke T jako su složeni, dok se u konkretnom numeričkom slučaju koordinate lako izračunaju.

Ukoliko su zadani pravci paralelni, znači da su koeficijenti smjerova jednaki $a = c$, potrebno je odrediti polovište sjecišta neke okomice na oba pravca s njima te kroz polovište povući njima paralelan pravac. Dobivamo pravac čija jednadžba glasi $y = ax + (b+d)/2$.

(O4) Četvrti aksiom konstruira okomicu iz točke na pravac. Ako je $T = (x_1, y_1)$ točka i p pravac zadan jednadžbom $y = ax+b$, iz toga slijedi da (O4) konstruira pravac s jednadžbom $y = \frac{x_1-x}{a+y_1}$.

(O5) Ovaj aksiom predstavlja konstrukciju sjecišta pravca p jedndžbe oblika $y = ax+b$ s kružnicom kojoj je središte u $A = (x_0, y_0)$ radijusa $r = d(A, B)$. Rješavamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$y = ax + b$$

[9]Oznake preuzete iz [4], str. 37.-38.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Sustav se svede na rješavanje kvadratne jednadžbe oblika:

$$(1 - a^2)x^2 + (2ab - 2x_0 - 2ay_0)x + b^2 - r^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2by_0 = 0. \tag{7}$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe (7) je:

$$D = (2ab - 2x_0 - 2ay_0)^2 - 4(1 + a^2)(b^2 - r^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2by_0) =$$

$$= 4(r^2 - b^2 + a^2r^2 - a^2x_0^2 - y_0^2 - 2abx_0 + 2by_0 + 2ax_0y_0)$$

te ovisno o njenom predzanku dobivamo dva, jedno ili nijedno rješenje.

(O6) Kao što je već navedeno ranije u tekstu (O6) konstruira tangentu na dvije parabole, na taj način uspješno riješi kubnu jednadžbu. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je prva parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2px$. Dok je druga parabola u općem položaju s jednadžbom

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

s $B^2 = 4AC$. Uvjet da je pravac $y = kx + l$ tangenta na prvu parabolu je $p = 2kl$, a uvjet da je isti taj pravac tangenta na drugu parabolu uzimajući u obzir $l = \frac{p}{2k}$ je:

$$2C(E^2 - 4CF)k^3 + 4C(DE - 2BF)k^2 +$$

$$+2(CD^2 + 2pC^2D - B^2F - pBCE)k + 2pBCD - pB^2E = 0.$$

Taj uvjet se kao u izvodu uvjeta tangecijalnosti za parabolu $y^2 = 2px$ dobije rješavanjem sljedećeg sustava:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$y = kx + l$$

uz uvjet jedinstvenosti rješenja i koristeći relacije $B^2 = 4AC$ i $p = 2kl$. Dobiveni rezultat je kubna jednadžba za koeficijent smjera zajedničke tangente, što smo i trebali provjeriti.

3.6. Racionalane proporcije (razlomci)

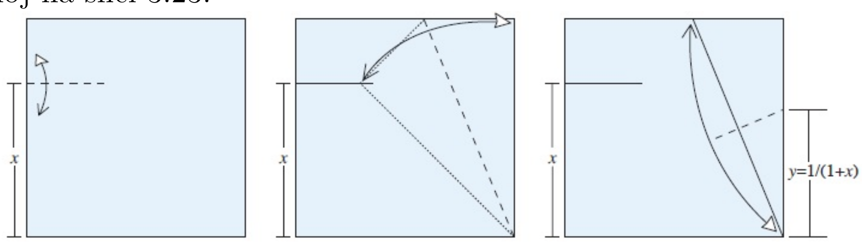
Origami je još uvijek disciplina u razvoju. Za slučajeve kad je potrebno odrediti položaj neke točke na papiru, razrađene su razne metode, ali sve se sastoje od dozvoljenih origami aksioma. Postoje opći algoritmi za konstruiranje proizvoljnog racionalnog broja, čak i za neke iracionalne. Brojne su i metode aproksimiranja brojevnih vrijednosti. Robert Lang u [9] navodi skoro sve poznate metode: Fujimotovu, Hagovu, Nomovu... U daljnjem tekstu bit će opisane pojedine metode.

Slika 3.22. *Robert J. Lang*

Učestalost potrebe da se četverokut dijeli u niz jednakih dijelova vodi nas do problema da se ta podjela dobije matematičkim konstruiranjem i do pitanja kako podijeliti četverokut u b jednakih dijelova. Općenito se možemo pitati kako podijeliti stranicu četverokuta u omjeru $\frac{a}{b}$, gdje su a i b cijeli brojevi, a b nije potencija od 2.

3.6.1. Fujimotova konstrukcija

Tehniku za dobivanje racionalnih proporcija (razlomaka) osmislio je japanski matematičar Shuzo Fujimoto, a kasnije ju je neovisno isprobala bostonska geometra Jeannine Mosely. Fujimotov algoritam se oslanja na elegantnu konstrukciju za uzimanje recipročne vrijednosti presavijanjem dobivenih proporcija, što se zasniva na konstrukciji prikazanoj na slici 3.23.



Slika 3.23. *Shematski prikaz Fujimotove konstrukcije recipročne vrijednosti*

Ako krenemo od veličine x koja je definirana savijanjem duž jedne stranice kvadrata, ovaj niz od dva savijanja rezultira recipročnom vrijednošću $(1 + x)$. Tako, na primjer, ako želite naći recipročnu vrijednost broja y, ako krenemo od proporcije $(y-1)$ označene uz lijevu stranu, Fujimotova konstrukcija će dati broj $\frac{1}{1+y-1} = \frac{1}{y}$.

Da bi se konstruirao razlomak $\frac{a}{b}$, definiramo da je x binarni razlomak (tj. binarni razlomak je racionalni razlomak čiji je nazivnik potencija broja 2)

$$x \equiv \frac{m}{p}.$$

Korištenjem Fujimotove konstrukcije, udaljenost y je

$$y = \frac{p}{m+p}.$$

Uzimamo da je p najveća potencija od 2 manja od nazivnika b, a da je $m = b - p$. Onda možemo reći

$$y = \frac{p}{b},$$

što nam daje željeni nazivnik b. Budući da je p potencija od 2 možemo koristiti binarni algoritam da smanjimo ovu proporciju za faktor (a/p) i dođemo do konačne proporcije:

$$z = \frac{a}{p} \cdot y = \frac{a}{p} \cdot \frac{p}{b} = \frac{a}{b}.$$

Cijeli algoritam je sažet ovdje:

1. Definiraj p kao najveću potenciju od 2 manju od b.
2. Definiraj da je $x = (b - p)/p$.
3. Konstruirajmo x koristeći binarni algoritam[10], proširujući konačno horizontalno presavijanje kao što je prikazano na slici 3.23.
4. Primjenimo Fujimotovu konstrukciju. To će nam dati proporciju $\frac{p}{b}$ duž desne strane papira, određenu oznaku na desnoj strani.
5. Smanjimo udaljenost pomoću $\frac{a}{p}$, opet koristeći binarni algoritam.

Fujimotov algoritam osigurava točnu tehniku savijanja za bilo koju racionalnu proporciju (razlomak), no niz slaganja u praksi može biti neprecizan. Na primjer, može tražiti da se izvrši trobridno savijanje koje se teško može izvesti uredno. Prilikom korištenja algoritma postoji nedostatak takav da se dobiju dodatna savijanja koja prolaze po sredini papira. Bilo bi puno zgodnije da do zadanih dijelova dođemo samo tako da na rubovima papira utisnemo oznake, a da unutrašnjost papira bude bez savinutih dijelova.

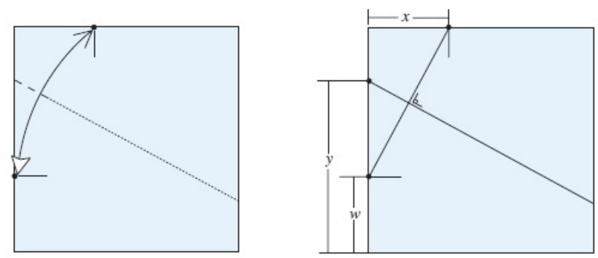
3.6.2. Nomova metoda

Ako krenemo od pretpostavke da su jedino dozvoljena savijanja i oznake uz sam rub papira, brzo se dođe do spoznaje da postoji samo nekoliko tipova savijanja kojima se naprave nove oznake na rubovima. Dva najjednostavnija su:

- Jednu oznaku na papiru možemo staviti na drugu oznaku na istom rubu. To radimo kad se služimo algoritmom binarne podjele; već znamo da ćemo tako doći do razlomka čiji je nazivnik potencija od 2.
- Možemo jednu oznaku na nekom rubu staviti na neku drugu oznaku na drugom rubu papira.

Ima i drugih mogućnosti, ali i u ove dvije operacije može se postići puno više nego što se misli. Pogledajmo slučaj kada dvije oznake spojimo na susjednim rubovima papira i napravimo nove oznake tamo gdje rezultirajuća linija savijanja dotiče rub, npr. kao što se vidi na slici 3.24.

[10] Objašnjen u [9], str. 6.



Slika 3.24. *Shematski prikaz Nomove konstrukcije*

Važnost ove operacije za origami konstrukcije je otkrio Masamichi Noma, pa ćemo zbog toga takvu konstrukciju zvati Nomova konstrukcija. Ako razradimo različite dimenzije (neke su prikazane na slici 3.24.) možemo pokazati da je

$$y = \frac{1 - w^2 + x^2}{1 - w},$$

tako da ako uzmemo

$$w = x = 1 - \frac{b}{2p},$$

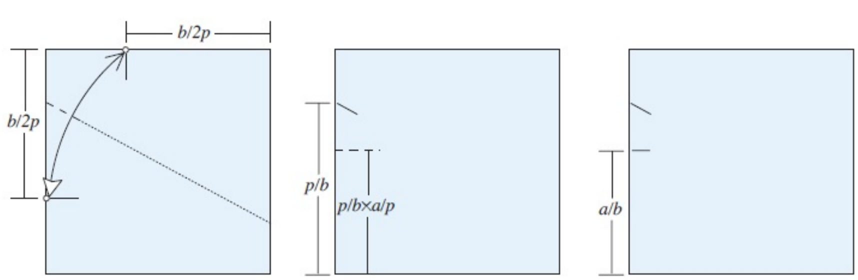
onda je točka y jednaka udaljenosti

$$y = \frac{p}{b}$$

iznad donjeg ruba kvadrata. To nas dovodi do sljedećeg algoritma:

1. Definiraj p kao najveću potenciju od 2 manju od b.
2. Konstruirajmo $w = \frac{b}{2p}$, $x = \frac{b}{2p}$ duž lijevog i gornjeg ruba papira.
3. Spojimo točku w i točku x, tako da napravimo pregib duž lijevog ruba u visini $y = \frac{p}{b}$.
4. Konstruirajmo $\frac{a}{p}$ koji se odnosi na taj segment.
5. Rezultat je $\frac{a}{b}$.

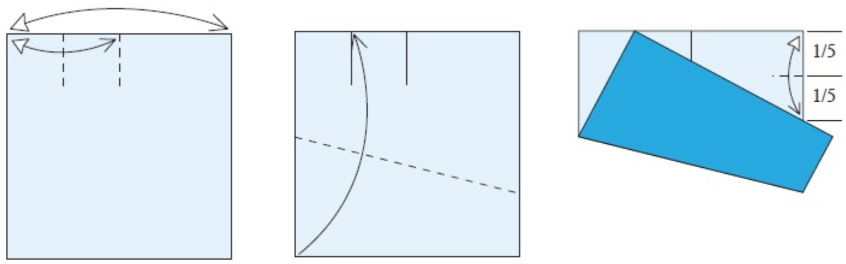
Puni algoritam je ilustriran na slici 3.25.



Slika 3.25. *Potpuni Nomov algoritam za bilo koji racionalni razlomak*

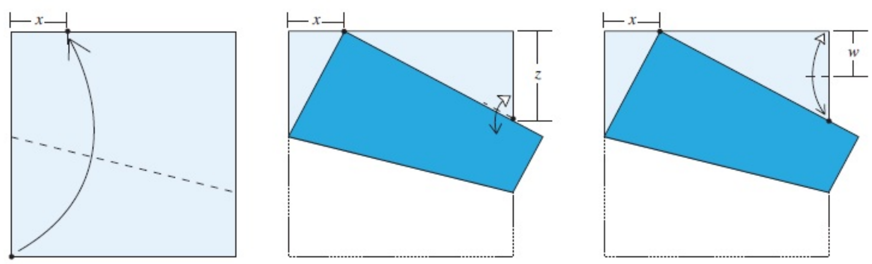
3.6.3. Hagova konstrukcija

Postoji još jedna konstrukcija koju je otkrio Kazuo Haga. Kod te konstrukcije se traži jedno dijagonalno savijanje, a može rezultirati racionalnim razlomcima. Konstrukcija je općenito poznata kao "Hagov teorem". Ova podjela je prikazana na slici 3.26.



Slika 3.26. *Podjela na petine koja se zasniva na Hagovom teoremu*

Poput prethodnih algoritama i ovdje postoje brojne varijacije Hagove konstrukcije za pronalaženje drugih racionalnih proporcija. Općenito prihvaćen oblik Hagove konstrukcije prikazan je na slici 3.27. Postoje dvije varijacije, tražena točka može biti na križanju dva ruba. U tom slučaju oznaku dobijemo presavijanjem duž jednog od rubova, kao na srednjem prikazu na slici 3.27. U drugom slučaju, savijamo gornji rub do presjeka.



Slika 3.27. *Shematski prikaz opće Hagove konstrukcije*

Ova konstrukcija dozvoljava neke posebno efikasne racionalne konstrukcije. Ako prvo savijanje napravimo na udaljenosti x duž gornjeg ruba, onda su dvije konstruirane udaljenosti na slici 3.27.

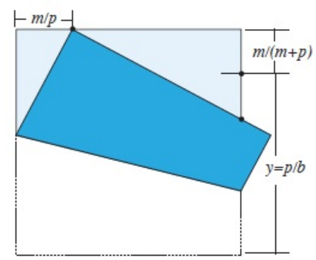
$$z = \frac{2x}{1+x}, \quad w = \frac{x}{1+x}.$$

To nas dovodi do sljedeće konstrukcije, tj. algoritma za dobivanje razlomka $\frac{a}{b}$.

1. Definirajmo da je p najveća potencija od 2 manja od b.
2. Definirajmo da je $m = p - b$.
3. Konstruirajmo točku $x = \frac{m}{p}$ duž gornjeg ruba papira koristeći binarnu metodu.
4. Savijmo donji lijevi ugao do gornjeg ruba.
5. Savijmo gornji desni ugao dolje do križanja dva ruba i raširimo papir, definirajući udaljenost $y = \frac{p}{b}$.

6. Smanjimo segment y pomoću razlomka $\frac{a}{p}$ koristeći binarnu metodu. Rezultat je traženi razlomak $\frac{a}{b}$.

Ove dimenzije prikazane su na slici 3.28.



Slika 3.28. *Odgovarajuće dimenzije za konstrukciju razlomka $\frac{a}{b}$ korištenjem Hagove konstrukcije*

Pomoću Hagove konstrukcije, dijagonalno savijanje ne mora biti naglašeno oštrom linijom savijanja, rub se mora pridržati samo dok se savija gornji desni ugao koji određuje udaljenost w.

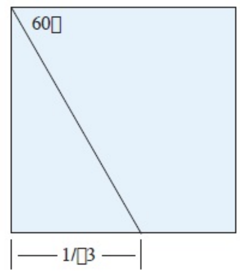
3.7. Iracionalne proporcije

3.7.1. Verižni razlomci

Brojne geometrijske konstrukcije mogu se dobiti pomoću origamija i niz proporcija može biti dobiveno na papiru pomoću origamija, ali postoje i druge proporcije za koje je točno savijanje ili nemoguće izvesti pomoću origamija kao na primjer $\frac{1}{\pi}$ ili, ako je i moguće daje rezultat na papiru prekriven s toliko pregiba i linija savijanja da je potpuno nepraktično za neko pravo savijanje. Sljedeće pitanje koje postavlja umjetnik origami vještine nije "kako mogu izvršiti savijanje točno" nego "kako mogu izvršiti savijanje do potrebne točnosti sa samo onoliko pregiba koliko je neophodno potrebno".

Idealno bi bilo da se nađe matematički točna metoda za savijanje udaljenosti, ali matematička točnost nije uvijek neophodno potrebna. U stvarnosti se greška manja od 0.5% stranice kvadrata rijetko primjećuje. Prema tome, ne treba tražiti točnu metodu za savijanje proporcija, dovoljno je naći metodu za savijanje bliske aproksimacije proporcije.

Pogledajmo jedan jednostavan primjer. Pretpostavimo da smo htjeli konstruirati kut od 60° unutar jednog ugla kvadrata, stvaranjem trokuta s kutovima $30-60-90$ s jedne strane. Jedan način da to učinimo je da nađemo točku gdje pregib na papiru dodiruje stranicu kvadrata, kao što se vidi na slici 3.29. Budući da su stranice tako dobivenog trokuta u omjeru $1:\sqrt{3}:2$, udaljenost od ugla do linije savijanja duž donje stranice je veličina $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots$ Jedan način konstruiranja kuta je da se nađe točka duž donje stranice gdje ju pravac dodiruje tj. da se nađe udaljenost $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ova udaljenost nije ni binarni razlomak, ni racionalni razlomak, tako da trenutno ne znamo točno rješenje.



Slika 3.29. *Jedan način konstruiranja kuta od* 60° *je označiti udaljenost* $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *duž jedne stranice kvadrata*

Najizravniji način da se presavije ova proporcija je primjenom sile tj. napišemo broj kao decimalan, npr.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735\ldots$$

Skratimo ga na tri decimale i napišemo decimalni broj u obliku razlomka:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735\ldots \approx 0.577 = \frac{577}{1000}.$$

Podijelimo papir na tisućinke i odbrojimo 577 tisućinki. Vidimo da je ovaj način nezgodan i nije elegantan. Bilo bi dobro kad bi mogli naći relativno mali razlomak koji još uvijek daje blisku aproksimaciju spomenutog broja. Do toga možemo doći pomoću verižnog razlomka. Verižni razlomak je način na koji se broj može prikazati u obliku razlomka unutar razlomka unutar razlomka itd.. Opći oblik verižnog razlomka je

$$r = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \ldots}}}$$

gdje je r traženi broj, a b_0, b_1 i b_2 su obično cijeli brojevi. Neki verižni razlomci imaju konačan broj članova, dok u drugim slučajevima niz razlomaka ide u beskonačnost. Bilo koji broj se može zapisati kao verižni. Postoji neograničen broj verižnih razlomaka koji mogu predstavljati isti broj. Ako tražimo da brojevi b_n budu cijeli brojevi, onda je verižni razlomak za dani broj jedinstven, što znači da postoji samo jedan niz brojki koje se mogu uključiti u razlomak da bi se dobio broj. Na primjer, razlomak $\frac{3}{16}$ se dobije verižnim razlomkom

$$\frac{3}{16} = 0 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}$$

koji je prilično jednostavan. S druge strane, razlomak $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se zadaje beskonačnim verižnim razlomkom

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots = 0 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

gdje je vidljivo da razlomci mogu ići u beskonačnost. Ako je broj r racionalan broj, tj. ako može biti izražen kao omjer dva cijela broja, kao što je slučaj $\frac{3}{16}$ onda postoji konačan broj članova u razlomku. Ako je broj iracionalan na primjer $\frac{1}{\sqrt{3}}$, niz nikada ne prestaje.

Prednost verižnog razlomka je sljedeća, čak i ako se verižni razlomak kreće u beskonačnost, ako otkinemo dno beskonačnog razlomka, dobijemo konačan razlomak koji je bliska aproksimacija originalnog broja. Što se više članova uključi, to je bolja naša racionalna aproksimacija.

Pomoću džepnog računala, lako je odrediti prvih nekoliko članova u nizu verižnog razlomka za bilo koji broj. Uzmimo matematičku konstantu $\pi = 3.1415926535\ldots$ kao primjer. Evo kako se može napraviti verižni razlomak:

1. Oduzmite cijeli broj i zapišite ga, tj. ono što ostane. Odvojite 3, a ostaje vam $0.14159\ldots$.
2. Uzmite recipročnu vrijednost ostatka: $\frac{1}{0.14159...} = 7.06251\ldots$.
3. Ponavljajte korake 1. i 2. na ostatku dok ostatak ne bude 0 ili dok ne potrošite rezoluciju svog kalkulatora.

Niz cijelih brojeva koje ste napisali obuhvaća niz razlomaka. Za broj $\pi = \{3, 7, 15, 1, 293, 10, 3, \ldots\}$ možemo pisati

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293 + \frac{1}{10 + \ldots}}}}}.$$

Ako otkinemo dno razlomka, dobijemo racionalan razlomak koji je aproksimacija iracionalnog broja π. Točnost aproksimacije ovisi o tome gdje otkinemo beskonačan razlomak. Prva četiri razlomka za π su sljedeća:

$$3 = 3.00$$

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.1428\ldots,$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3.141509\ldots,$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292\ldots,$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293}}}} = \frac{104.348}{33.215} = 3.14159265\ldots$$

Kao što se može vidjeti iz ovog primjera, što dalje nastavljamo nizati razlomke prije nego što ih odsječemo, to je točnija racionalna aproksimacija. Razlomci koje dobijemo na taj način poznati su kao konvergente verižnog razlomka. Matematičari će prepoznati $\frac{355}{113}$, poznatu aproksimaciju broja π, kao četvrtu konvergentu.

Postoji mala tablica koja se može konstruirati da bi se brzo vrednovale konvergente. Verižni razlomci se mogu zapisati u gornjem redu tablice kao što se vidi u tablici 3.2.

		3	7	15	1	293	...
0	1						
1	0						

Tablica 3.2. *Konvergente za verižni razlomak broja* π

Prva dva zapisa su $0, 1$ i $1, 0$. Zatim iduća dva reda ponavljamo te brojeve koristeći pravilo:
Broj u bilo kojoj ćeliji se dobiva tako da se produkt broja na vrhu stupca i broja koji se nalazi lijevo od ćelije koju tražimo uveća za broj koji se nalazi u drugoj ćeliji lijevo od njega.

Koristeći ovo pravilo, redovi u tablici se popunjavaju s lijeva na desno. Na primjer, broj koji treba doći ispod broja 3 dobiva se na sljedeći način. $3 \cdot 1 + 0 = 3$. Broj u ćeliji na isti način dobijemo primjenom navedenog pravila, a broj glasi $3 \cdot 0 + 1 = 1$. Ćelija ispod 7 se puni s $7 \cdot 3 + 1 = 22$, a ćelija ispod nje glasi $7 \cdot 1 + 0 = 7$, itd. Za verižni razlomak od π tablica se popunjava ovako:

		3	7	15	1	293	...
0	1	3	22	333	355	104.348	...
1	0	1	7	106	113	33.215	...

Tablica 3.3. *Konvergente za verižni razlomak broja* π

Kao što se može vidjeti uspoređivanje ove tabele s ranijim razlomcima, svaka konvergenta je jednostavno omjer broja u srednjem redu i broja ispod njega. Razlog zašto koristimo verižni razlomak kao racionalnu aproksimaciju potiče od jednostavnih svojstava konvergenti. Svaka konvergenta ima najmanji mogući stupanj točnosti. Svaka konvergenta je najbolja aproksimacija koja se može naći do druge konvergente, gdje najbolje znači najmanja moguća greška. Konvergente verižnog razlomka s malim nazivnicima mogu biti jako točne. Čak se i jednostavan razlomak $\frac{22}{7}$ razlikuje od broja π za samo 0.001.

Za origami konstrukcije koje nemaju točan niz savijanja, moguće je doći blizu točne proporcije koristeći verižne razlomke. O bilo kojem broju se radilo, sve što trebate je zapisati ga kao verižni razlomak, odrediti prvih 4 ili 5 konvergenti i odabrati najmanju konvergentu koja daje prihvatljivo malu grešku. Problem je time pojednostavljen, umjesto da smo spremni naći slijed savijanja za bilo koji broj, trebamo samo naći slijed savijanja za bilo koji racionalan razlomak, tj. omjer dva cijela broja. To se može dobiti već opisanim algoritmima savijanja.

4. Primjena origamija

Origami ima primjenu u matematici koja je već navedena u radu. No origami se primjenjuje i u drugim područjima kao što su elektrotehnika ili optika, a u zadnje vrijeme često se koristi kao pomoć u predavanju nastave matematike. Origami je također čest hobi i zabava. Mnogi ljudi stvarno uživaju u izrađivanju modela.

4.1. Primjena origamija u nastavi matematike

Vizualizacija u nastavi matematike ima veliku ulogu. Aksiome, teoreme i definicije je puno lakše razumjeti ako oni dobiju svoj vizualni prikaz. Tradicionalne konstrukcije ravnalom i šestarom sastavni su dio matematičkog obrazovanja. Te konstrukcije omogućavaju učenicima uvježbavanje i razvijanje deduktivnog načina zaključivanja. Treba obratiti pozornost da su takve konstrukcije mnogim učenicima komplicirane i teške, dok svakako treba paziti na učenike koji su matematički talentiraniji, jer je takva vrsta rada njima dosadna.

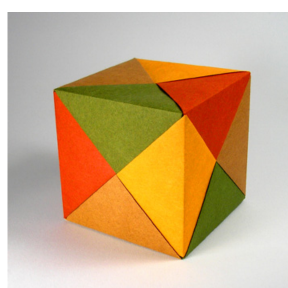
Ako se bave origamijem učenici dobivaju jači osjećaj da sami nešto rade. Postoji više provedivih konstrukcija koje su pogodnije za eksperimentiranje i mini projekte. Tako nam origami olakšava posao jer ga na jednostavan i lak način možemo primjeniti u nastavi matematike i voditi računa o vizualizaciji različitih geometrijskih pojmova. Pogodnosti i prednosti za korištenje origamija na školskom satu su mnogobrojne.

Slika 3.30. *Grupni rad učenika uz origami*

Ako sa učenicima izrađujemo različite origami modele oni na zanimljiv način usvajaju neke nove matematičke pojmove, uočavaju nove odnose u prostoru ili ravnini. Također origami je idealan za rad u grupama jer se uz timski rad ostvaruje i socijalizacija. Za savijanje papira koriste vlastite ruke koje prate određeni niz koraka i daju vidljive rezultate. Da bi rezultati bili uspješni, koraci se moraju poštivati na točno opisan način. Tako se razvija spretnost i preciznost u radu.

Slika 3.31. *Origami modeli*

Origamijem u nastavi matematike možemo prikazati trodimenzionalnu geometriju, centralnu i osnu simetriju, Platonova tijela i druge poliedre, okomitost, poligone, paralelnost, simetrale kuta, kutove, površine i volumene, pravce koji se sijeku, sukladnost i sličnost, presijecanje ravnina... Također možemo dokazati i neke teoreme.



Slika 3.32. *Origami kocka*

Materijal koji se koristi dostupan je u gotovo svim školama. Ono što je potrebno za rad je jedan ili više listova papira. Nisu potrebne ni škare ni ljepilo, samo papir. Pomoću origamija se može osmisliti zanimljiv i poučan sat matematike koji će pobuditi interes za daljnja samostalna istraživanja učenika.

4.2. Istraživanja u nastavi: "Slaganje papira kao uspješno sredstvo poučavanja"

Snalaženje u prostoru je važna vještina koju djeca trebaju usvajati i razviti dok uče matematiku. Origami je metoda[11] kojom se ta sposobnost može razviti istovremeno

[11] Preuzeto iz [2],[3],[10]

s usvajanjem matematičkih sadržaja, motivacijom i boljim pristupom matematici kao predmetu. Origami se može koristiti na satu geometrije i poboljšati učeničko matematičko znanje i znanje o prostoru i prostornosti. Rezultati istraživanja i mišljenja ispitanika o primjenjenoj metodi idu u prilog ovom načinu rada. Ovdje se može naučiti i kako osmisliti vlastiti sat primjenom origami-matematike.

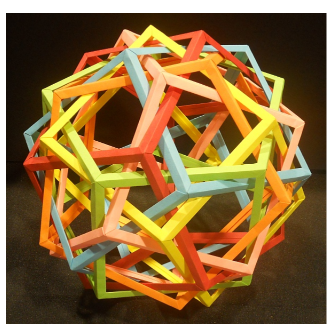
Origami nije nepoznat u praksi nastave matematike. Postoji cijeli niz knjiga i časopisa koji predlažu i podržavaju njegovu primjenu u razredu. Svi se slažu da je umjetnost ili vještina savijanja papira uspješno matematičko sredstvo poučavanja. Informacije koje se mogu prikupiti iz literature neće samo poticati na korištenje te metode, nego će rezultati pokazati kako učitelji matematike mogu sami osmisliti primjenu ovog pristupa praktičnom radu na satu.

4.2.1. Važnost prostorne vizualizacije

Prostornu vizualizaciju definiramo kao sposobnost izrade i mentalne konstrukcije dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih predmeta i poimanja predmeta iz raznih perspektiva. Budući da je to integralni dio nastave matematike, potrebno je naglasiti da bi djeca trebala dobiti priliku da istražuju i razvijaju svoje razumijevanje i poimanje oblika i struktura kroz praktične aktivnosti pogodne za unapređenje tih znanja i vještina.

Iz svakodnevne perspektive, prostorne vještine mogu biti dobre za djecu i mogu im pomagati da se snađu na karti, da nacrtaju tlocrt, proizvedu neku umjetninu ili da odrede rutu puotvanja. Osim toga vidimo da učenici razvijaju vještinu logičkog mišljenja i zaključivanja i nauče opisati svoj okoliš.

Primjećeno je da učenici osnovnih i srednjih škola u Americi pokazuju nedostatak osnovnih znanja o geometriji i nedostatak vještina za geometrijsko rješavanje problema. Vidljiv je napor da se to popravi unazad nekoliko godina, ali je vidljiva i potreba da se na tim sposobnostima inzistira još više. Puno toga treba još napraviti da bi se geometrijska znanja pravilno koristila. Geometrija se opisuje kao učenje o tome kako razmišljati i primjeniti smišljeno u praksi.



Slika 3.33. *Origami model*

Djeca trebaju proučavati geometrijske oblike i predmete iz prve ruke, vlastitim iskustvom, treba im se dozvoliti da razviju vlastito razumijevanje geometrijskih odnosa. Bilo da se radi o izradi trodimenzionalnih modela, crtanju dvodimenzionalnih oblika ili o rukovanju s gotovim modelima, korištenjem ovih vještina dolazimo do obogaćivanja prostornih sposobnosti djece. Posebno se potiće one aktivnosti kod kojih djeca pomoću dvodimenzionalnih oblika dolaze do trodimenzionalnih oblika ili one gdje se gotove trodimenzionalne oblike rastavlja na dvodimenzionalne ekvivalente. Ovakvim aktivnostima se povećava sposobnost prostornog poimanja i snalaženja.

Zato možemo reći da postoji jasna veza između spomenutog i umjetnost savijanja papira. Tu se slažu svi matematičari i preporučuju tu vještinu kao pogodno nastavno sredstvo poučavanja. Origami, po svojoj prirodi, navodi učenike da slijede upute i da u procesu konstriranja dvodimenzionalni četverokut pretvore u čitav niz trodimenzionalnih oblika i figura.

4.2.2. Istraživanje uticaja origamija na grupu učenika

Da bi se utvrdilo kako poduka origamija utiče na prostornu vizualizaciju učenika i učenje geometrije provedeno je istraživanje među učenicima i učiteljima srednjih škola.

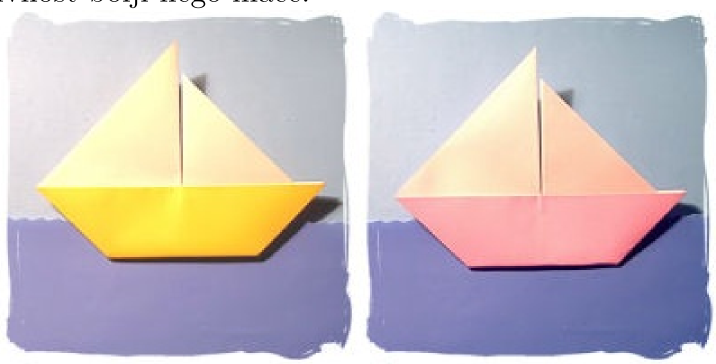
Jedna grupa učenika je učila geometriju na normalan, uobičajen način, a druga grupa je imala istu poduku obogaćenu origami-matematikom. Istraživanje je uključilo vremenski termin od mjesec dana tijekom kojeg je redovito origami tehnika bila dio učiteljevih tehnika podučavanja. Da bi se utvrdili rezultati vršeno je testiranje prije početka primjene origamija i poslije cijelog procesa, a uključena su prostorna vizualizacija i matematička postignuća.

Slika 3.34. *Grupni rad*

Rezultati istraživanja su pokazali da su obje skupine podjednako dobro usvojile matematičke sposobnosti. Što se tiče prostornog snalaženja došlo se do zaključka da su rezultati muških ispitanika uključenih u origami poduku znatno bolji od onih koji su učili geometriju bez te poduke. Kod ženskih članova grupe rezultati su bili bolji u skupini s tradicionalnom obradom geometrije. Nije točno utvrđeno zašto se to dogodilo, ali se pretpostavlja da su muški ispitanici bili bolje pripremljeni za alate kojima je mjerenje uspješnosti vršeno (video igrice izvan školskih aktivnosti).

Čak ako se uzme u obzir ova razlika, može se reći da su oba roda imala koristi od drugačijeg pristupa radu i možemo tvrditi da je origami dobra dodatna metoda poučavanja. Sat origami-matematike treba biti smjesa matematičke terminologije i koraka koje trebamo prijeći da bi kao rezultat dobili gotovi origami model.

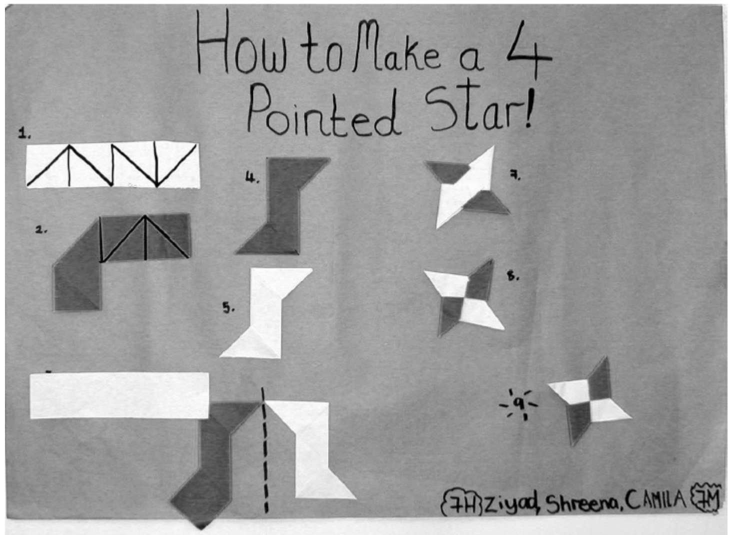
Model jedrenjaka - Izrada modela jedrenjaka može potkrijepiti ovu tvrdnju. Tijekom rada koristimo matematičke pojmove: oblik, ploha, paralelan i okomit, prostorni odnosi. Koristimo i matematički riječnik: paralelni pravci, pravokutan trokut, okomiti pravci, ploha, kutovi - šiljasti, tupi i pravi, četverokut i trapezoid. U radu se postavljaju pitanja i traže odgovori na njih, npr. Koje oblike dobijem kada presavijemo papir? Dijalog između učitelja i učenika treba popratiti svaki korak u radu. Primjećeno je da su suradnja i aktivnost bolji nego inače.



Slika 3.35. *Model jedrenjaka*

Ono na što učitelj treba paziti je da odabere pravi izazov za svoje učenike, u skladu s njihovim mogućnostima. Izvori za to su brojne knjige, koje nude upute i slikovnu podršku. I na internetu se nude web stranice posvećene origamiju. Dok se bavi biranjem pravog izazova učitelj treba imati na umu što želi na satu postići. Dobro je ovu tehniku uključiti i onda kada samo želimo ponoviti matematičku terminologiju. Za nagradu će na kraju takvog sata uz ponavljanje učenik dobiti izrađeni predmet od papira.

U pravilu se može naći prikladan origami posao za bilo koju geometrijsku temu. Prije nego što nešto zatraži od svojih učenika, svaki učitelj mora sam složiti traženi origami. Usput može razmisliti koji će vokabular trebati koristiti u radu s učenicima. On svakako treba biti u skladu s ilustriranim uputama za rad koje će podijeliti učenicima. Dok slaže model učitelj treba smisliti pitanja koja će postaviti učenicima i zapisati ih, ali i odgovore koje od učenika očekuje.



Slika 3.36. *Plakat na temu origamija*

Događa se da se ljudi često boje raditi s origamijem. Misle da je to komplicirano i zahtjevno, u pravilu se to događa onda kada je prvi origami posao bio pretežak za njih. Zato je potrebno krenuti od sasvim laganih modela prema težim predmetima. Nakon uspješnog početka svi utvrde da im vještina savijanja ide puno bolje od očekivanog.

Kada učitelj donosi zahtjev da se radi origamijem na satu, poželjno je da učenike ukratko upozna s poviješću ove umjetnosti. Istovremeno može pojasniti i potrebnu origami terminologiju i pred učenicima sam nešto složiti uz objašnjavanje koraka. To bi trebalo biti dosta da pobudi učeničku radoznalost i da ih motivira za rad. Možda još samo pokazati neke gotove radove prethodnih generacija i pohvaliti najurednije i najzanimljivije.

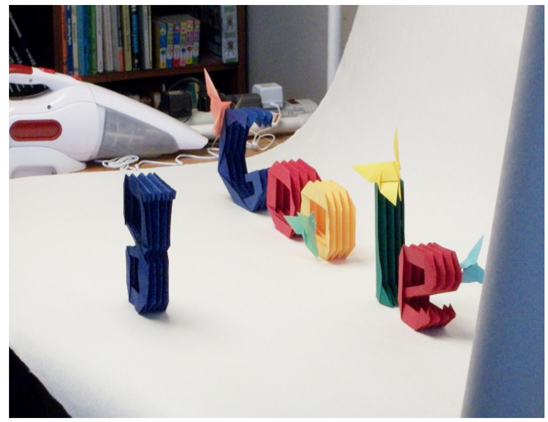
Zanimljivo je čuti što su učenici osjećali dok su se bavili origamijem na satu. Njihove izjave su pozitivne, tvrdili su da je ovo iskustvo bilo ugodno i zabavno, da ih je pogled na tuđi rad motivirao da se trude i naprave bolje. Govorili su i da je geometrija stvarno razumljiva i jednostavna, ako se primjeni naučeno. Bilo je i mišljenja da će im ovo iskustvo pomoći i u drugim područjima matematike. Jednom riječju su opisali svoj rad na ovaj način ovako: uzbudljivo, korisno, zanimljivo, veselo, lagano, dobar posao. . . Na kraju su bili česti komentari da se čude koliko su uspjeli naučiti, a nije im bilo dosadno.

Matematika je oživjela u dječijim umovima, a učitelj je dobio priliku promatrati učenike pri radu i vidjeti što ih pokreće, što ih zanima i što im predstavlja izazov, koliko su uporni i kreativni. Preporuka je, uključimo origami u nastavu matematike. Bit ćemo višestruko nagrađeni.

4.3. Origami u svijetu

Origami postaje sve popularniji u svijetu. Objavljenih knjiga, otvorenih stranica na internetu s tematikom origamija i osnovanih organizacija ima sve više.

Robert J. Lang, američki fizičar i jedan od vodećih majstora i teoretičara origamija u svijetu, autor knjige "Origami Design Secrets", kreirao je origami Google Doodle.



Google Doodle je 14. ožujka 2012. odao počast Akiri Yoshizawi, ocu modernog origamija, na njegov 101. rođendan. Doodle je prikazao Google logo, savijen od origamija (svako slovo savijeno od jednog nerezanog lista papira), ukrašenog origami leptirima, savijenim prema jednom od najslavnijih i najreprezentativnijih Yoshizawinih dizajna.

Slika 3.37. *Google*

Literatura

[1] R. Beech, *80 best-ever projects origami*, Hermes House 2009.

[2] N. Boakes, *Origami-mathematics lessones: Paper folding as a teaching tool*, Mathitudes 1, 1 (2008), 1-9.

[3] N. J. Boakes, *Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students*, RMLE Online, Volume 32, 7 (2009), 1-12.

[4] F. M. Brückler, *Konstrukcije origamijem*, Poučak, 33 (2008), 26-39.

[5] B. A. Cipra, *In the Fold: Origami Meets Mathematics*, SIAM News, Volume 34, Number 8.

[6] J. Jonović, *Origami i geometrijske konstrukcije*, Seminarski rad, Matematički fakultet, Sveučilište u Beogradu

[7] LJ. Jukić, *Matematika i origami*, Osječki matematički list, 7 (2007), 23-32.

[8] H. R. Khademzadeh and H. Mazaheri, *Some results to the Huzita axioms*, International Mathematical Forum, 2, 14 (2007), 699-704.

[9] R. J. Lang, *Origami and Geometric Constructions*, Preprint, 1996-2010.

[10] S. Pope, *The use of origami in the teaching of geometry*, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 22, 3 (2002), 67-73.

[11] S. T. Row, *Geometric Exercise in Paper Folding*, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1901.

[12] `http://brilliantorigami.com`, 31.3.2012.

[13] `http://www.origami-resource-center.com`, 31.3.2012.

[14] `http://www.langorigami.com`, 1.4.2012.

5. Sažetak

Konstrukcije origamijem svojom jednostavnom primjenom u nastavi predstavljaju izazov, kako za učenike, tako i za učitelje. Učenicima odgovara novi način rada, motivira ih da ulažu više napora i da se međusobno natječu u preciznosti i brzini izrade modela. Bilo bi dobro da na kraju sata mogu zadržati predmet koji su savili (ipak je to njihovih ruku dijelo). Učitelj koji je origami uključio u nastavu ima priliku pratiti svoje učenike tijekom rada i vidjeti što ih pokreće i zanima. Može biti zadovoljan jer je primjenom konstrukcija obogatio svoj sat i bio kreativan. Jasno je zašto origami dobiva važno mjesto u matematici.

Huzitini aksiomi, trisekcija kuta, duplikacija kocke …sve to postaje matematička svakodnevica. Možda još nismo svjesni koristi koju nam ova tema donosi, ali origami sigurno i dokazano može riješiti brojna matematička pitanja.

6. Summary

Origami constructions with its simple use in the class represents the challeng for both, pupils and the teachers at the same time. Pupils praise new teaching technica and new way of work. They feel motivated and try to be successful in constructing models. They compete in speed and efficiency with each other. It would be preferable for them to keep the model at the end of the class (they have done it with their own hands). The teacher, who made origami part of his lecture, has the opportunity to watch his students carefully while they are working. It is good chance for him or her to see what moves them to go on with work, what and how they feel while working. The teacher can be satisfied because his class is enriched and creative.

It is clear now why origami finds important place in the mathematics. Huzita's axioms, trisection of the angle, cube duplication and other constructions become mathematical reality. We are not aware of all the possibilities, but origami can solve many mathematical questions.

7. Životopis

Marija Tokić rođena je 6. listopada 1987. g. u Đakovu.

Osnovnu školu Ivana Gorana Kovačića u Đakovu završava 2001. g. i upisuje Opću gimnaziju A. G. Matoša, također u Đakovu. Nakon završene srednje škole, 2006. g. upisuje sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.