Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Tomašević

Dokazi bez riječi

Diplomski rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Tomašević

Dokazi bez riječi

Diplomski rad

MENTOR:
doc. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2015.

Sadržaj

1 Uvod

Već na prvi spomen naslova ovog diplomskog rada jasno nam je da će ova tema biti usko vezana uz vizualizaciju jer su dokazi bez riječi dani slikom.

Znamo da se već od prvih razreda škole vizualizacija primjenjuje u obrazovnom procesu učenja i shvaćanja u bilo kojem školskom predmetu pa tako i u matematici. Kao najjednostavniji primjer toga može nam poslužiti npr. zbrajanje pomoću jabuka, novca i slično.

Zato ćemo na početku reći nešto o vizualnom procesu i vizualizaciji u matematici. Nakon toga razmotrit ćemo što je to dokaz bez riječi te primjere koji se navode u analiziranim udžbenicima i još neke dodatne primjere koji se također mogu koristiti u nastavi matematike.

Reći ćemo i nešto o tome koji su problemi kod ovakve vrste dokaza te kako korištenjem tehnologije pomoći učenicima da bolje razumiju i vizualiziraju matematičke probleme.

2 Vizualizacija

Značenje same riječi "vizualizacija" znači učiniti nešto vidljivim. To je sposobnost da se nešto predoči i zamisli u slikama. Na temelju ne-vizualnih podataka dolazi do stvaranja slike u našem mozgu. To znači da se podaci iz nečega što je apstraktno ili nije odmah vidljivo pretaču u vidljivo.

Iz toga možemo zaključiti da iz vizualizacije proizlazi dijagram, skica, crtež itd. što nije uvijek lagano vizualizirati. Rezultat vizualizacije mora biti točan i čitljiv. Najvažniji kriterij vizualizacije je taj da iz vizualizacije moramo steći neko novo znanje koje povezujemo sa dosadašnjim znanjem kako bi vizualizacija imala smisla.

Vizualizacija je sposobnost, proces i produkt kreativnosti, interpretacija, razmatranje o slikama, skicama, crtežima, dijagramima koji su u našem umu, na papiru ili prikazani na računalu. Vizualizacijom dolazimo do razvijanja novih ideja koristeći stara znanja.

Možemo reći da je vizualizacija vještina mentalnog programiranja kojom postižemo svoje ciljeve kao što je naprimjer rješavanje matematičkog problema. Imati sposobnost vizualizacije znači imati moć u svome umu zamisliti sliku koja nam pomaže da dođemo do rješenja problema.
Vizualizacija ima širok spektar korištenja za primjerice bolje učenje, u borbi protiv stresa, izlječenje,odvikavanje od pušenja...

Vještina vizualizacije je ispreplitanje vrlina kao što su kreativnost, maštovitost, odlučnost, upornost, dosljednost, marljivost. Nije svaka vizualizacija učinkovita stoga je potrebno prakticirati i uvježbavati vizualizaciju kako bi ona prešla u vještinu.

Kada je Einstein rješavao neke probleme, uvijek je nastojao srž problema promatrati na što više načina, uključujući time slike i dijagrame. Vizualizirao je rješenja te je vjerovao da brojevi i riječi kao takvi nisu imali važnu ulogu u procesu njegovog razmišljanja i stvaralaštva. Vizualizacije su te koje su ga dovele do njegovog cilja.

Koliki je značaj vizualizacije potvrdio je i Nikola Tesla koji je rekao: "Mogu zahvaliti vizualizaciji za sve što sam stvorio. Događaji iz mog života i moja otkrića pred mojim očima su stvarni, vidljivi kao i svaka pojava i predmet. U mladosti sam se toga plašio ne znajući što je to zapravo, ali kasnije sam tu moć primio kao dar i bogatstvo. Njegovao sam ga i ljubomorno čuvao. Vizualizacijom sam na većini izuma vršio i ispravke, a onda ih, tako završene, pravio. Njome rješavam i komplicirane matematičke jednadžbe, a da ne ispisujem brojeve."

2.1 Značaj vizualizacije u nastavi matematike

Vizualizacija u matematici ima dugu tradiciju i lista poznatih matematičara koji su koristili i koji su zagovarali korištenje vizualizacije u matematici je duga.

Jedan istaknuti primjer je zasigurno slijepi matematičar Euler čije ograničenje nije imalo nikakvog utjecaja na njegovu kreativnu snagu i moć vizualizacije. Tijekom godina svog sljepila napisao je više od 355 radova zbog svoje vizualne moći i dakako, njegove fenomenalne memorije.

Pri učenju i shvaćanju matematike vizualizacija može biti moćan alat za istraživanje matematičkih problema i može dati jasnije značenje matematičkim pojmovima i vezama između njih. Vizualizacija smanjuje kompleksnost kada se nosimo sa velikom količinom informacija.

Sljedeća priča mogla bi prenijeti draž vizualizacije u nastavi matematike mnogo bolje nego mnoge analize. Glavnu ulogu u ovoj priči ima profesor Norbert, ali zasigurno će svaki čovjek koji je imao doticaj s matematikom moći priču poistovjetiti na više od jednog njemu poznatog profesora ili prijatelja. Norbert je držao predavanje na jednom poznatom sveučilištu pred mnogobrojnom publikom te je bio zadubljen u rješavanje kompliciranog dokaza na ploči. Ploča je bila gotovo puna formula i on je sigurno išao prema rješenju. Iznenada je zastao jer se izgubio među mnoštvom formula. Za promatrače se to činilo nevjerojatnim kako se profesor mogao zabuniti. Prošlo je nekoliko minuta dok se nije učinilo da profesor zna što radi. Krenuo je prema kutu ploče koji je ostao neispisan i počeo crtati sliku. Nije rekao ni riječi. Napokon je slegnuo ramenima od olakšanja, obrisao crtež koji je napravio i vratio se do mjesta gdje je zastao sa dokazivanjem te je dokaz sa lakoćom završio do kraja.

Matematički koncepti, ideje, metode, imaju veliko bogatstvo i povezanost sa vizualizacijom na mnogo različitih načina. Upotreba vizualnih odnosa pri rješavanju problema je vrlo korisna.

Osnove matematike kao što su naprimjer udaljenost ili operacije sa brojevima rodile su se iz konkretnih i vidljivih situacija. Svaki stručnjak je svjestan kako je korisno povezati konkretne slučajeve kada proučava odgovarajuće apstraktne objekte. Ista stvar se događa i sa ostalim apstraktnim dijelovima matematike.

Ovaj način rada, sa posebnim naglaskom na moguće konkretne prikaze objekata kojima pojedinac manipulira kako bi imao što djelotvorniji pristup apstraktnijim vezama kojima pojedinac mora upravljati je ono što nazivamo matematička vizualizacija.

Činjenica da je vizualizacija važan aspekt u matematici i nastavi matematike je sasvim nešto prirodno ako uzmemo u obzir značenje matematičke aktivnosti i strukturu ljudskog mozga. Kroz matematičke aktivnosti učenici pokušavaju istražiti različite realne situacije koje onda prepoznajemo kao matematičke probleme koje rješavamo.

Vizualizacija se pokazuje korisnom kod otkrivanja odnosa među matematičkim objektima i naravno u komunikacijskom procesu koji pogoduje matematičkoj aktivnosti.

Ljudska percepcija je jako vizualna i stoga nije uopće iznenađujuće što je vizualna potpora umiješana u matematičke zadatke, ne samo geometrijskog tipa, nego je umiješana i u druga područja matematike gdje to baš nije tako očito.

Čak i u matematičkim aktivnostima koji su apstraktne našem mozgu, matematičari koriste simbole, vizualne dijagrame i mnoge druge mentalne procese koji uključuju vizualizaciju. Povezivanje vizualizacije sa misaonim procesima rezultira otkrivanjem novih spoznaja među matematičkim objektima u komunikacijskom procesu što je dobro za matematičku aktivnost.

Zbog toga je učenike potrebno upoznati sa procesom vizualizacije u učenju i podučavanju matematike te postepeno navikavati mozak učenika na takvo razmišljanje. To nije lak zadatak nego složen proces koji uključuje kontinuiranu vježbu i praksu kroz mnogo godina. Što je naravno iskustveni proces za nastavnika.

Naravno, proces vizualizacije je vrijedno provesti samo ako je moguće stvari lakše približiti učenicima, učiniti da im proces učenja bude prirodniji, lakši, zanimljiviji, prihvatljiviji itd. Istina je da slika vrijedi 1000 riječi, ali ono što je bitno jest da slika bude shvaćena ili "dekodirana" na pravi način i da onaj tko ju proučava razumije na pravi način, inače slika ne vrijedi ništa.

Međutim, pojavljuju se ograničenja, poteškoće pa čak i opiranje učenika da koriste vizualizaciju pri rješavanju problema. Dok neki učenici koriste vizualizaciju kako bi modificirali dobiven zadatak u vizualni. Vizualni procesi rješavanja zadataka, koji nisu uvijek sigurne rutine jer nemaju "šablonu", pokazale su se kognitivno mnogo zahtjevnije od analitičkih tehnika rješavanja.

Pitanja koja nam se nameću:
Kako se učenici nose s problemom vizualne prirode?
Koji je stupanj vizualne percepcije učenika?
Koliko učenici koriste vizualizaciju pri rješavanju problema?

Tall [23] ističe: "Kvaliteta korištenja slika pri rješavanju problema bez da im se robuje daje matematičaru prednost, ali može uzrokovati mnoge poteškoće onome koji tek uči."

Vizualizacija treba biti u pratnji logičkog mišljenja kako ne bi došlo do pogrešaka, jer nekada sama slika može voditi krivim zaključcima. Pri učenju i podučavanju matematike treba biti svjestan i zamki koje nastaju ako koristimo isključivo vizualizaciju pri rješavanju problema.

Vizualizacija može biti moćan i koristan alat za rad sa matematičkim problemima. Jedna od mogućnosti kako vježbati i poticati vizualizaciju kod učenika je metoda dokazivanja bez riječi.

3 Dokaz bez riječi

Svaki razvoj neke teorije u matematici uzrokuje postavljanje raznih novih hipoteza o objektima s kojima radimo pri čemu dolazi do proučavanja svojstava objekata koje promatramo. Opovrgavamo ili dokazujemo naše formulirane pretpostavke. Već od prije poznata matematička znanja tj. aksiomi, definicije i poznati teoremi, pomažu nam u procesu stvaranja novih otkrića. Prilikom stvaralaštva koristimo naše kreativno, analitičko i logičko mišljenje.

U naše novije doba razvijanje i poticanje takvog oblika rasuđivanja je poželjno u nastavi matematike jer dobro priprema učenike na cjeloživotno učenje i bolji razvoj učeničkih vještina i sposobnosti. Zbog toga je dokazivanje kao dio matematike i nastave matematike bitno za učenike jer učiti dokazivati znači i učiti rasuđivati, a učiti rasuđivati je jedan od temeljnih zadataka matematike. Jedan od načina dokazivanja u nastavi matematike, a koji može poboljšati nastavu matematike je upotreba vizualnih dokaza odnosno dokaza bez riječi.

3.1 Što podrazumijevamo pod pojmom dokaz bez riječi?

Prije nego što krenemo, pogledajmo prvo što podrazumijevamo pod riječi "dokaz". Definicija matematičkog dokaza može varirati, ovisno kojeg matematičara pitamo. No, dokaz prije svega, mora biti uvjerljiv i valjan.

Neke od definicija mogu biti sljedeće:

- Dokaz je niz izjava, gdje se istinitost svake izjave temelji na aksiomima ili prethodno dokazanim teoremima.
- Demonstracija kako teorem doista slijedi iz aksioma i ranije dokazanih teorema poznata je kao dokaz.
- Dokaz je "lanac" izjava koje, implicitno ili eksplicitno, pomoću aksioma i ranije dokazanih teorema vode ka istinitosti tvrdnje koju pokušavamo dokazati.

Za dokaz bez riječi možemo intuicijom zaključiti da je ideja slikom ili nizom slika dati dokaz neke matematičke tvrdnje, odnosno kroz promatranje, vizualizaciju i misaoni proces shvatiti i otkriti poruku slike. Izraze "dokaz bez riječi" ili "vizulani dokaz" koristimo ako govorimo o figuri koja izražava matematički dokaz s malo ili bez objašnjenja.

Postavlja se jedno važno pitanje: Možemo li ovakav dokaz smatrati pravim dokazom? U nekim primjerima se doista radi o vrlo uvjerljivom dokazu dok nekada nije tako. Ponekada je analizom slike samo dana ideja i put dokaza. Na taj način slika može biti putokaz učenicima kako da sami provedu dokaz. Mada na takav način matematički dokazi nisu precizno napisani oni imaju važnu ulogu u matematičkom obrazovanju.

Stajalište o dokazu bez riječi možemo promatrati kroz formalizam i platonizam. Formalizam ustraje na tome kako dokaz može proizaći koristeći samo formalno logičko zaključivanje iz postojećih aksioma. Prema formalizmu dokaz bez riječi ne može se nikako nazvati pravim matematičkim dokazom jer bez formalne strukture ne možemo nikako garantirati istinitost tvrdnji. Matematičari koji se slažu s formalizmom kažu kako se cijene pametne ideje u matematici i kako je lijepo matematiku predočiti slikama, ali to ne smanjuje njihov skepticizam prema dokazu bez riječi. Slike mogu prikazivati samo jedan određen slučaj, ali ne mogu prikazati generalizaciju teorema. Čak štoviše mogu nas dovoditi u zabludu. Za formaliste je dokaz bez riječi pedagoški važan, ali ne dokazuje ništa.

Često se stajališta u matematici svode samo na formalizam i strogost te na dokaz bez riječi i ostale slične didaktičke dosjetke gledaju sa sumnjom pa to završi i potpunim odbacivanjem. To potvrđuje i stav dvaju uglednih matematičkih stručnjaka za obrazovanje T. Eisenberga i T. Dreyfusa koji kažu kako "vizualni argumenti imaju malu vrijednost jer postoji samo jedan način matematičke komunikacije i dokazi bez riječi nisu prihvatljivi". Isto mišljenje sa njima dijeli i francuski matematičar Jean Dieduonne koji kaže: "Odlučio sam u svoj tekst ne unositi niti jedan crtež." Svi takvi stavovi su poprilično loši, neki matematičari čak smatraju da je dokaz bez riječi vulgarizacija matematike.

Suprotnost tomu je Platonizam koji je prijateljski naklonjen dokazu bez riječi i podržava dokaz bez riječi smatrajući ga pravim dokazom. Platonizam se temelji na tome da matematička istinitost postoji bez obzira na semantiku i naš je zadatak otkriti tu istinitost bilo kojim sredstvima. To ostavlja mogućnost da dokaz bez riječi možemo smatrati pravim dokazom. Slika, iako može predstavljati samo jedan određeni slučaj, pomaže našem mozgu da otkrijemo generalizaciju, omogućava nam da bolje shvatimo generalizaciju tvrdnje. Budući da Platonizam omogućuje da se matematička istinitost otkrije na druge načine, bez formalne strukture koju zahtjeva formalizam, dokaze bez riječi smatramo valjanim dokazima.

Primjer toga je George Polya koji svima daje uputu: "Nacrtaj sliku!", stoga on savjetuje da se problem počne rješavati vizualizacijom. Njegovi istomišljenici su Paul Halmos koji izjavljuje kako je preduvjet matematičkog uspjeha biti rođen sa vizualnom sposobnošću te Martin Gardner. Martin Gardner naziva dokaze bez riječi "look-see dijagramima" i kaže: "Od dobrog crteža nema učinkovitije podrške razumijevanju izvjesnih algebarskih identiteta. Svakako, u svrhu dokaza, treba znati manipulirati simbolima, no u mnogim slučajevima dosadan dokaz se može zamijeniti geometrijski analognim, jednostavnim i lijepim tako da nas valjanost teorema gotovo zaslijepi."

S obzirom da dokaz bez riječi možemo promatrati sa ta dva stajališta teško je utvrditi je li dokaz bez riječi zaista dokaz. To može ovisiti od matematičara do matematičara. Međutim, pravi dokaz ili ne, svi se možemo složiti kako je dokaz bez riječi vrijedan alat u matematici, a posebice u podučavanju.

Za vizualne dokaze matematičkih tvrdnji u kojima u potpunosti izostavljamo opis riječima možemo reći da su matematičke zagonetke koje potiču učeničko razmišljanje. Ispravnim korištenjem dokaza bez riječi na cjelovit način učenici mogu primijeniti usvojeno znanje i učinkovito učiti. Primjenom dokaza bez riječi u nastavi matematike potvrđuje se i poštuje načelo zornosti i apstraktnosti, a vidi se i velika primjena načela interesa i načela trajnosti znanja. Možemo slobodno reći kako primjenom dokaza bez riječi zadiremo u svako načelo metodike nastave matematike.

Takvim se načinom podučavanja učenike fokusira na ključna mjesta u dokazu te na bitne elemente dokaza, a i učenici postižu puno bolju koncentraciju koja je prilikom klasičnog dokazivanja, pri tome se misli na raspisivanje međukoraka i tehničkih dijelova, smanjena. Prilikom dokazivanja učenicima treba ukazati na dijelove dokaza koji možda iz slike nisu očiti, odnosno kako učenici trebaju naći namjerno ostavljene "rupe" u dokazu.

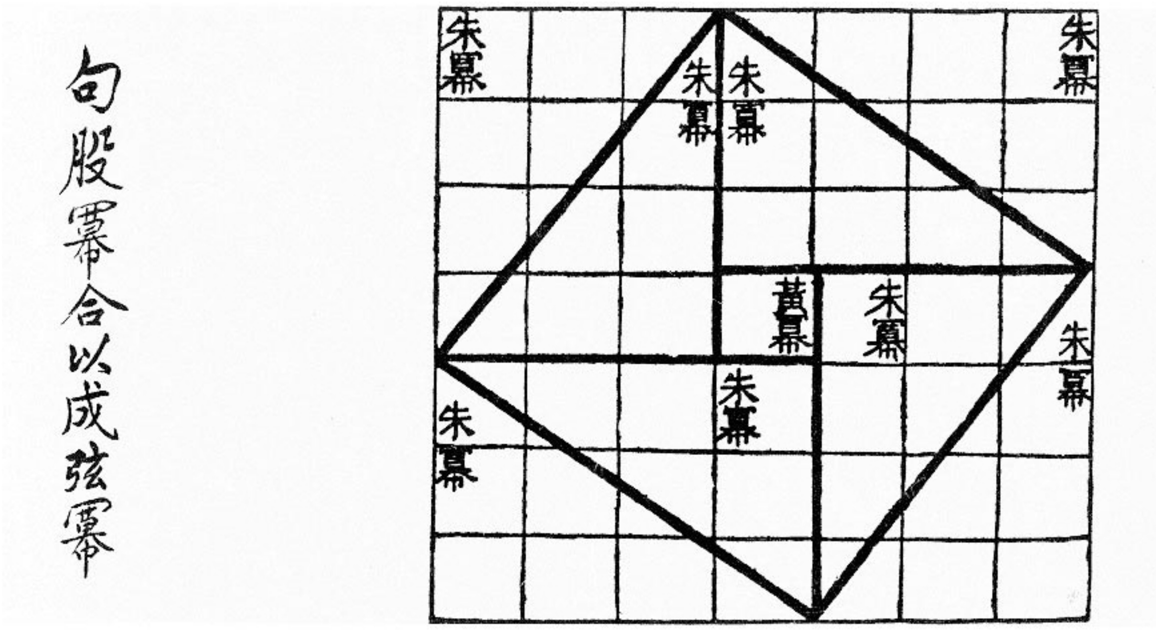
Prirodno je da se u nastavi matematike slika stalno koristi kod geometrijskih sadržaja, no i ostali dijelovi gradiva često se mogu vizualizirati, odnosno geometrijski interpretirati.

Također je bitno napomenuti kako je za uspjeh pri dokazivanju bitna dobra slika jer je iskustvo pokazalo kako se lošom skicom učenike može dovesti do pogrešaka u zaključivanju i uputiti učenika na krivi smjer rješavanja problema pa je potrebno učenike stalno upozoravati na takve pogreške.

Prilikom provođenja dokaza bez riječi slikovni zapis možemo provesti pomoću ploče i krede ili animacijama na računalu što nam uvelike poboljšava i pojednostavljuje nastavu, a učenik zornije može vidjeti i shvatiti probleme s kojima se suočava.

3.2 Povijest dokaza bez riječi

Tijekom povijesti, ljudi su izražavali matematičke ideje slikama. Razlog tome je bio nerazvijen matematički rječnik. Gotovo svim matematičarima bit će poznato što je prikazano na Slici 1 . To je prvi pronađen dokaz Pitagorinog teorema te ujedno i prvi dokaz kojeg smatramo dokazom bez riječi star više od dva tisućljeća.



Slika 1: *Geometrijski dokaz Pitagorinog teorema iz djela Zhou Bi Suan Jing*

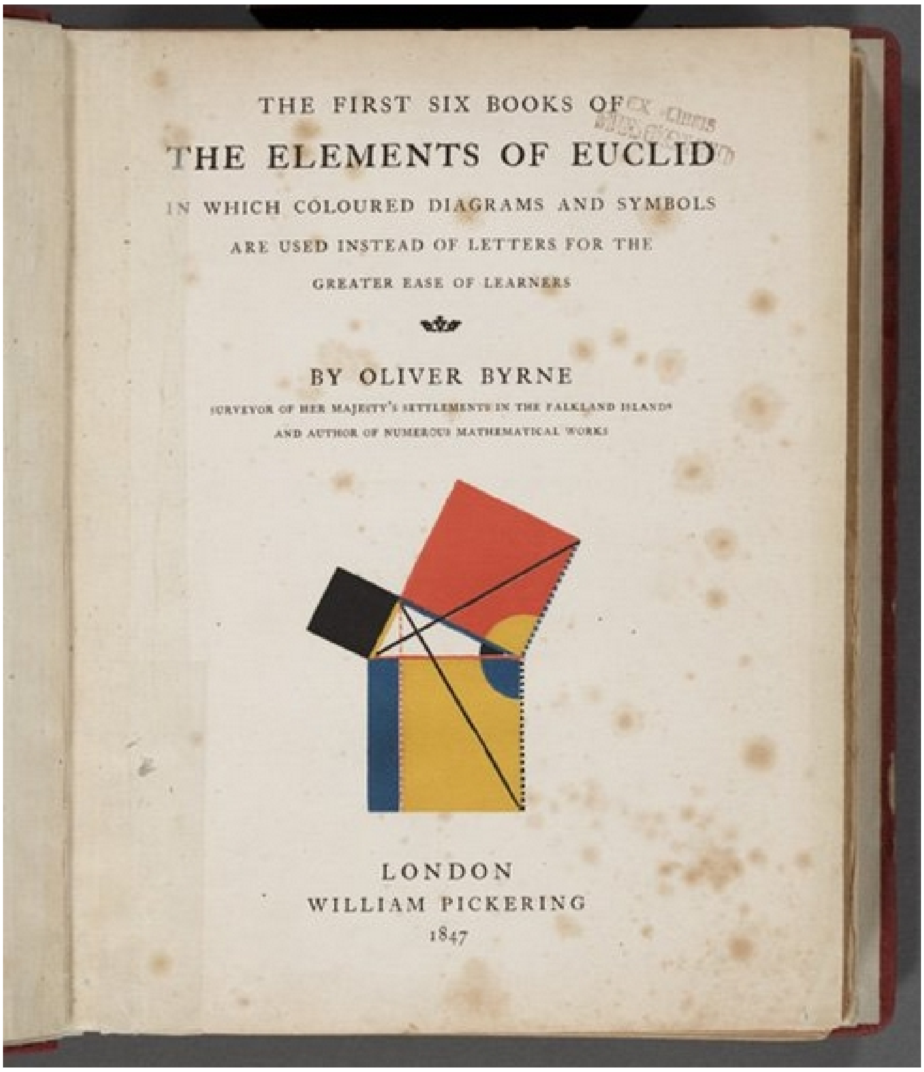
Radi se o slici koja zorno prikazuje Pitagorin poučak i dokaz je kako su matematičari pronalazili dokaze matematičkih tvrdnji i matematičkih veza crtanjem slika.

Slika je pronađena u starom kineskom matematičkom tekstu Zhou Bi Suan Jing (otprilike 200. godina prije Krista), varijacije ovog dokaza pripisuju se samom Pitagori i matematičaru Bhaskari. Pitagorin poučak je, bez sumnje, najuvjerljiviji dokaz bez riječi i tijekom vremena je doživio više stotina dokaza.

U starogrčkoj matematici možemo također sresti primjere dokaza bez riječi gdje se algebarski sadržaji prikazuju raznim geometrijskim interpretacijama. Euklidovi "Elementi" su pravi takav primjer, u njima se geometrijskim putem nastoje dokazati razne algebarske tvrdnje.

Ovaj vizualni stil matematičkih dokaza fascinirao je engleskog matematičara Olivera Byrnea te je on 1847. godine napisao verziju Euklidovih "Elemenata", čiju naslovnicu možemo vidjeti na Slici 2, s elementima u boji u kojima se obojani dijagrami i simboli koriste umjesto slova za lakše učenje.

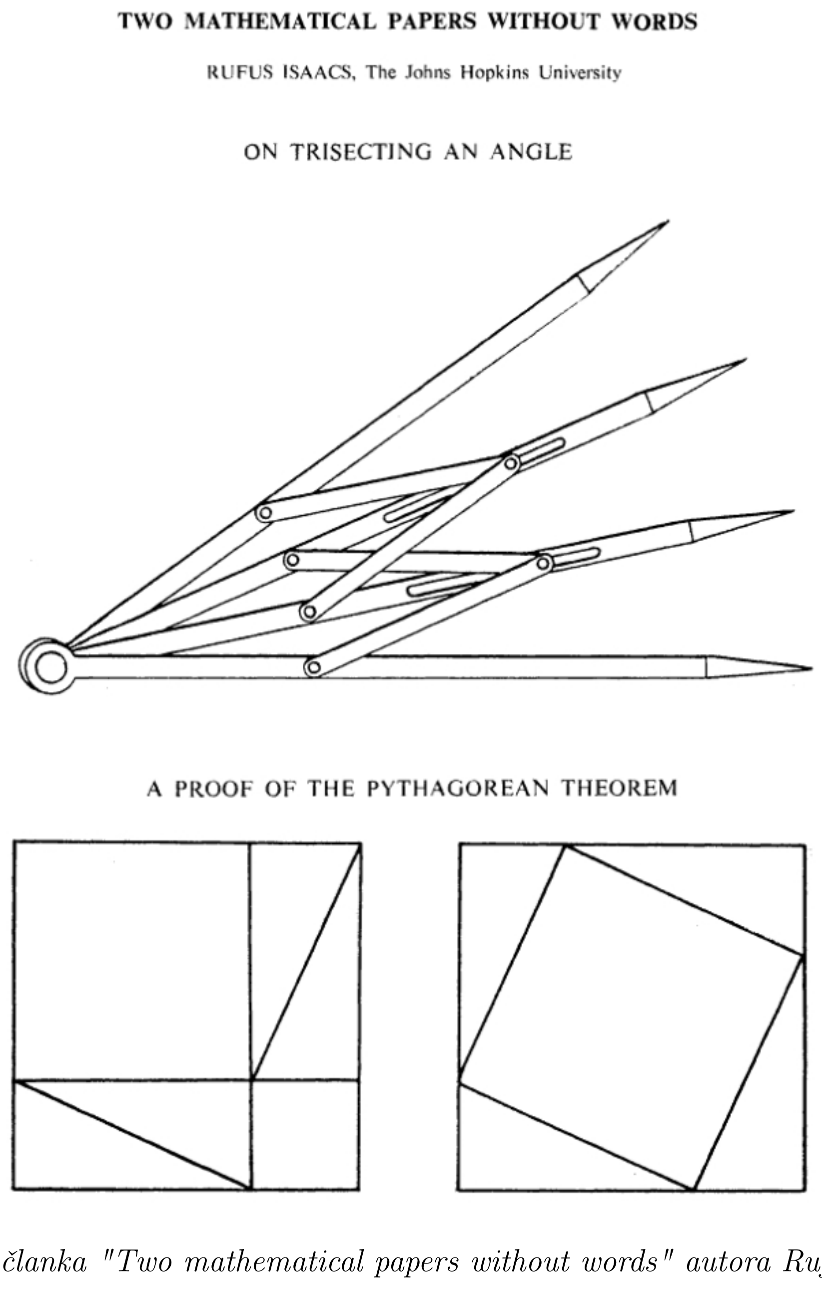
Također je zanimljivo napomenuti da Byrneovo korištenje dijagrama u boji pokrenulo najsuvremeniju tehnologiju tiska u boji u to vrijeme.



Slika 2: *Izdanje Euklidovih "Elementa" Olivera Byrnea*

Međutim, usprkos svojim drevnim korijenima, dokazi bez riječi nisu često bili pozitivno ocijenjeni i prepoznati dok ih Mathematics Association of Amerika - MAA nije počelo redovito objavljivati u časopisima Mathematics Magazine i The College Mathematics Journal sredinom 1970-ih godina.

Članak pod naslovom "Two mathematical papers without words" objavljen je u Mathematical Magazine u rujnu 1975. godine. Autor rada bio je Rufus Isaacs. Ovaj kratki rad pojavio se na kraju dužeg članka i uključivao je dvije slike. Na Slici 3 možemo vidjeti članak u izvornom obliku. Jedna slika predstavlja Pitagorin teorem, a druga je crtež hipotetskog uređaja dizajniranog za trisekciju kuta. Iako ni jedna slika nije predstavljena kao dokaz, namjera da se vizualiziraju ova dva problema i da se potakne čitatelja na razmišljanje je postignuta.


TWO MATHEMATICAL PAPERS WITHOUT WORDS

RUFUS ISAACS, The Johns Hopkins University

ON TRISECTING AN ANGLE

A PROOF OF THE PYTHAGOREAN THEOREM

Slika 3: *Iz članka "Two mathematical papers without words" autora Rufusa Isaacsa*

Napominjemo da je u djelu Zhou Bi Suan Jing slika Pitagorinog poučka bila popraćena tekstom objašnjenja. Dakle, lik se prvobitno pojavio kao slika, a ne kao vizualni dokaz, bez riječi. Time priznajemo Isaacsov doprinos vizualnim dokazima tj. njegovom prepoznavanju da je ponekad slika dovoljna da da objašnjenje na matematičke tvrdnje bez imalo teksta.

Dokazi bez riječi iz navedenog rada možda i nisu njegovi izvorni radovi, preminuo je 1981. i možda nikada nećemo saznati gdje se prvi puta susreo sa dva dokaza bez riječi koji su objavljeni pod njegovim imenom, ali je vjerovao da su ove dvije slike bez riječi svakako matematički istinite. Drugim riječima, on ih je prepoznao kao vizualni dokaz i ponudio ih kao takve.

Nekoliko mjeseci nakon što su objavljene ove slike, u siječnju 1976., Mathematical Magazine došao je pod vodstvo dvaju novih urednika, J. Arthur Seebach i L. Atrhur Steen. S promjenom vodstva došlo je i do promjene u izgledu časopisa. Novi dio "News and Letters", koji je zamijenio stari "Notes and Comments" odjeljak, uveden je kako bi pojednostavnio proces povratne informacije čitača. Novi odjeljak je dopustio da komentari na objavljene članke budu objavljeni u roku od mjesec dana od izvornog datuma objave članka. Kao rezultat toga, nekoliko čitatelja je podnijelo komentar u vezi članaka objavljenih u rujnu 1975.

Većina dostavljenih komentara je bila u vezi s "Two mathematical papers without words". Komentari upućeni na objavljene slike bili su izuzetno pozitivni. Isaacs je za odjeljak "News and Letters" iz siječnja 1976. napisao: "Sve što sam namjeravao je naglasiti rijetki i skroviti užitak postizanja matematičke istinitosti iz samog vizualnog dokaza."

U istom "News and Letters" odjeljku, novi urednik je zaključio sa sljedećom tvrdnjom: "Želimo potaknuti daljnje doprinose dokaza bez riječi iz razloga navedenih od Rufusa Isaacsa i još jednog drugog: mi smo u potrazi za zanimljivim vizualnim materijalom da ilustriramo stranice časopisa i koristimo ih kao korisno dopunjenje krajeva članaka. Što bi moglo biti bolje za tu svrhu nego ugodna ilustracija koja je napravila ugodnu matematičku točku na i?"

Nakon objave ovog zaključka, slike su se počele pojavljivati u matematičkom magazinu pod naslovom "Dokaz bez riječi" i to jednom ili dva puta godišnje. Do 1987. godine ta je stopa povećana na pet ili šest godišnje, u prosjeku po dva dokaza po izdanju. Polazeći od najstarijih pojavljivanih matematičkih radova pa sve do ovog članka koji se pojavio u spomenutom časopisu dokaz bez riječi je dobio zasluženo mjesto u matematici.

Izjava Lynn Artura Steena u Mathematics Magazine svjedoči tome kako popularnost ovakve vrste dokazivanja sve više raste: "Kao predavač često učenicima skrećem pozornost na to da zapamte geometrijske crteže koji ukratko opisuju bit matematičkih odnosa i teorema. Za većinu ljudi, vizualna memorija je mnogo učinkovitija nego samo strogo korištenje riječi. Štoviše, različiti matematički odnosi koji su predstavljeni dobrim crtežom očekuju da budu prepoznati i verbalizirani. Dakle, kao sredstvo za pomoć studentima za učenje i pamćenje matematike, dokazi bez riječi su često puno prihvatljiviji od (možda i krivo upamćenih) dokaza riječima."

4 Dokaz bez riječi u udžbenicima

Nastava matematike neprestano se obogaćuje novim idejama i metodama kako bi matematiku približili učenicima. Iz istog razloga dolazi i do promjene sadržaja u udžbenicima. Udžbenici se nastoje što više prilagoditi učeniku radi lakšeg korištenja i shvaćanja nastavnog gradiva. Suvremena nastava matematike stavlja pred učenika matematičke dosjetke i zadatke koji pobuđuju interes za učenje matematike te takvi sadržaji zauzimaju sve više prostora u udžbenicima.

Udžbenik definiramo kao osnovnu didaktički oblikovanu školsku knjigu koja je napisana na osnovi propisanog nastavnog plana i programa, a koju učenici upotrebljavaju u školovanju. Iz definicije možemo shvatiti kako je udžbenik vrlo važan izvor znanja u nastavi jer je didaktički oblikovan i napisan prema propisanom nastavnom planu i programu, što nam daje određenu garanciju metodičke ispravnosti, valjanosti sadržaja, pazeći na mogućnosti učenika određene dobi.

Što sve udžbenik treba zadovoljavati propisuje se Udžbeničkim standardom koji propisuje Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske. Godine 2014. na tržište su izašli novi udžbenici za gimnazije i četverogodišnje tehničke škole te za sva četiri razreda prirodoslovno-matematičke gimnazije izdavačke kuće Element. Prema riječima autora Branimira Dakića i Nevena Elezovića u udžbeniku se nalaze već poznati sadržaji, ali i neki novi dodatni sadržaji. U ovom poglavlju diplomskog rada razmatrat ćemo neke od udžbenika izdavačke kuće Element i vidjeti koji se sadržaji pojavljuju u udžbenicima vezani za temu diplomskog rada.

Udžbenici koje promatramo su:

1. MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.
2. MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.
3. MATEMATIKA 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.
4. MATEMATIKA 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.
5. MATEMATIKA 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.
6. MATEMATIKA 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.

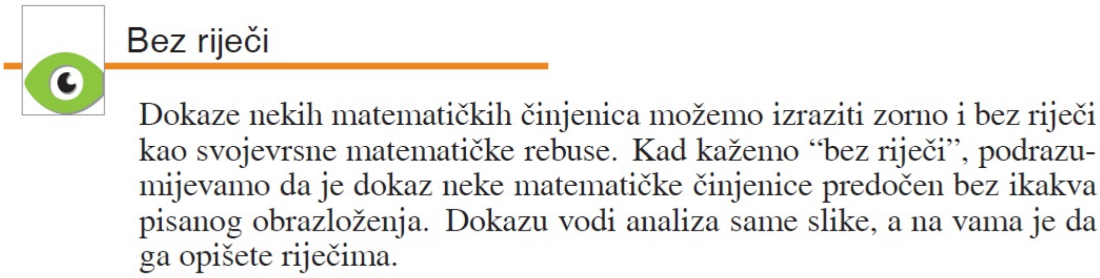
7. MATEMATIKA 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 1. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.

8. MATEMATIKA 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 2. dio, B.Dakić i N. Elezović, Element, 2014.

U predgovoru udžbenika autori navode kako velik broj ilustracija i slika u udžbenicima podiže zornost sadržaja te učenicima ukazuju na zanimljive kutke kojim je svrha unijeti živost u proces učenja. Zanimljivi umetci (kutci) koji se navode u udžbeniku su: kutak "Za radoznale", "Kutak plus", kutak "Istražite", kutak "Bez riječi" , kutak "Iz zabavne matematike", "Povijesni kutak" i kutak "Točno - netočno pitalice".

Ti umetci su u udžbenicima naznačeni posebnim simbolima i autori navode njihova značenja kako bi učenicima ukazali što je njihova zadaća u pojedinom kutku.

Za ovaj diplomski rad bitan je kutak "Bez riječi". Autori pod taj kutak stavljaju sljedeće objašnjenje: "Dokaze nekih matematičkih činjenica možemo izraziti zorno i bez riječi kao svojevrsne matematičke rebuse. Kad kažemo "bez riječi", podrazumijevamo da je dokaz neke matematičke činjenice predočen bez ikakva pisanog obrazloženja. Dokazu vodi analiza same slike, a na vama je da ga opišete riječima."


Bez riječi

Dokaze nekih matematičkih činjenica možemo izraziti zorno i bez riječi kao svojevrsne matematičke rebuse. Kad kažemo "bez riječi", podrazumijevamo da je dokaz neke matematičke činjenice predočen bez ikakva pisanog obrazloženja. Dokazu vodi analiza same slike, a na vama je da ga opišete riječima.

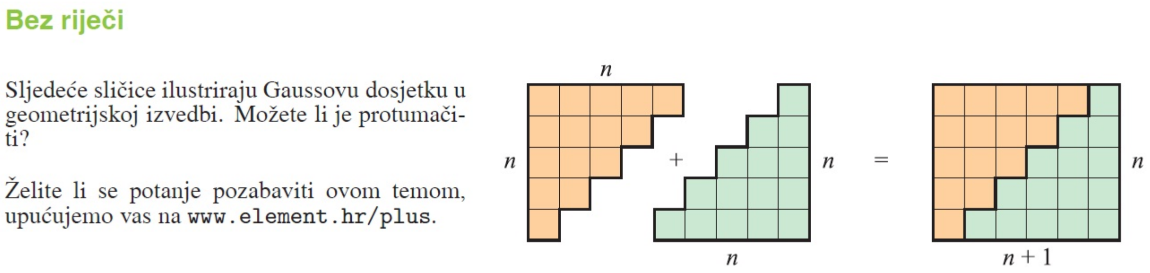
Slika 4: *Simbol i objašnjenje kutka "Bez riječi" u udžbenicima*

U sljedećim potpoglavljima proći ćemo kroz svaki razred srednje škole i navesti dokaze bez riječi koji se pojavljuju u promatranim udžbenicima.

4.1 1. razred gimnazija i tehničkih škola

Kutak "Bez riječi" u 1. razredu Elementovog udžbenika [5] se prvi put pojavljuje u prvoj nastavnoj cjelini "Brojevi" u nastavnoj jedinici "Prirodni i cijeli brojevi". Na kraju nastavne jedinice nalazi se kutak "Bez riječi". Prije kutka "Bez riječi" u udžbeniku se nalazi "Kutak plus" u kome se objašnjava Gausova dosjetka.

Nakon toga učeniku je prikazana sličica koja ilustrira zbroj prvih n uzastopnih prirodnih brojeva te se učeniku postavlja izazov da objasni prikazanu sličicu.



Slika 5: *Zbroj prvih n uzastopnih prirodnih brojeva*

Kako su se učenici prije dokaza upoznali sa Gausovom dosjetkom mogli bi doći do sljedećeg zaključka:

Neka nam svaki kvadratić ustvari predstavlja broj pa je zbroj prvih n uzastopnih prirodnih brojeva $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ustvari predočen u obliku nazubljenog trokuta, tu sumu možemo označiti slovom S.

Gausovim postupkom zbroj ova dva nazubljena trokuta možemo prikazati tako što ćemo sve pribrojnike ispisati u dva reda, ali obrnutim redoslijedom, kao što je i prikazano na Slici 5:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 4 + 3 + 2 + 1.$$

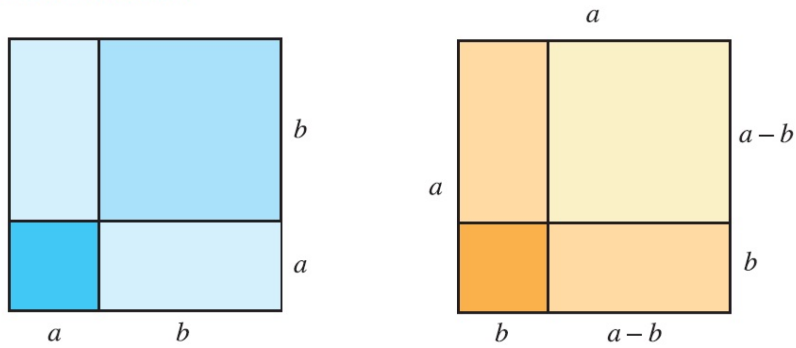
Nakon toga zbrajamo po dva pribrojnika koja su jedan iznad drugoga i dobivamo uvijek isti zbroj, odnosno $n + 1$. I kako njih imamo n to će biti $n(n + 1)$ pa tako iz $2S = n(n + 1)$ dobivamo $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Upravo ovo objašnjenje otvara ideju za ovako zornu geometrijsku interpretaciju sume prvih n uzastopnih prirodnih brojeva.

Nakon toga u Elementovom udžbeniku [5] u drugoj po redu nastavnoj cjelini "Potencije i algebarski izrazi" u nastavnoj jedinici "Algebarski izrazi. Potenciranje binoma." pojavljuje se lijep geometrijski dokaz za kvadrat binoma.

Bez riječi

KVADRAT BINOMA



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Slika 6: *Kvadrat binoma*

Učenici će primijetiti kako je na Slici 6 koja prikazuje kvadrat zbroja prikazan kvadrat kojemu je duljina stranice $a + b$ pa je površina tog kvadrata $(a + b)^2$, što je ustvari kvadrat zbroja.

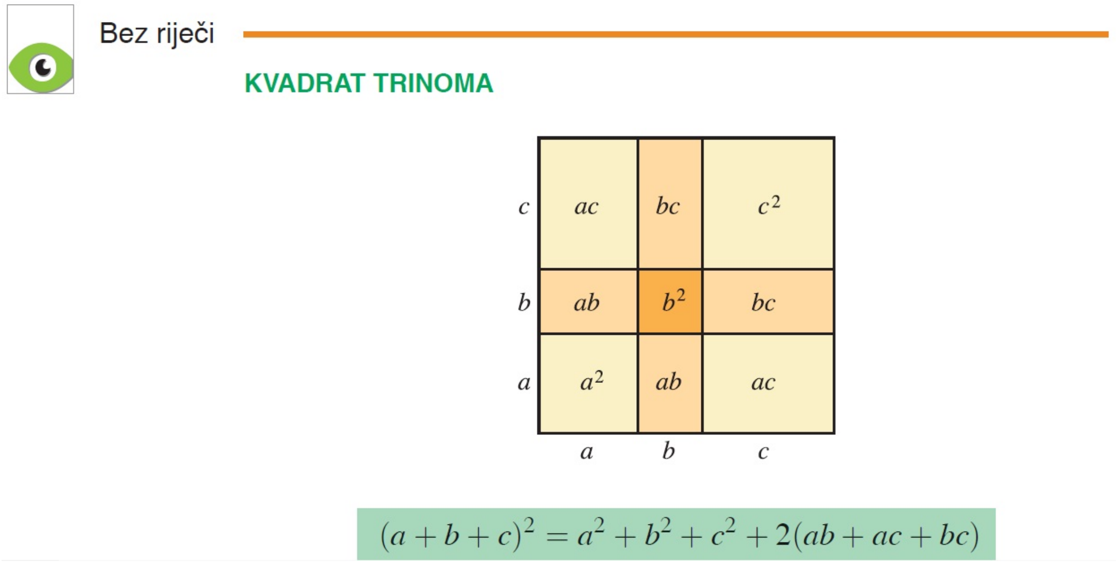
Nakon toga primijetit će da je taj isti kvadrat podijeljen na manji kvadrat, veći kvadrat i na dva sukladna pravokutnika. Uočit će kako je ustvari površina velikog kvadrata $(a + b)^2$ jednaka zbroju površina dvaju sukladnih pravokutnika ab, površine većeg kvadrata b^2 i površine manjeg kvadrata a^2.

Kod kvadrata razlike možemo uočiti kako se radi o kvadratu kojemu je duljina stranice a. Ako u taj kvadrat upišemo manji kvadrat duljine stranice b tada dobijemo kvadrat kojemu je duljina stranice $(a - b)$, odnosno taj je kvadrat površine $(a - b)^2$, što je kvadrat razlike. Pogledajmo sada čemu je taj kvadrat razlike jednak.

Kako bi dobili taj kvadrat moramo od kvadrata površine a^2 oduzeti dva sukladna pravokutnika površine $b(a - b)$ te manji kvadrat površine b^2. Računski to možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2b(a-b) - b^2\\ &= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

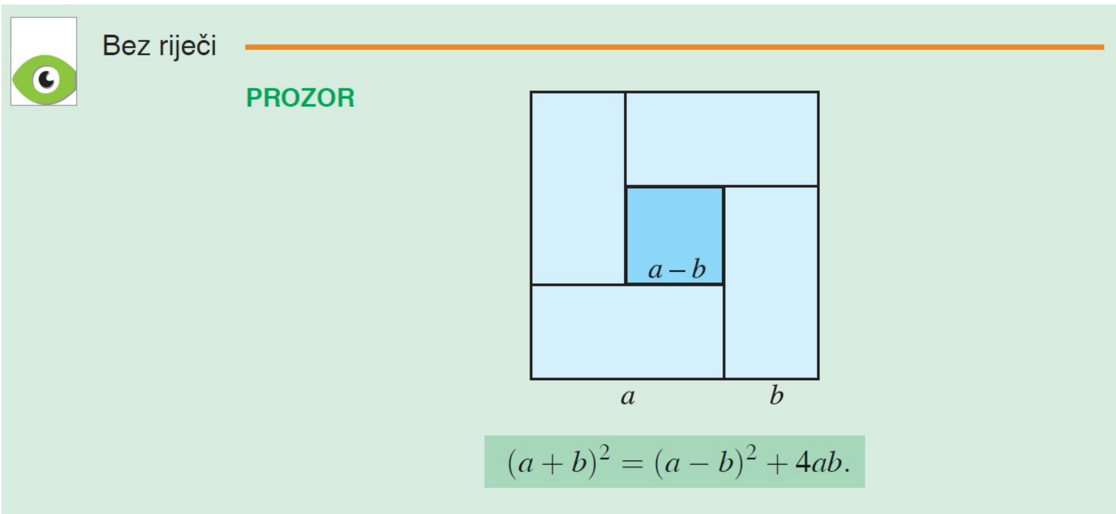
U istoj nastavnoj jedinici "Algebarski izrazi. Kvadrat binoma." pojavljuje se i dokaz bez riječi za kvadrat trinoma za one učenike koje žele znati više.



Slika 7: *Kvadrat trinoma*

Ukoliko su učenici dobro shvatili dokaz bez riječi za kvadrat binoma na isti način će uočiti kako se ovdje radi o kvadratu čija je stranica duljine $(a + b + c)$ i da je na taj način dobiven kvadrat površine $(a+b+c)^2$. Kvadrat je podijeljen na 9 dijelova od kojih su neki sukladni. Zbrajajući površine tih dijelova učenici će uočiti kako je ustvari $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, što je formula za kvadrat trinoma.

Na kraju nastavne cjeline "Potencije i algebarski izrazi" nalaze se zadaci koji pripadaju nastavnoj cjelini. U zadacima je učeniku prepušten dokaz bez riječi kvadrata binoma, ali na drugačiji način od prethodno opisanog.



Slika 8: *Zadaci: Kvadrat binoma*

Ovdje učenici mogu odmah uočiti kako se radi o kvadratu površine $(a+b)^2$. Iz slike možemo vidjeti kako je ta ista površina prikazana pomoću kvadrata površine $(a-b)^2$ i 4 sukladna pravokutnika površine ab pa imamo da je $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$. Učenici ovdje mogu primijetiti kako smo kvadrat zbroja binoma povezali sa kvadratom razlike binoma.

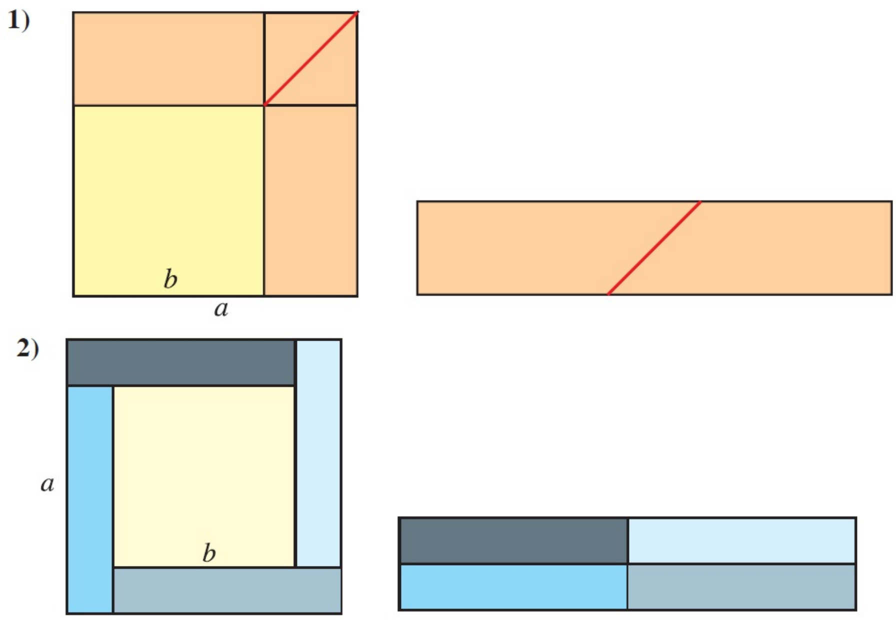
U promatranoj nastavnoj cjelini "Potencije i algebarski izrazi" nalazi se nastavna jedinica "Razlika i zbroj potencija". U toj nastavnoj jedinici učenici se upoznaju sa razlikom kvadrata te im je dan dokaz bez riječi razlike kvadrata na dva načina.

Bez riječi

RAZLIKA KVADRATA

Na slikama su prikazana dva geometrijska tumačenja razlike kvadrata. Proučite ih i obrazložite.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$



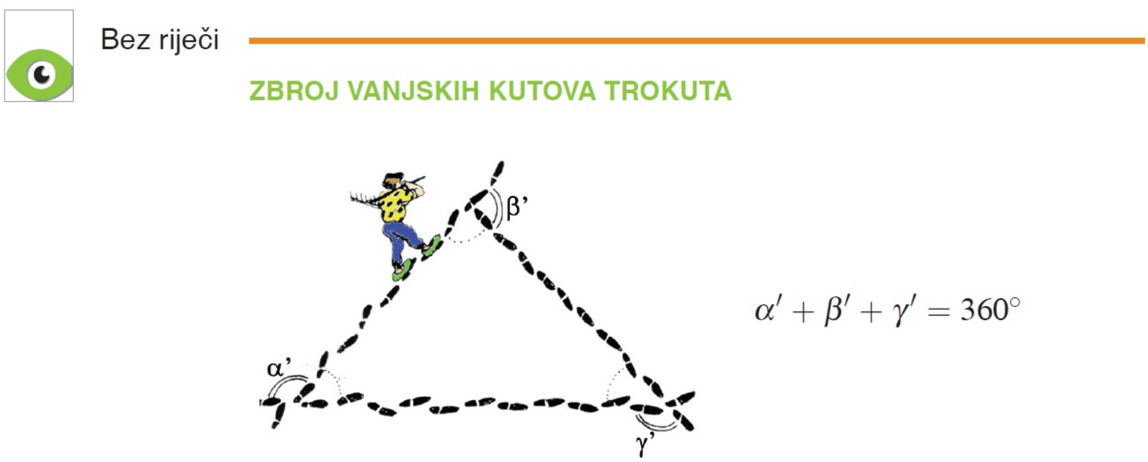
Slika 9: *Razlika kvadrata*

Kod prvog načina učenici će odmah primijetiti kako imaju kvadrat površine a^2 u kojeg je upisan kvadrat površine b^2. Ukoliko oduzmemo površinu velikog kvadrata od manjeg dobijemo upravo razliku $a^2 - b^2$. Nakon toga učenici će se pitati čemu je to jednako, odnosno što nam je preostalo tim oduzimanjem. Podjelom preostalog dijela kvadrata na način prikazan kao na slici i preslagivanjem tog dijela dobijemo pravokutnik čija je površina $(a-b)(a+b)$. Dakle, imamo $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Drugi način od učenika zahtjeva malo više razmišljanja no mogli bi ga bez teškoće riješiti. U kvadrat površine a^2 upisan je kvadrat površine b^2 na drugačiji način. Oduzimanjem kvadrata površine a^2 od kvadrata površine b^2 preostalu površinu možemo podijeliti na 4 sukladna pravokutnika. Preslagivanjem tih pravokutnika dobijemo jedan veći pravokutnik. Učenici će se nakon toga zapitati kolike su stranice tog pravokutnika, a zatim kolika je površina. Pogledajmo koliko iznosi duljina manje stranice jednog od četiri sukladna pravokutnika. Iz slike je vidljivo da je to $\frac{a-b}{2}$. Dakle, duljina kraće stranice velikog pravokutnika je $\frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a-b+a-b}{2} = \frac{2(a-b)}{2} = a - b$. Sada duljinu veće stranice jednog od četiri sukladna pravokutnika možemo izračunati tako da od stranice a oduzmemo $\frac{a-b}{2}$, a to iznosi $\frac{a+b}{2}$. Dakle, duljina veće stranice našeg velikog pravokutnika je $\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = a + b$. Na kraju smo dobili da su stranice velikog pravokutnika duljine $a - b$ i $a + b$, te je površina tog pravokutnika $(a-b)(a+b)$. Sada imamo da je $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

U Elementovom udžbeniku [5] za prvi razred ne pojavljuje se više niti jedna rubrika "Bez riječi". Možemo reći kako su navedeni dokazi bez riječi u udžbeniku velika pomoć učenicima koji ne razumiju algebarske identitete te ih shvaćaju kao formule koje moraju naučiti napamet, bez imalo razmišljanja. Ovakvi geometrijski dokazi algebarskih izraza novost su u nastavi matematike, a vidimo kako navedeni geometrijski dokazi ne zahtijevaju od učenika veliko predznanje za njihovo tumačenje.

Elementov udžbenik [6] učenicima donosi još nekoliko zanimljivih dokaza bez riječi. Prvi među njima pojavljuje se u nastavnoj cjelini "Sukladnost i sličnost" u nastavnoj jedinici "Sukladnost dužina i kutova". Riječ je o dokazu zbroja vanjskih kutova trokuta.



Slika 10: *Zbroj vanjskih kutova u trokutu*

Kako su se učenici već ranije susretali s trokutom znat će da je svaki vanjski kut jednak zbroju njemu nesusjednih kutova, što možemo zapisati na idući način:

$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta.$$

Ako pogledamo sada čemu nam jednako $\alpha' + \beta' + \gamma'$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\alpha' + \beta' + \gamma' &= \beta + \gamma + \alpha + \gamma + \alpha + \beta \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

Učenici znaju kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180° pa imamo:

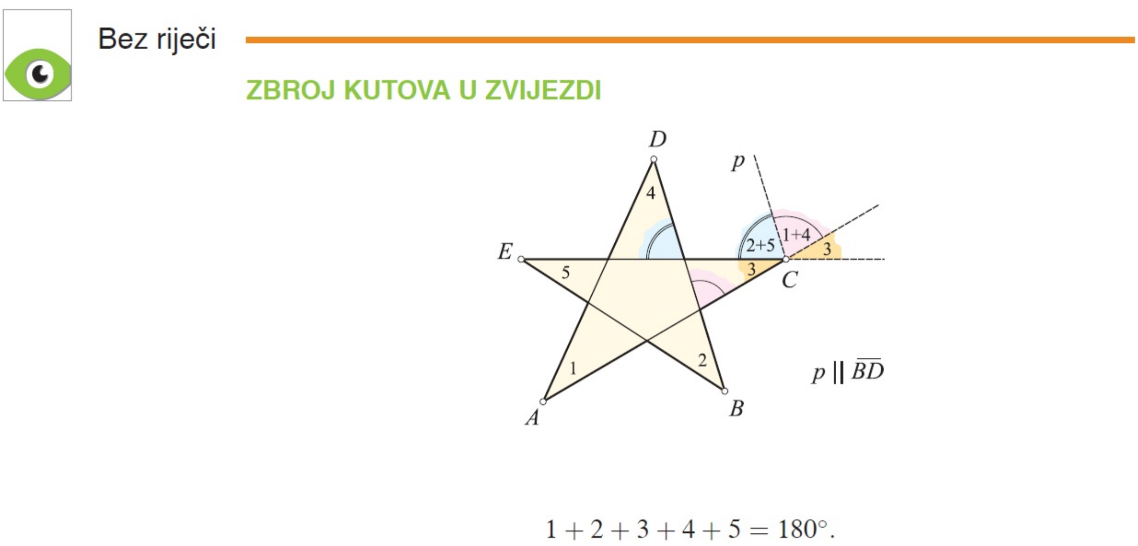
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Neki učenici će možda odabrati idući pristup: Znamo da je zbroj veličina unutarnjeg kuta i njemu pripadajućeg vanjskog kuta jednaka 180° tj. da vrijedi:

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ, \beta + \beta' = 180^\circ, \gamma + \gamma' = 180^\circ.$$

Ako zbrojimo ove tri jednakosti dobivamo da je $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 540^\circ$. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ imamo da je $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$.

U istoj nastavnoj cjelini i nastavnoj jedinici Elementovog udžbenika [6] pojavljuje se još jedan kutak "Bez riječi". Učenici trebaju pokazati kako je zbroju kutova u zvijezdi jednak 180°. Iz Slike 11 to je vidljivo, međutim učenici to trebaju objasniti i obrazložiti riječima.

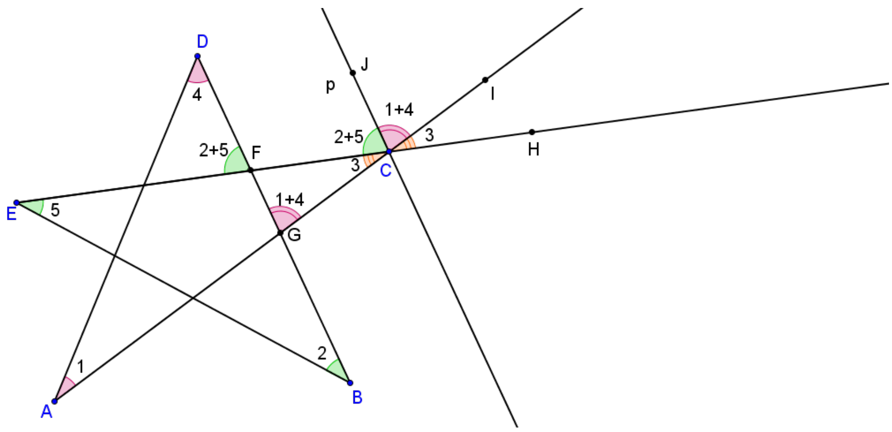


Slika 11: *Zbroj kutova u zvijezdi*

Prije svega, pogledajmo kutove koje su označeni na slici i napišimo njihova imena:

$$1 = \angle DAC$$
$$2 = \angle EBD$$
$$3 = \angle ACE$$
$$4 = \angle BDA$$
$$5 = \angle CEB.$$

Na slici su već bojom istaknuti kutovi koje trebamo promatrati, a učenici bi trebali prepoznati što nam ti kutovi poručuju.



Slika 12: *Zbroj kutova u zvijezdi*

Poučak o vršnim kutovima kaže da dva pravca koja se sijeku određuju dva para međusobno sukladnih kutova. Ukoliko produžimo $\overline{EC}$ i $\overline{AC}$ kod vrha C te na te produžetke označimo točke H i I (Slika 12) dobit ćemo, prema poučku o vršnim kutovima, vršni kut kuta $\angle ACE$. Taj vršni kut kojeg smo označili $\angle ICH$ je iste veličine kao i $\angle ACE$.

Nadalje, povučemo li pravac p paralelan sa dužinom $\overline{BD}$ te na pravcu p označimo točku J (Slika 12) možemo uočiti sljedeće:

Označimo $\overline{DB} \cap \overline{CE} = \{F\}$ i $\overline{DG} \cap \overline{AC} = \{G\}$.

Pogledajmo $\triangle BEF$. U tom trokutu je $\angle EFD = \angle DBE + \angle CEB$ jer je $\angle EFD$ vanjski kut $\triangle BEF$ pa je jednak zbroju njemu nesusjednih kutova.

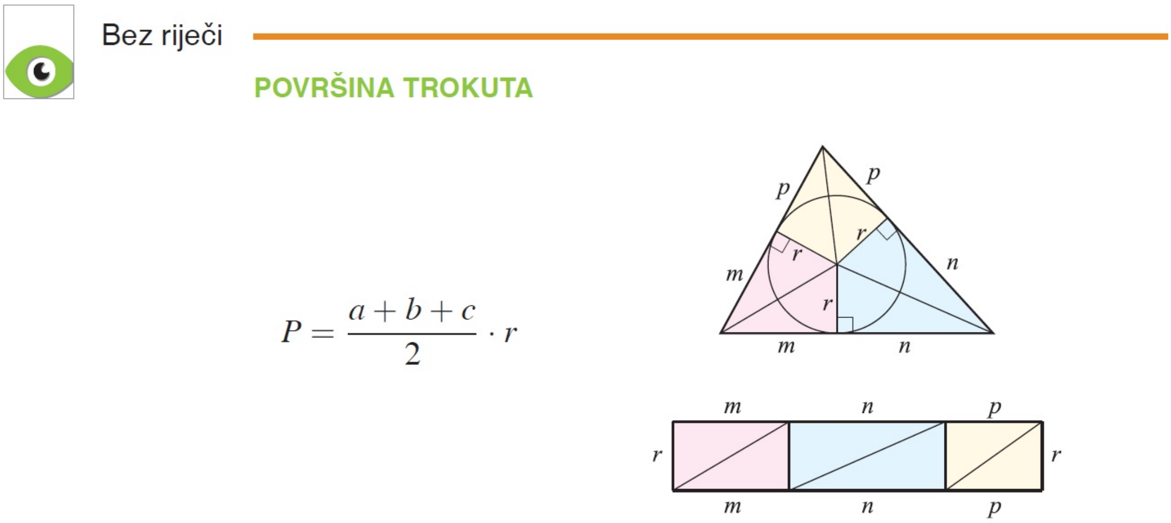
Prema poučku o kutovima uz presječnicu (transverzalu) koji kaže da ukoliko imamo dva paralelna pravca tada pravac koji ih siječe određuje s njima sukladne kutove imamo da je $\angle DFE$ sukladan $\angle JCE$. Primjetimo kako su paralelni pravci p i DB, a presječnica je pravac EC.

Isto tako promotrimo $\triangle ADG$ i njegov vanjski kut $\angle CGD$. Za taj vanjski kut vrijedi $\angle CGD = \angle DAC + \angle BDA$. Prema poučku o kutovima uz presječnicu (paralelni pravci su DB i p, a presječnica je pravac AC) imamo da je $\angle CGE = \angle ICJ$. Vidimo da $\angle JCE$, $\angle ICJ$ i $\angle HCI$ čine ispruženi kut pa imamo da je

$$\begin{aligned}
\angle JCE + \angle ICJ + \angle HCI &= 180^\circ \\
\angle EFD + \angle CGD + \angle ACE &= 180^\circ \\
\angle EBD + \angle CEB + \angle DAC + \angle BDA + \angle ACE &= 180^\circ \\
2 + 5 + 1 + 4 + 3 &= 180^\circ.
\end{aligned}$$

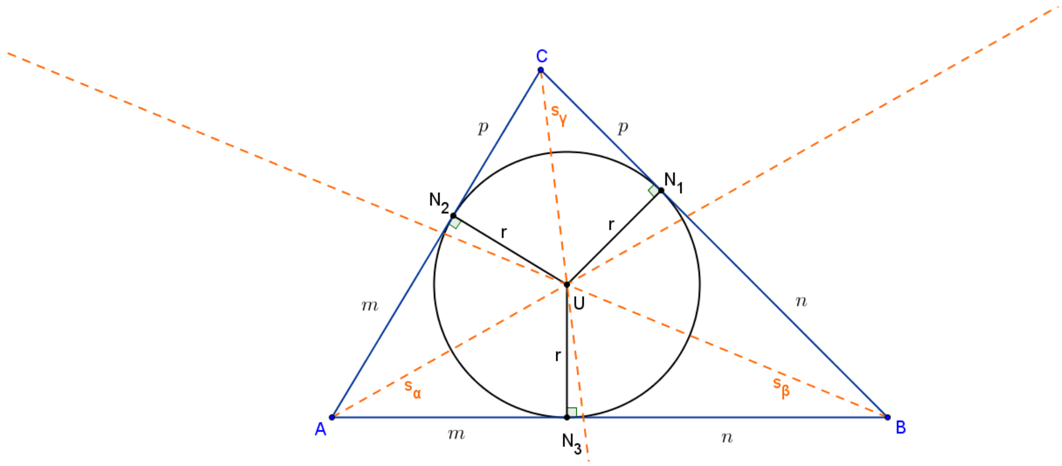
Ovim dokazom bez riječi može se provjeriti jesu li učenici dobro shvatili navedene poučke te znaju li ih primjeniti u zadacima.

Nastavna cjelina "Sukladnost i sličnost" krije još jedan dokaz bez riječi u nastavnoj jedinici "Četiri karakteristične točke trokuta". Na Slici 13 dan je geometrijski dokaz površine trokuta.



Slika 13: *Površina trokuta*

Učenici će iz slike vidjeti kako je u trokut ABC upisana kružnica polumjera r, a središte koje smo označili sa U (Slika 14) te kružnice je u sjecištu simetrala kutova $\triangle ABC$.



Slika 14: *Površina trokuta*

Uočimo $\triangle ABU$, $\triangle BCU$, $\triangle CAU$. Visine tih trokuta $\overline{UN_3}$, $\overline{UN_1}$, $\overline{UN_2}$ redom, dijele svaki taj trokut na dva pravokutna trokuta od kojih su neki sukladni.

Prema $S-S-K$ poučku o sukladnosti (dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvjema stranicama i kutu nasuprot duljoj stranici):

$$\triangle CUN_1 \cong \triangle UCN_2$$

$$\overline{CU}\text{zajednička}, |\overline{UN_1}| = |\overline{UN_2}|, \angle CN_2U = \angle UN_1C = 90^\circ$$

$$\triangle AN_3U \cong \triangle AN_2U$$

$$\overline{AU}\text{zajednička}, |\overline{UN_3}| = |\overline{UN_2}|, \angle AN_3U = \angle AN_2U = 90^\circ$$

$$\triangle BUN_3 \cong \triangle BN_1U$$

$$\overline{BU}\text{zajednička}, |\overline{UN_3}| = |\overline{UN_1}|, \angle UN_3B = \angle UN_1B = 90^\circ.$$

Te pravokutne trokute možemo presložiti tako da oni čine pravokutnik čije su stranice $m+n+p$ i r. Površina tog pravokutnika je

$$P = (m+n+p)\cdot r, \text{odakle redom slijedi:}$$

$$P = \frac{2(m+n+p)}{2}\cdot r$$

$$P = \frac{2m+2n+2p}{2}\cdot r$$

$$P = \frac{m+n+p+m+n+p}{2}\cdot r$$

$$P = \frac{a+b+c}{2}\cdot r.$$

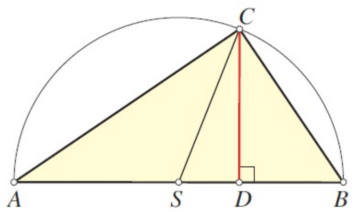
Aritmetičku i geometrijsku sredinu učenici susreću već u prvom dijelu udžbenika za prvi razred gdje im je u sklopu "Kutak plus" dan geometrijski dokaz i objašnjenje AG nejednakosti na malo drugačiji način (što ćemo kasnije dodatno prokomentirati) nego što je dano u drugom dijelu udžbenika za prvi razred pod kutkom "Bez riječi".

I dalje se nalazimo u nastavnoj cjelini "Sukladnost u sličnost", ali u nastavnoj jedinici "Sličnost trokuta: Algebarske konstrukcije". Dokaz je dan Slikom 15.

Bez riječi

AG NEJEDNAKOST

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$ razmatrali smo već ranije (str. 153. prvog dijela). Tada smo dali i jedno njezino geometrijsko tumačenje. Na sljedećoj slici vidimo još jednu moguću geoemetrijsku predodžbu iste nejednakosti. Pozorno je promotri i protumači.



$$|AD| = a, \quad |DB| = b$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$$

Slika 15: *AG nejednakost*

Na slici je prikazana kružnica sa središtem u točki S i promjera $|\overline{AB}|$. Na $\overline{AB}$ odabrana je točka D tako da je $|\overline{AD}| = a$ i $|\overline{DB}| = b$. U točki D podignemo okomicu na $\overline{AB}$ i sjecište okomice sa kružnicom označimo točkom C. Prema Talesovom teoremu (obodni kut nad promjeru kružnice je pravi) tada je $\angle ACB = 90°$ pa zaključujemo da je $\triangle ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C. Vidimo i da je $|\overline{SC}| = \frac{a+b}{2}$.

Kako je $\overline{CD}$ visina na hipotenuzu iz vrha C pravokutnog $\triangle ABC$, a D nožište te visine po Euklidovom teoremu vrijedi da je $|\overline{CD}| = \sqrt{a \cdot b}$ (duljina visine pravokutnog trokuta jednaka je geometrijskoj sredini duljina odsječaka na koje nožište te visine dijeli hipotenuzu).

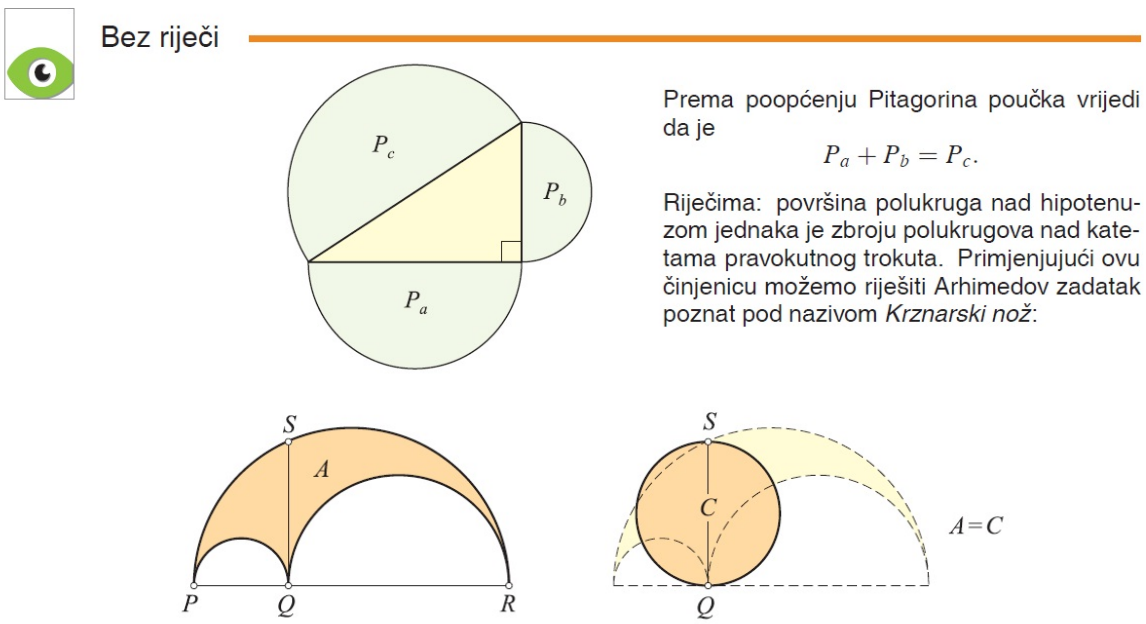
Sada, kako je $\overline{SC}$ hipotenuza, a $\overline{DC}$ kateta pravokutnog $\triangle DSC$ imamo da je

$|\overline{CD}| \leq |\overline{SC}|$ odnosno:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $D = S$, odnosno $a = b$.

Zadnja rubrika "Bez riječi" u prvom razredu gimnazija i tehničkih škola nalazi se na kraju nastavne cjeline "Kružnica i krug. Pravilni mnogokuti." i dio je nastavne cjeline "Duljina kružnog luka i površina kružnog isječka". Učenicima je u tom kutku "Bez riječi" dan vizualni dokaz dva Arhimedova zadatka, koji su prikazani na sljedećim slikama.

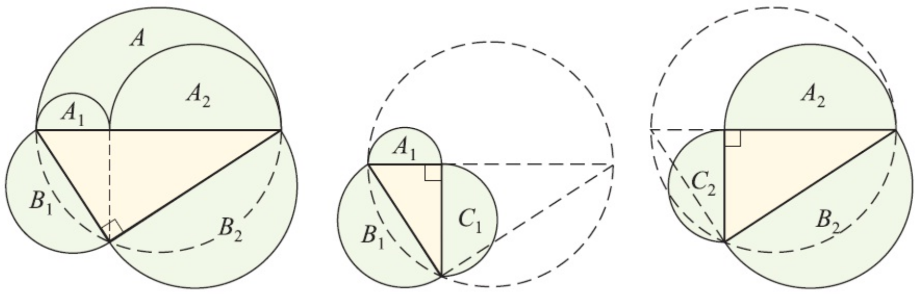


Slika 16: *Arhimedov zadatak: Krznarski nož*

U sklopu te rubrike dano je odmah i objašnjenje zadatka o Krznarskom nožu. Treba pokazati da je površina A Krznarskog noža jednaka površini C kruga opisanog nad $\overline{QS}$.

Kako su učenici upoznati sa poopćenjem Pitagorinog poučka u nastavnoj cjelini "Sukladnost i sličnost" u dijelu "Kutak plus" (ako nad stranicama pravokutnog trokuta nacrtamo slične likove tada je površina P_c lika nad hipotenuzom jednaka zbroju površina P_a i P_b dvaju likova nad katetama) oni će moći razumijeti dani dokaz prikazan na Slici 17.

Dokaz.

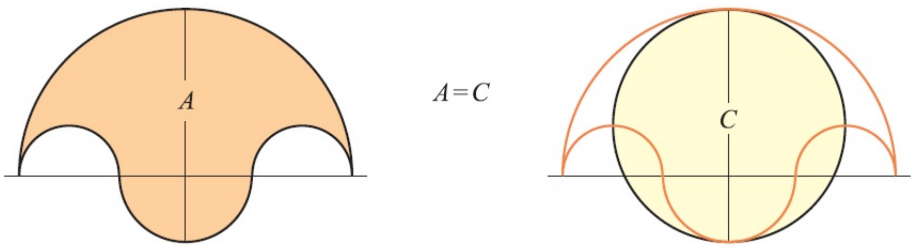


$A + A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \qquad B_1 = A_1 + C_1 \qquad B_2 = A_2 + C_2$

$$A + A_1 + A_2 = A_1 + C_1 + A_2 + C_2$$
$$A = C_1 + C_2 = C$$

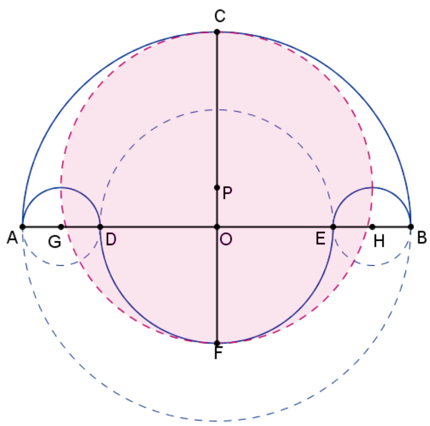
Slika 17: *Objašnjenje zadatka o Krznarskom nožu*

Zadatak. Još se jedan Arhimedov zadatak, *Zadatak o soljenci* često navodi uz prethodni. Crteži pokazuju o čemu je riječ. Možeš li dokazati tvrdnju?



Slika 18: *Arhimedov zadatak o soljenci*

Zadatak o soljenci od učenika zahtjeva malo dublju analizu i uočavanje. Treba pokazati da je površina A lika na slici koji se još naziva i salinon jednaka krugu površine C označenom na slici. U svrhu bolje analize označimo točke kao na sljedećoj slici.



Slika 19: *Arhimedova soljenka*

Konstruirajmo polovište dužine $\overline{DE}$ i označimo ga točkom O. Zatim konstruirajmo okomicu na $\overline{DE}$ kroz točku O i presjek najveće kružnice i okomice označimo točkom C, a presjek okomice i kružnice dijametra $|\overline{DE}|$ označimo točkom F.

Konstruirajmo središta kružnica dijametra $|\overline{AD}|$ i $|\overline{EB}|$ te ih označimo točkama G i H.

Kako je $|\overline{AD}| = |\overline{EB}|$ slijedi da je

$$|\overline{AG}| = |\overline{GD}| = |\overline{EH}| = |\overline{HB}| = x.$$

$|\overline{OD}| = |\overline{OE}|$ i $|\overline{OF}|$ su radijusi istog kruga pa možemo napisati

$$|\overline{OD}| = |\overline{OE}| = |\overline{OF}| = y.$$

Sada je $|\overline{AO}| = |\overline{OB}| = 2x + y$ i O je središte kružnice dijametra $|\overline{AB}|$. Primjetimo kako je $\overline{CF}$ os simetrije salinona.

Također, kako su $|\overline{OA}|$, $|\overline{OB}|$ i $|\overline{OC}|$ radijusi iste kružnice vrijedi da je

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 2x + y.$$

Konstruirajmo polovište $\overline{CF}$ i označimo ga točkom P. Kako je $|\overline{OC}| = 2x + y$ i $|\overline{OF}| = y$ slijedi da je

$$|\overline{CF}| = |\overline{OC}| + |\overline{OF}| = 2x + 2y$$

pa je radijus kružnice dijametra $|\overline{CF}|$ jednak $x + y$ i površina tog kruga je $(x + y)^2 \cdot \pi$.

Pogledajmo sada kolika je površina salinona.

Površina polukruga dijametra $|\overline{AB}|$ je

$$\frac{1}{2} \cdot (2x + y)^2 \cdot \pi.$$

Površina polukruga dijametra $|\overline{DE}|$ je

$$\frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \pi.$$

Površina polukrugova dijametara $|\overline{AD}|$ i $|\overline{EB}|$ je

$$\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \pi.$$

Odatle slijedi da je površina saliona jednaka:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \pi \left[(2x+y)^2 - 2x^2 + y^2\right] &= \frac{1}{2} \cdot \pi \left(4x^2 + 4xy + y^2 - 2x^2 + y^2\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \pi \left(2x^2 + 4xy + 2y^2\right) \\
&= \pi(x^2 + 2xy + y^2) \\
&= \pi(x+y)^2.
\end{aligned}$$

Time smo dobili da je površina kruga jednaka površini salinona.

4.2 2. razred gimnazija i tehničkih škola

U drugom razredu gimnazija i tehničkih škola kutak "Bez riječi" ima slabu zastupljenost. U Elementovom udžbeniku [7] za drugi razred ne pojavljuje se niti jedna rubrika, dok se u Elementovom udžbeniku [8] za drugi razred pojavljuje samo jedna rubrika "Bez riječi".

Spomenuta rubrika nalazi se u nastavnoj cjelini "Poliedri i rotacijska tijela" u nastavnoj jedinici "Piramide". Kutak "Bez riječi" nalazi se na kraju nastavne jedinice u zadacima koji pripadaju nastavnoj jedinici i prikazan je na Slici 20.

Bez riječi

OBUJAM KRNJE PIRAMIDE

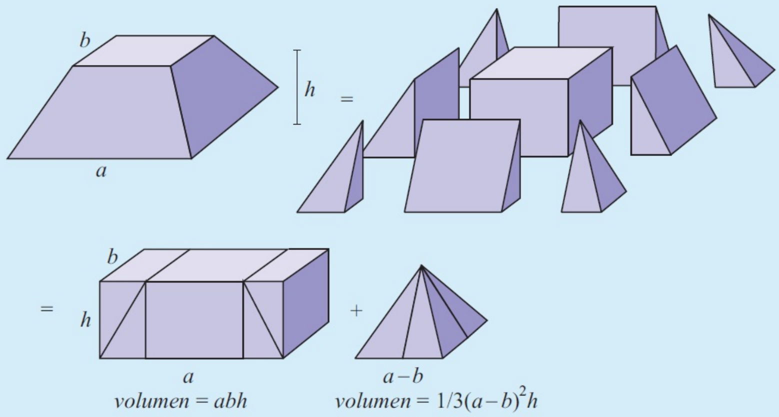
Obujam krnje piramide kojoj su površine osnovaka B i B_1, a visina h, računamo po formuli

$$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1).$$

Posebice, ako je piramida uspravna s kvadratnom osnovkom, tada je njezin obujam jednak

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + aa_1 + a_1^2).$$

Do ove formule možemo doći i na način opisan sljedećim sličicama. Protumačite ih!



Slika 20: *Obujam krnje piramide*

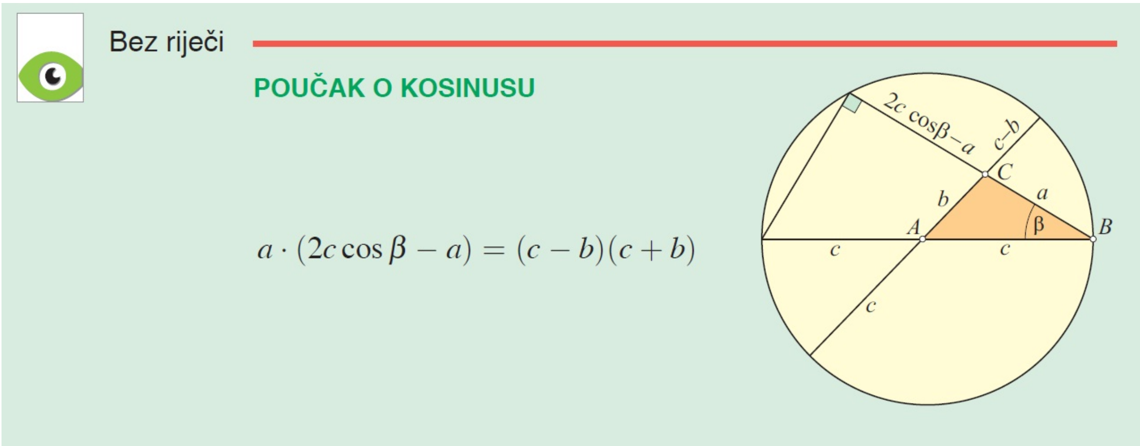
Ako uspravnu četverostranu piramidu presiječemo paralelno s bazom dobivamo ovakvu krnju piramidu. Promatramo krnju piramidu s dvije kvadratne osnovke (kvadrat stranice b i kvadrat stranice a). Krnju piramidu rastavili smo na jednu pravilnu četverostranu prizmu, četiri jednake uspravne trostrane prizme i četiri jednake četverostrane piramide.

Preslagivanjem geometrijskih tijela od pravilne četverostrane prizme i četiri jednake uspravne trostrane prizme dobivamo kvadar obujma $a \cdot b \cdot h$, a preslagivanjem četiri jednake četverostrane piramide dobivamo pravilnu četverostranu piramidu obujma $\frac{1}{3}(a-b)^2h$ pa je obujam krnje piramide:

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot h + \frac{1}{3}(a-b)^2h \\ &= \frac{h}{3} \cdot (3ab + a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \frac{h}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

4.3 3. razred gimnazija i tehničkih škola

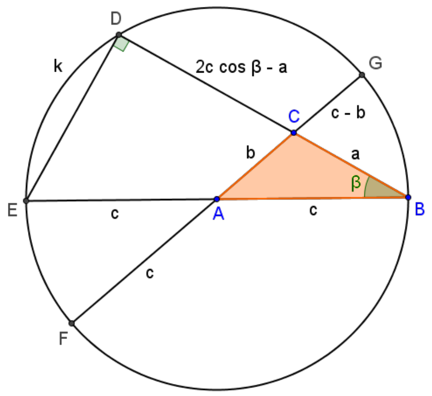
U trećem razredu gimnazija i tehničkih škola slična je situacija kao i u drugom razredu. Rubrika "Bez riječi" pojavljuje se samo jednom u Elementovom udžbeniku [9]. U drugom dijelu udžbenika za treći razred tj. Elementovom udžbeniku [10] se ne pojavljuje niti jednom. Rubrika "Bez riječi" koja se pojavljuje odnosi se na zorni dokaz kosinusovog poučka koji je prikazan na Slici 21. Dokaz se nalazi u zadacima koji pripadaju nastavnoj jedinici "Trigonometrija trokuta" u nastavnoj cjelini "Poučci o trokutu".



Slika 21: *Poučak o kosinusu*

Ono što će učenicima prvo upasti u oko kad gledaju ovu sliku je $\triangle ABC$ koji svojom bojom privlači pozornost na sebe otkrivajući time kako je upravo od njega krenula ova konstrukcija i kako od tog trokuta trebamo krenuti u razmatranje ovog dokaza. Možemo uočiti kako je konstruirana kružnica k sa središtem u točki A polumjera $|\overline{AB}| = c$, odnosno promjera duljine $2c$. Produžimo pravce AB, AC i BC te uvedimo sljedeće oznake:

$$AB \cap k = \{E\}$$
$$BC \cap k = \{D\}$$
$$AC \cap k = \{F, G\}.$$



Slika 22: *Kosinusov poučak*

Iz Slike 22 vidimo kako smo produživanjem pravaca AB i BC dobili $\triangle BED$ koji je po Talesovom teoremu (obodni kut nad promjerom kružnice je pravi) pravokutan. Isto tako vidimo da je $|\overline{CG}| = |\overline{AG}| - |\overline{AC}| = c - b$.

Pogledajmo sada pravokutni trokut BED, iz njega možemo izračunati $|\overline{BD}|$ na sljedeći način:

$$\cos\beta = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{BE}|} \Rightarrow \cos\beta = \frac{|\overline{BD}|}{2c} \Rightarrow |\overline{BD}| = 2c\cos\beta.$$

Pa je tada $|\overline{CD}| = |\overline{BD}| - |\overline{BC}| = 2c\cos\beta - a$.

Učenici su u prvom razredu učili što je to potencija točke s obzirom na kružnicu te im u udžbeniku za prvi razred piše sljedeće: Ako unutar kružnice odaberemo neku točku P i njome položimo dvije tetive, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, tada je $|\overline{AP}| \cdot |\overline{PB}| = |\overline{CP}| \cdot |\overline{PD}|$. Za bilo koji pravac točkom P koji siječe kružnicu u dvjema točkama, A i B, umnožak $|\overline{PA}| \cdot |\overline{PB}|$ je stalan broj i zove se potencija točke s obzirom na kružnicu.

Primjenimo sada to na naš problem, te promatramo potenciju točke C s obzirom na kružnicu $k(A, c)$ pa imamo:

$$\begin{aligned} |\overline{CD}| \cdot |\overline{BC}| &= |\overline{CF}| \cdot |\overline{CG}| \\ (2c\cos\beta - a) \cdot a &= (c + b) \cdot (c - b) \\ 2ac\cos\beta - a^2 &= c^2 - b^2 \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta. \end{aligned}$$

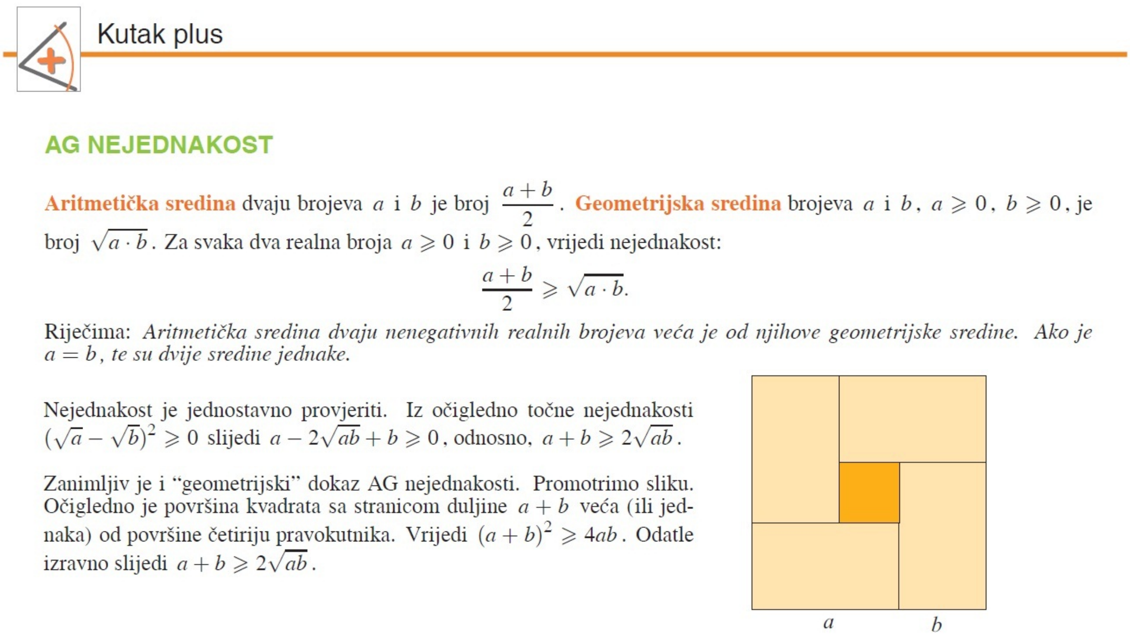
4.4 4. razred gimnazije

U proučavanim Elementovim udžbenicima [11] i [12] za četvrti razred gimnazije ne postoji niti jedna rubrika "Bez riječi".

4.5 Ostali dokazi bez riječi u udžbenicima

U ovom potpoglavlju vidjet ćemo koji se to dokazi bez riječi pojavljuju u udžbenicima, a nisu dio rubrike "Bez riječi", već su na neki način skriveni unutar rubrike "Kutak plus" u kojima učenici mogu produbiti svoje znanje. Kako kažu autori: "Kutak plus sadržava dodatne napomene uz tekuće gradivo. Tim malim dodacima možete upotpuniti i produbiti svoje znanje. Savjetujemo i vama, koji možda mislite kako ti dodatci nisu za vas: ne odustajte olako. Barem pokušajte razumjeti o čemu se radi jer ovdje nije riječ ni o čemu nedostupnom."

Prvi takav dokaz nalazi se u Elementovom užbeniku [5] za prvi razred. Dokaz je dio odjeljka "Kutak plus" i nalazi se u nastavnoj cjelini "Uređaj na skupu realnih brojeva" u nastavnoj jedinici "Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima". Radi se o aritmetičko - geometrijskoj nejednakosti, a u sklopu tog kutka ponuđeno je i objašnjenje geometrijskog dokaza pa ga nećemo dodatno pojašnjavati. Kako to izgleda u udžbeniku prikazano je na Slici 23.



Kutak plus

AG NEJEDNAKOST

Aritmetička sredina dvaju brojeva a i b je broj $\frac{a+b}{2}$. **Geometrijska sredina** brojeva a i b, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, je broj $\sqrt{a \cdot b}$. Za svaka dva realna broja $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$, vrijedi nejednakost:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}.$$

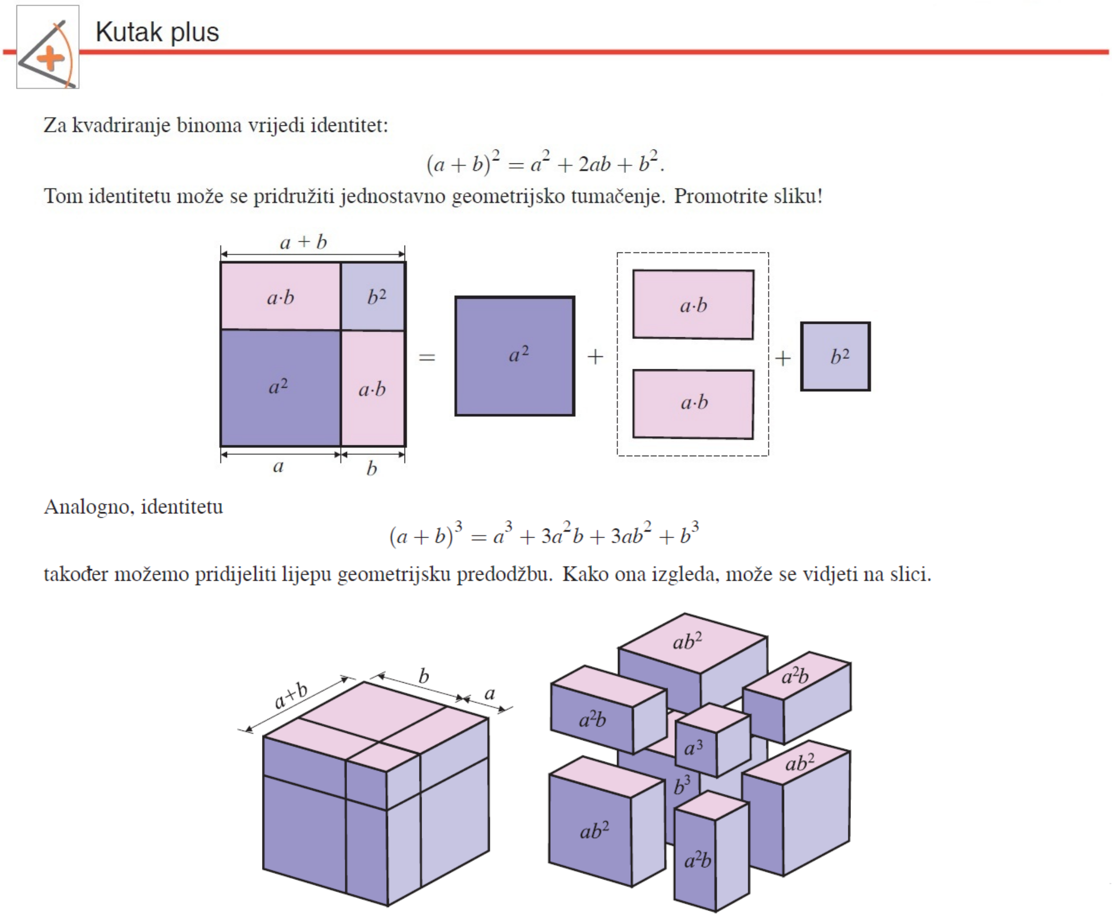
Riječima: *Aritmetička sredina dvaju nenegativnih realnih brojeva veća je od njihove geometrijske sredine. Ako je $a = b$, te su dvije sredine jednake.*

Nejednakost je jednostavno provjeriti. Iz očigledno točne nejednakosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$ slijedi $a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$, odnosno, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Zanimljiv je i "geometrijski" dokaz AG nejednakosti. Promotrimo sliku. Očigledno je površina kvadrata sa stranicom duljine $a + b$ veća (ili jednaka) od površine četiriju pravokutnika. Vrijedi $(a + b)^2 \geqslant 4ab$. Odatle izravno slijedi $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Slika 23: *"Kutak plus": AG nejednakost*

Sljedeći takav dokaz nalazi se u Elementovom udžbeniku [8] za drugi razred. Dokaz se nalazi u odjeljku "Kutak plus", uz već spomenuti dokaz bez riječi za kvadrat zbroja binoma učenicima je prikazan dokaz bez riječi za kub zbroja binoma. Dokaz je prikazan na sljedećoj slici.



Kutak plus

Za kvadriranje binoma vrijedi identitet:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Tom identitetu može se pridružiti jednostavno geometrijsko tumačenje. Promotrite sliku!

Analogno, identitetu

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

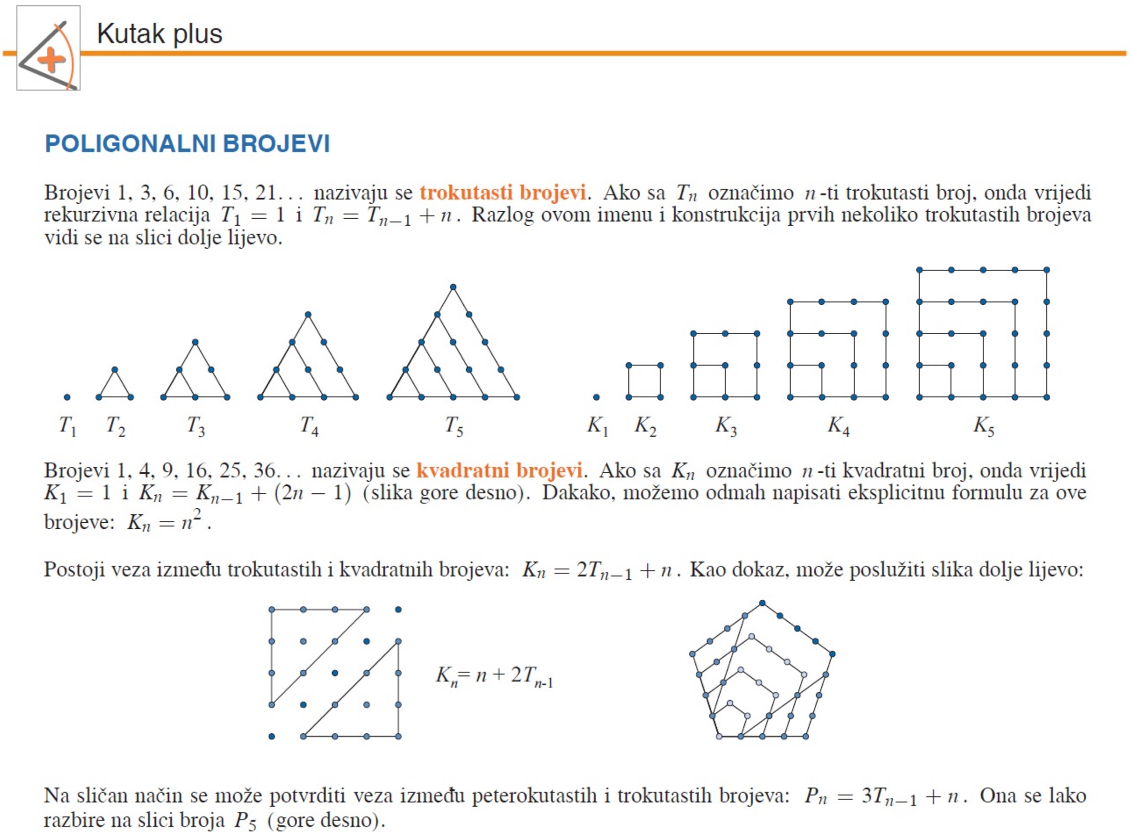
također možemo pridijeliti lijepu geometrijsku predodžbu. Kako ona izgleda, može se vidjeti na slici.

Slika 24: *"Kutak plus": Kub binoma*

Objašnjenje ovog dokaza je vrlo jednostavno. Kocku obujma $(a+b)^3$ rastavili smo na osam geometrijskih tijela: dvije kocke obujma a^3 i b^3, tri jednaka kvadra volumena a^2b te tri jednaka kvadra obujma a^2b. Stoga zaključujemo da je obujam kocke jednak zbroju svih tih obujama, tj.:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3.$$

Zadnji skriveni dokaz bez riječi nalazi se u Elementovom udžbeniku [11] za četvrti razred. U odjeljku "Kutak plus" učenicima je dano objašnjenje poligonalnih brojeva u sklopu nastavne cjeline "Nizovi" u nastavnoj jedinici "Pojam niza. Zadavanje niza." što je prikazano na Slici 25.


Kutak plus

POLIGONALNI BROJEVI

Brojevi 1, 3, 6, 10, 15, 21... nazivaju se **trokutasti brojevi**. Ako sa T_n označimo n-ti trokutasti broj, onda vrijedi rekurzivna relacija $T_1 = 1$ i $T_n = T_{n-1} + n$. Razlog ovom imenu i konstrukcija prvih nekoliko trokutastih brojeva vidi se na slici dolje lijevo.

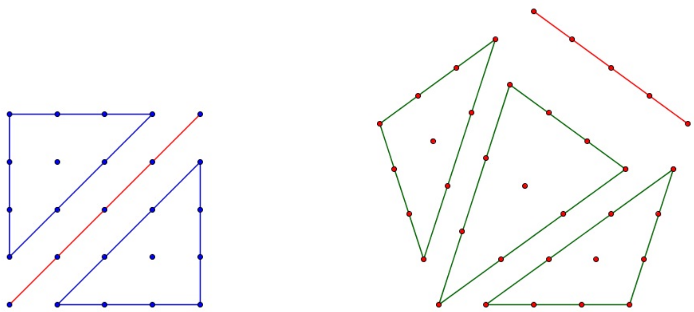
Brojevi 1, 4, 9, 16, 25, 36... nazivaju se **kvadratni brojevi**. Ako sa K_n označimo n-ti kvadratni broj, onda vrijedi $K_1 = 1$ i $K_n = K_{n-1} + (2n-1)$ (slika gore desno). Dakako, možemo odmah napisati eksplicitnu formulu za ove brojeve: $K_n = n^2$.

Postoji veza između trokutastih i kvadratnih brojeva: $K_n = 2T_{n-1} + n$. Kao dokaz, može poslužiti slika dolje lijevo:

Na sličan način se može potvrditi veza između peterokutastih i trokutastih brojeva: $P_n = 3T_{n-1} + n$. Ona se lako razbire na slici broja P_5 (gore desno).

Slika 25: *"Kutak plus": Poligonalni brojevi*

Učenici će ovdje uočiti kako se poligonalni brojevi mogu predstavljati točkicama tako da točkice čine pravilni geometrijski lik, odnosno poligon. U sklopu kutka učenicima je dana veza između kvadratnih i trokutastih brojeva te između peterokutastih i trokutastih brojeva.Te veze prikazane su preko dvije slike koje mogu poslužiti kao dokaz. Spajanjem određenih točkica možemo vidjeti odakle dobivamo veze među spomenutim poligonalnim brojevima (Slika 26).



Slika 26: *Veza kvadratnih i trokutastih brojeva te peterokutastih i trokutastih brojeva*

Kod dokaza bez riječi koji predstavlja vezu između kvadratnih i trokutastih brojeva možemo iz slike uočiti kako n-ti kvadratni broj možemo prikazati pomoću dva $n-1$-va trokutasta broja i tome dodati još broj točkica na dijagonali prikazanog kvadrata tj. n. Stoga imamo:

$$K_n = 2T_{n-1} + n.$$

Dok kod drugog dokaza možemo uočiti kako n-ti peterokutasti broj možemo prikazati pomoću tri $n-1$-va trokutasta broja te još tome moramo dodati broj točkica jedne stranice peterokuta, odnosno n. Pa imamo:

$$P_n = 3T_{n-1} + n.$$

Na ovaj način svaki učenik na lagan način može shvatiti i upamtiti ove veze, a motivacija za daljnje istraživanje poligonalnih brojeva je sigurno zagarantirana.

5 Drugi dokazi bez riječi

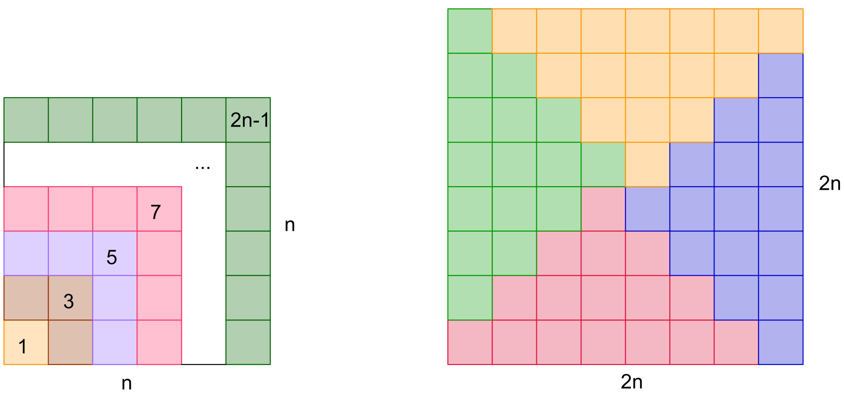
Među drugim dokazima bez riječi pojavit će se dokazi koji bi se, uz ranije spomenute dokaze bez riječi, mogli uključiti u nastavu matematike. Neki od tih dokaza bit će primjereniji za dodatnu nastavu matematike zbog svoje složenosti, no niti jedan dokaz nije toliko složen da ga ne bismo mogli pokazati svim učenicima kako bismo probudili njihovu zainteresiranost.

Također, i u ovom poglavlju proći ćemo kroz dokaze redom, od prvog do četvrtog razreda srednje škole, te ćemo spomenuti u kojem razredu bi određeni dokaz bio primjeren za učenike. Naravno, i učenicima možemo dati ovakve dokaze da ih sami proanaliziraju i ponude nam svoje objašnjenje dokaza bez riječi.

Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

U sklopu "Kutak plus" u prvom razredu učenicima je dano objašnjenje za zbroj prvih n uzastopnih prirodnih brojeva te im je za to dan i dokaz bez riječi koji smo analizirali. U sklopu tog kutka učenicima se objašnjava zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva, no ne i zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva. Stoga, za njih učenicima možemo ponuditi sljedeći dokaz bez riječi, a objašnjenje tog dokaza možemo prepustiti i njima.



$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Slika 27: *Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva*

Na slici su prikazana dva različita dokaza bez riječi za sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva. Brojevi su na slici prikazani pomoću jediničnih kvadrata pa tako npr. za broj tri imamo tri jedinična kvadrata. Već prvi pogled na sliku upućuje na to da će dokaz biti dan preko površine kvadrata.

Na lijevoj slici možemo vidjeti kako slaganjem kvadratića na ovakav način dobivamo kvadrat sa stranicom duljine n. Odnosno možemo pisati da je:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n \cdot n = n^2.$$

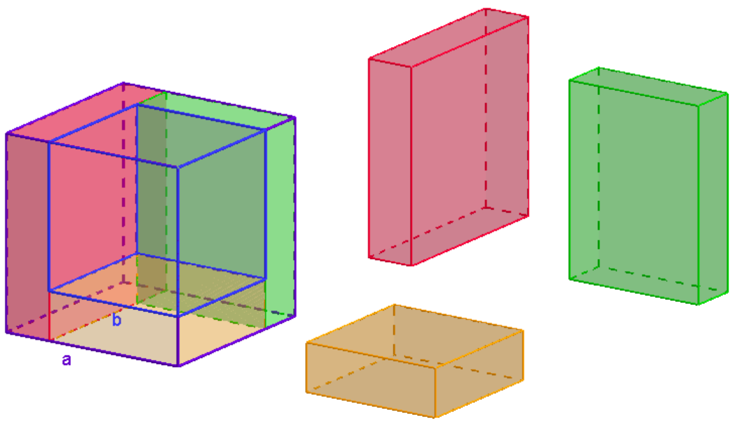
Na desnoj slici imamo sličnu situaciju, samo što je suma prvih n neparnih prirodnih brojeva sada prikazana pomoću "trokuta" kojeg čine jedinični kvadratići. Nadopunjavanjem tog "tokuta" sa tri takva ista "trokuta", na način prikazan na slici, dobivamo kvadrat čija je duljina stranice $2n$. Stoga iz slike možemo uočiti da je:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = \frac{1}{4}4n^2 = n^2.$$

Zbroj i razlika kubova

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), a, b \in \mathbb{R}$$

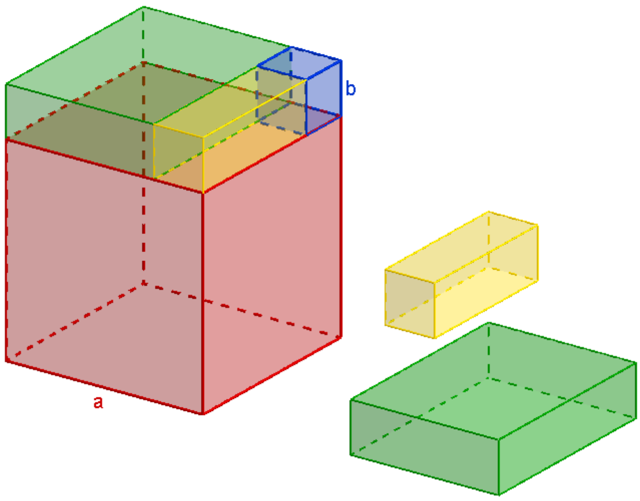
Kao što smo već i rekli, učenici se u prvom razredu susreću sa cjelinom "Potencije i algebarski izrazi" te u sklopu cjeline uče što je to razlika i zbroj potencija. Uz već spomenute dokaze bez riječi ovdje učenicima možemo ponuditi i dokaz bez riječi za zbroj i razliku kubova jer se učenici u osnovnoj školi susreću sa volumenima geometrijskih tijela. Jednostavnom geometrijskom predodžbom učenicima možemo vizualno pojasniti ove izraze koje učenici obično uče napamet.



Slika 28: *Razlika kubova*

U kocku volumena a^3 upisali smo kocku volumena b^3. Ukoliko od volumena a^3 oduzmemo volumen b^3 ostat će nam tri kvadra određenih volumena. Crveni kvadar je volumena $a^2(a-b)$, žuti kvadar je volumena $b^2(a-b)$ i zeleni kvadar je volumena $ab(a-b)$ pa imamo:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^2(a-b) + b^2(a-b) + ab(a-b) \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$



Slika 29: *Zbroj kubova*

Kod dokaza bez riječi za zbroj kubova na kocku volumena a^3 dodali smo kocku volumena b^3. To geometrijsko tijelo nadopunili smo do kvadra volumena $a^2(a+b)$. Gledajući ovu sliku možemo zaključiti kako od velikog kvadra moramo oduzeti dva manja kvadra, koja smo dobili nadopunjavanjem, kako bi došli do zbroja kubova. Žuti kvadar je volumena $b^2(a-b)$, a zeleni kvadar je volumena $ab(a-b)$ stoga imamo:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= a^2(a+b) - (b^2(a-b) + ab(a-b)) \\ &= a^2(a+b) - b(a-b)(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 - b(a-b)) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

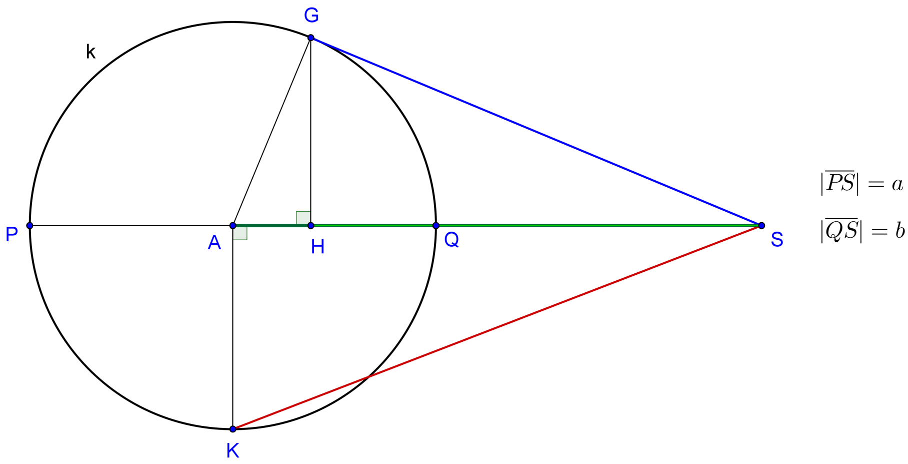
Odnosi među sredinama

$$HS \leq GS \leq AS \leq KS$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, a, b > 0$$

Već u prvom razredu učenici spominju aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu. No, naravno za neke sredine su čuli i prije, jer si npr. svatko od učenika računa prosjek ocjena. Vidjeli smo da im je u udžbeniku dan dokaz bez riječ za odnos aritmetičke i geometrijske sredine u sklopu "Kutak plus" koji je popraćen objašnjenjem. Napomenimo da se nigdje u udžbeniku za prvi razred ne spominje kvadratna sredina, no nju možemo također definirati učenicima uz ove tri sredine kako bi zaokružili priču o poznatim matematičkim sredinama.

Ako bismo učenicima postavili pitanje u kojem su odnosu ove sredine, do odgovora bi naravno mogli doći uvrštavanjem brojeva, što bi se učenici vjerojatno odmah sjetili napraviti. No, sljedeći geometrijski dokaz bez riječi za odnos među sredinama učenike bi više potaknuo na razmišljanje i postavilo bi se pitanje kako smo došli do tog dokaza.



Slika 30: *Odnosi među sredinama*

Promatrajući ovu sliku dano nam je do znanja da krenemo od konstrukcije dužina $\overline{PS}$ i $\overline{QS}$. Konstruiramo dužinu $|\overline{PS}| = a$ i na njoj odaberemo točku Q tako da je $|QS| = b$. Zatim konstruiramo polovište dužine $\overline{PQ}$ i označimo ga točkom A. Vidimo da je $|\overline{PQ}| = a - b$ stoga je:

$$|\overline{AP}| = |\overline{AQ}| = \frac{a-b}{2}$$

pa je

$$|\overline{AS}| = |\overline{AQ}| + |\overline{QS}| = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Time smo dobili aritmetičku sredinu brojeva a i b.

Konstruiramo li kružnicu k sa središtem u A radijusa $|\overline{AQ}|$ te iz točke S povučemo tangentu na kružnicu k pri čemu presjek kružnice i tangente označimo točkom G, možemo zaključiti sljedeće.

Kako je $\angle AGS = 90°$ slijedi da je $\triangle AGS$ pravokutan i vidimo da je $|\overline{AG}| = \frac{a-b}{2}$ pa prema Pitagorinom teoremu vrijedi da je

$$\begin{aligned}|\overline{GS}| = \sqrt{|\overline{AS}|^2 - |\overline{AG}|^2} &= \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4}} = \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je $|\overline{GS}| \leq |\overline{AS}|$ što znači da je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = G$ tj. $\frac{a-b}{2} = 0$ odnosno ako i samo ako je a=b.

Iz točke G sada spustimo okomicu na $\overline{PS}$. Presjek okomice i dužine označimo točkom H. $\triangle GHS$ koji smo dobili spuštanjem okomice je pravokutan trokut. Kako su trokuti $\triangle AGS$ i $\triangle GHS$ slični prema K-K-K poučku o sličnosti ($\angle ASG$ je zajednički i oba trokuta su pravokutna) možemo postaviti sljedeći omjer:

$$\frac{|\overline{HS}|}{|\overline{GS}|} = \frac{|\overline{GS}|}{|\overline{AS}|} \to |\overline{HS}| = \frac{|\overline{GS}|^2}{|\overline{AS}|} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

U pravokutnom trokutu GHS vrijedi da je $|\overline{HS}| \leq |\overline{GS}|$ pa imamo da je

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $G = H$ tj. ako i samo ako je $a = b$.

Sada u točki A povucimo okomicu na $\overline{PS}$, presjek kružnice i okomice označimo točkom K. $\triangle AKS$ je pravokutan i $|\overline{AK}| = \frac{a-b}{2}$. Pa prema Pitagorinom teoremu imamo

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} = |\overline{AS}| \leq |\overline{KS}| = \sqrt{|\overline{AS}|^2 + |\overline{AK}|^2} &= \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\end{aligned}$$

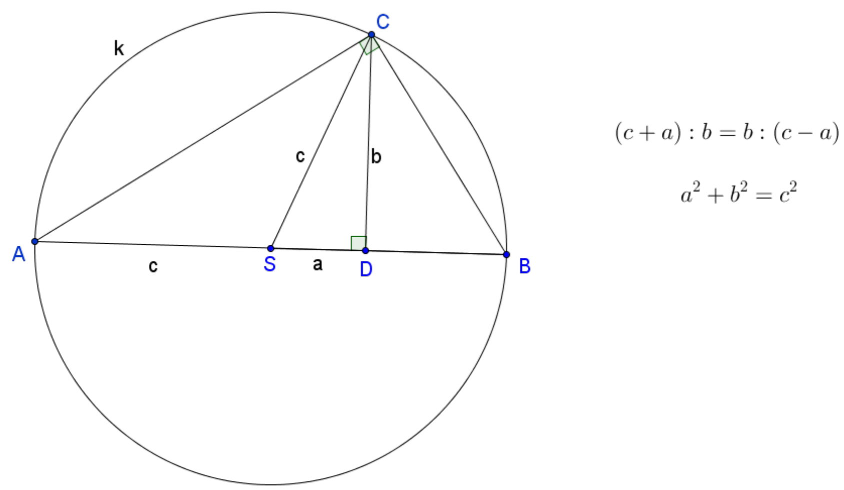
pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = K$, odnosno ako i samo ako je $a = b$.

Time smo objasnili odnos među matematičkim sredinama.

Pitagorin poučak

Ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta tada vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$.

Sa Pitagorinim poučkom učenici se susreću gotovo tijekom cijelog svojeg školovanja i neprestano ga koriste, a dokazi bez riječi za njega su brojni. U prvom razredu Pitagorinom poučku je posvećen jedan "Povijesni kutak" te dva odjeljka "Kutak plus" u nastavnoj cjelini "Sukladnost i sličnost" stoga nije na odmet dati učenicima dokaz bez riječi u kojem će stečeno znanje iz navedene cjeline upotrijebiti na objašnjenje sljedećeg dokaza bez riječi.



Slika 31: *Pitagorin poučak*

Konstruiramo kružnicu $k(S, |\overline{AB}|)$, gdje je $|\overline{AB}| = 2c$. Na $\overline{AB}$ odaberimo točku D tako da je $|\overline{SD}| = a$. Tada je $|\overline{DB}| = c - a$. U točki D podignimo okomicu. Sjecište okomice i kružnice označimo točkom C.

Prema Talesovom teoremu (obodni kut nad promjerom kružnice je pravi) slijedi da je $\angle ACB = 90°$ pa je $\triangle ABC$ pravokutan trokut. Vidimo da su $\triangle BDC$ i $\triangle DCA$ slični i pokažimo to.

Iz D smo povukli okomicu na $\overline{AB}$ pa je $\angle ADC = \angle BDC = 90°$. Iz $\triangle ADC$ vidimo kako je $\angle CAD = 90° - \angle DCA$, dok iz $\triangle ABC$ možemo vidjeti kako je $\angle ACD + \angle BCD = 90°$ pa je $\angle BCD = 90° - \angle DCA$.

Stoga zaključujemo da je $\angle CAD = \angle BCD$. Kako je $\angle ADC = \angle BDC = 90°$ i $\angle CAD = \angle BCD$ slijedi da je i $\angle DCA = \angle DBC$ pa prema K-K-K poučku o sličnosti imamo da je $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Prema tome vrijedi sljedeći omjer:

$$\begin{aligned}\frac{c+a}{b} &= \frac{b}{c-a}\\ b^2 &= (c-a)(c+a)\\ b^2 &= c^2-a^2\\ c^2 &= a^2+b^2.\end{aligned}$$

Heronova formula za površinu trokuta
Površina trokuta ABC jednaka je

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje smo sa s označili poluopseg trokuta, $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Ovim dokazom dat ćemo primjer kako se dokazi bez riječi mogu kombinirati sa standardnim dokazima. U svrhu dokaza Heronove formule za površinu trokuta dokazat ćemo dvije pomoćne tvrdnje koristeći dokaz bez riječi: dokaz bez riječi za površinu trokuta i dokaz bez riječi jednog trigonometrijskog identiteta. Nakon toga iz te dvije tvrdnje sljedit će nam dokaz Heronove formule. Heronovu formulu učenici rade u prvom razredu srednje škole, no kako će se ovdje pojavljivati i dokaz trigonometrijskog identiteta ovaj dokaz je primjereniji za treći razred srednje škole kada se učenici u potpunosti upoznaju sa trigonometrijom.

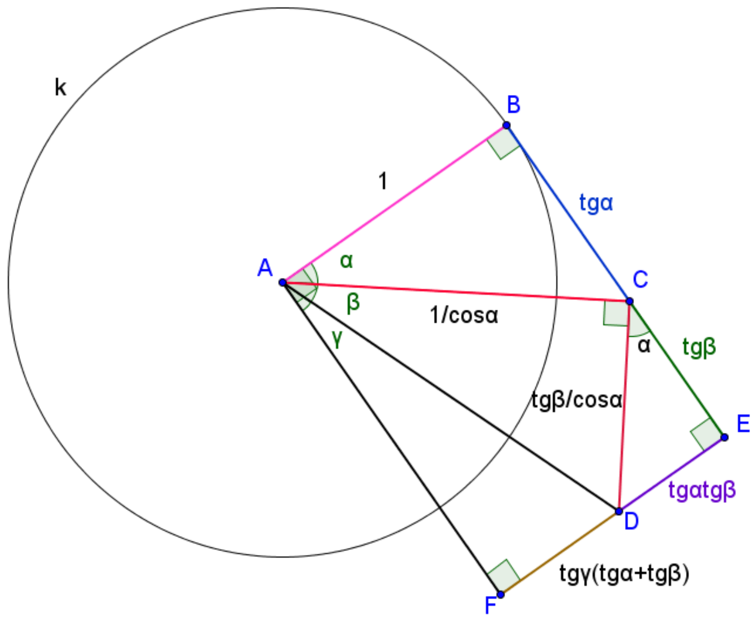
Lema 1
Površina trokuta jednaka je umnošku radijusa upisane kružnice i poluopsega.

Primjetimo da je dokaz bez riječi ove tvrdnje učenicima dan u prvom razredu srednje škole, dokaz je prikazan Slikom 13. Prema tome, površina trokuta je jednaka: $P=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=s\cdot r$. U svrhu našeg dokaza samo ćemo navedenu jednakost kvadrirati pa imamo: $P^2=r^2\cdot s^2$.

Lema 2
Ako su $\alpha,\beta,\gamma>0$ takvi da je $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ tada je

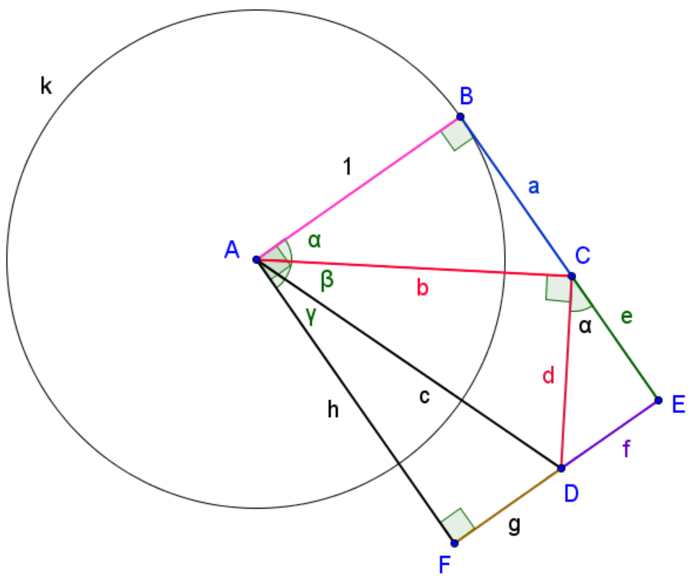
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=1.$$

Dokaz bez riječi dan je Slikom 32.



Slika 32: *Dokaz bez riječi Leme 2*

Objasnimo ovaj dokaz bez riječi i kako smo došli do njega. Najprije konstruiramo pravokutan trokut sa šiljastim kutom α kome je jedna kateta duljine 1.



Slika 33: *Dokaz bez riječi Leme 2*

Sada iz slike vidimo kako je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{1}$ odnosno

$$a = \operatorname{tg}\alpha.$$

Isto tako i $\cos\alpha = \frac{1}{b}$ pa je

$$b = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Nakon toga konstruiramo pravokutni trokut sa šiljastim kutom β i jednom katetom duljine $\frac{1}{\cos\alpha}$. Iz $\triangle ADC$ imamo da je $\operatorname{tg}\beta = \frac{d}{b} = \frac{d}{\frac{1}{\cos\alpha}} = d\cos\alpha$ pa je

$$d = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}.$$

Nadalje, konstruiramo pravokutan trokut sa šiljastim kutom α i jednom katetom duljine $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$. Promatrajući $\triangle CDE$ vidimo da je $\cos\alpha = \frac{e}{d} = \frac{e}{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}} = \frac{e\cos\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Stoga je

$$e = \cos\alpha\,\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$$

i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{e} = \frac{f}{\operatorname{tg}\beta}$ pa je

$$f = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

I na kraju konstruiramo pravokutan trokut sa šiljastim kutom γ kao što je prikazano na slici.

Kako je $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ dobiveni geometrijski lik je četverokut kojemu su nasuprotne strane jednake duljine, odnosno pravokutnik, pa je

$$a + e = h \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = h$$

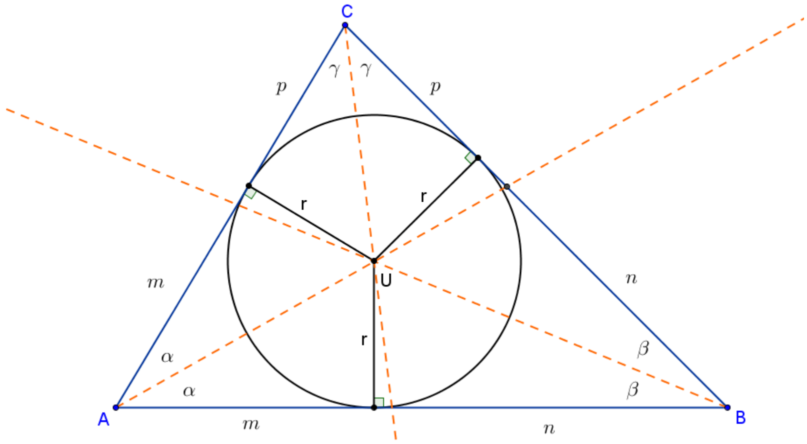
i

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{g}{h} = \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$
$$g = \operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$$

te vrijedi da je

$$f + g = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1.$$

Sada prema prethodnom i iz sljedeće slike vidimo da je:



$$
\begin{aligned}
1 &= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \\
1 &= \frac{r}{m}\cdot\frac{r}{n} + \frac{r}{m}\cdot\frac{r}{p} + \frac{r}{n}\cdot\frac{r}{p} \\
&= \frac{r^2(p+n+m)}{mnp} \\
&= \frac{r^2 s}{mnp} \\
&= \frac{P^2}{smnp}.
\end{aligned}
$$

Kako je $s = m + n + p = m + a = n + b = p + c$ vrijedi da je

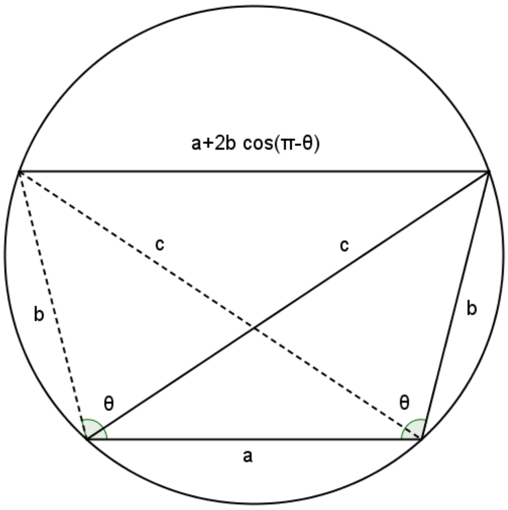
$$P^2 = smnp = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

te smo time dokazali Heronovu formulu.

Kosinusov poučak

Kvadrat stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki umnožak tih stranica i kosinusa kuta između njih.

Prvi dokaz bez riječi koji se pojavljuje u udžbeniku trećeg razreda je dokaz kosinusovog poučka, koji je dan na Slici 21. Promatrajući taj dokaz za vidimo da je kut θ šiljasti kut. Nakon tog dokaza učenicima možemo pokazati dokaz bez riječi kosinusovog poučka gdje je kut θ tupi kut. Zanimljivost ovog dokaza je u tome što učenici moraju primijeniti teorem koji su učili ranije.

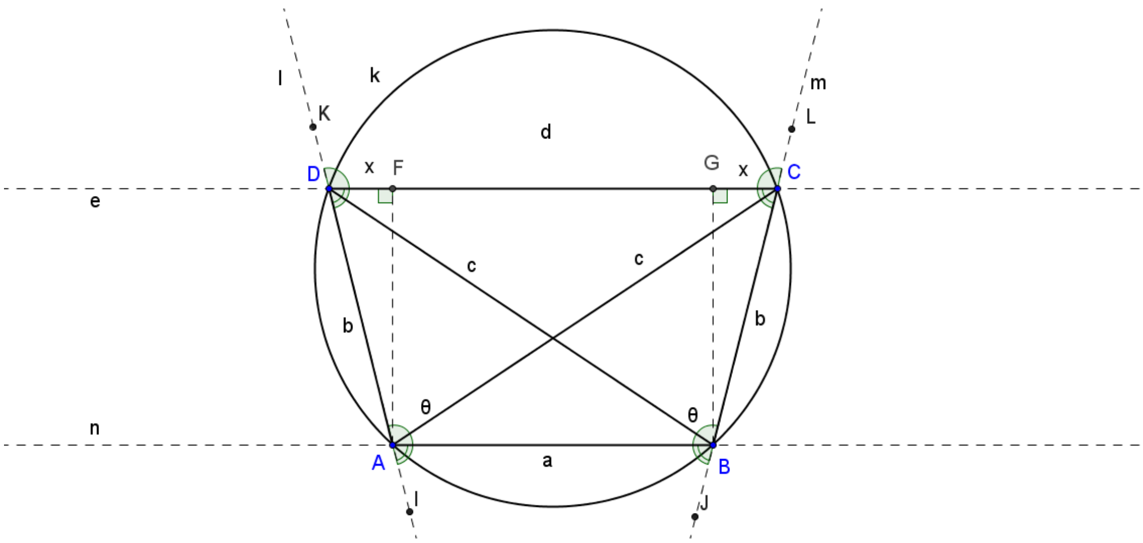


$$c \cdot c = b \cdot b + a \cdot (a + 2b\cos(\pi - \theta))$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Slika 34: *Kosinusov poučak*

Uvedimo sada na Slici 34 neke oznake.



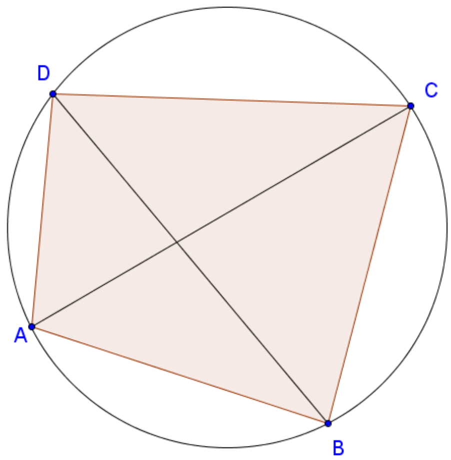
Slika 35: *Kosinusov poučak*

Jednakokračnom trapezu sa osnovicama duljine a i d te krakovima duljine b opisali smo kružnicu. Promatrajući ovaj dokaz bez riječi uočimo jednakosti koje su zapisane sa strane. Iz njih možemo iščitati kako je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica, a iz slike vidimo kako imamo tetivni četverokut što upućuje na to da će nam ključni odgovor u ovom dokazu bez riječi dati Ptolomejev teorem. Ptolomejev teorem učenici rade u prvom razredu , a u njihovom udžbeniku piše:

"Ako je $ABCD$ tetivni četverokut onda vrijedi

$$|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}| + |\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|$$

tj. umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica." [6]



Slika 36: *Ptolomejev teorem*

Pogledajmo sada naš dokaz bez riječi. $\angle DAB = \angle KDC$ jer su to kutovi uz presječnicu l paralelnih pravaca e i n pa je $\angle ADC = 180° - \angle DAB$ tj.

$$\angle ADC = 180° - \theta.$$

Također, $\angle ABC = \theta = \angle DCL$ (kutovi uz presječnicu m paralelnih pravaca e i n) pa je

$$\angle BDC = 180° - \angle ABC = 180° - \theta.$$

Presjek ortogonalne projekcije iz točke A i točke B na pravac e označimo točkama F i G. $\triangle ADF$ i $\triangle BGC$ su sukladni ($\angle DFA = \angle CGB = 90°, b = b$ i $|\overline{AF}| = |\overline{BG}|$ visine trapeza) pa je

$$|\overline{DF}| = |\overline{GC}| = x.$$

Stoga nam je $x = b\cos(\pi - \theta)$ pa je stranica d duljine

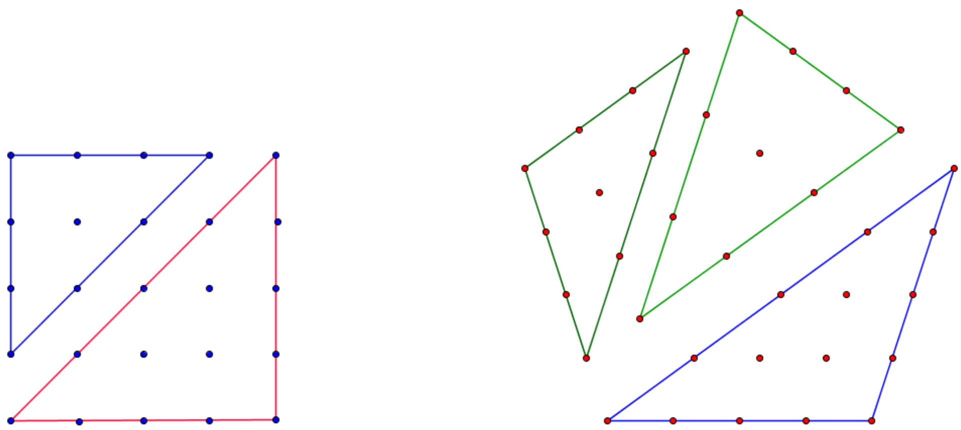
$$d = 2x + a = 2b\cos(\pi - \theta) + a.$$

A kako vrijedi da je $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ slijedi $d = a-2b\cos\theta$. Prema Ptolomejevom teoremu imamo

$$c \cdot c = b \cdot b + a \cdot (a - 2b\cos\theta)$$
$$c^2 = b^2 + a^2 + 2ab\cos\theta.$$

Poligonalni brojevi

U četvrtom razredu srednje škole pojavljuje se dokaz bez riječi za vezu između kvadratnih i trokutastih brojeva te između peterokutastih i trokutastih brojeva unutar kutka plus. Sljedeći dokaz bez riječi govori o tim vezama samo na malo drugačiji način. Već smo spominjali da poligonalne brojeve vizualno možemo predočavati pomoću pravilnih monogokuta pa će i ovaj dokaz bit učenicima prikazan na taj način.



Slika 37: *Veza između kvadratnih i trokutastih te peterokutastih i trokutastih brojeva*

Na lijevoj slici nam je dana veza kvadratnih i trokutastih brojeva. Iz slike možemo vidjeti kako nam je n-ti kvadratni broj prikazan kao suma jednog n-tog trokutastog i $n-1$-vog trokutastog broja tj.

$$K_n = T_n + T_{n-1}.$$

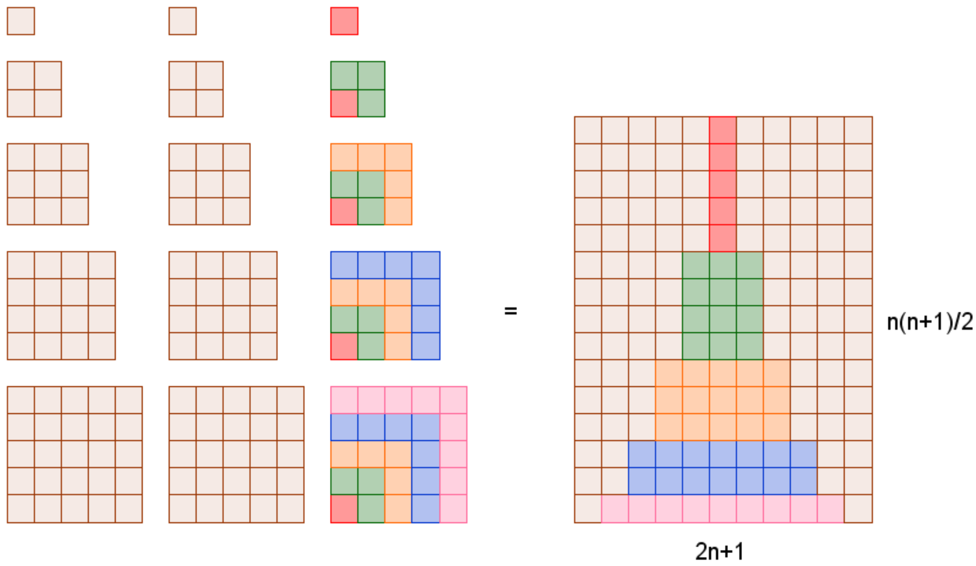
Na desnoj slici dana nam je veza između peterokutnih i trokutastih brojeva. Vidimo iz slike kako će nam n-ti peterokutni broj biti prikazan kao suma jednog n-tog trokutastog broja i dva $n-1$-va trokutasta broja tj.

$$P_n = T_n + 2T_{n-1}.$$

Suma prvih n kvadratnih brojeva

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, n \in \mathbb{N}$$

U četvrtom razredu srednje škole učenici uče pojam niza u sklopu nastavne cjeline "Nizovi", a tu im se često za primjer niza daje niz kvadrata prirodnih brojeva. U prvom razredu učenicima je već pokazan dokaz bez riječi za sumu prvih n prirodnih brojeva, a kao nastavak na to nakon usvojenog pojma niza i sume možemo im dati i dokaz bez riječi za sumu prvih n kvadratnih brojeva.



Slika 38: *Suma prvih n kvadratnih brojeva*

Za dokaz bez riječi korišteni su jedinični kvadratići preko kojih je jednostavno objašnjena suma prvih n kvadratnih brojeva. Sa slike možemo vidjeti kako smo svaki broj niza predstavili određenim brojem jediničnih kvadrata. Sa lijeve strane jednakosti uočimo kako smo tri puta vizualno predočili sumu prvih n kvadratnih brojeva. Preslagivanjem jediničnih kvadrata dobivamo pravokutnik kome su duljine stranica $\frac{n(n+1)}{2}$ i $2n + 1$. Odatle je

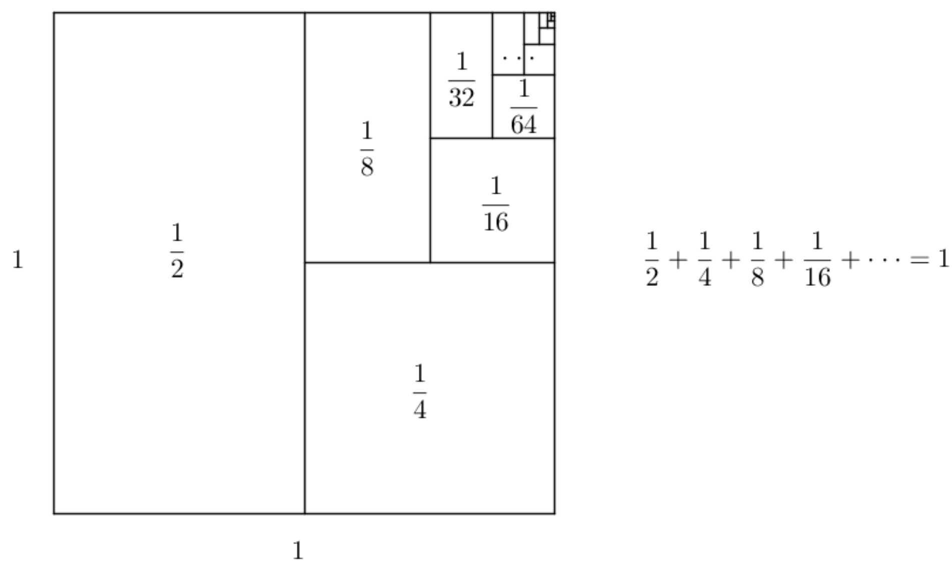
$$3 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1) / : 6$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Suma geometrijskog reda

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Također, učenici u četvrtom razredu pod istom nastavnom cjelinom "Nizovi" uče što je geometrijski red te sumu geometrijskog reda. Dokaz bez riječi za sumu geometrijskog reda $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ dan je sljedećom slikom.



Slika 39: *Suma geometrijskog reda*

Ako je stranica kvadrata duljine 1 i taj kvadrat počnemo dijeliti na pola pa opet polovinu na pola itd. dobit ćemo upravo ovaj zbroj stoga možemo zaključiti kako će suma ovog geometrijskog reda biti jednaka 1 tj.:

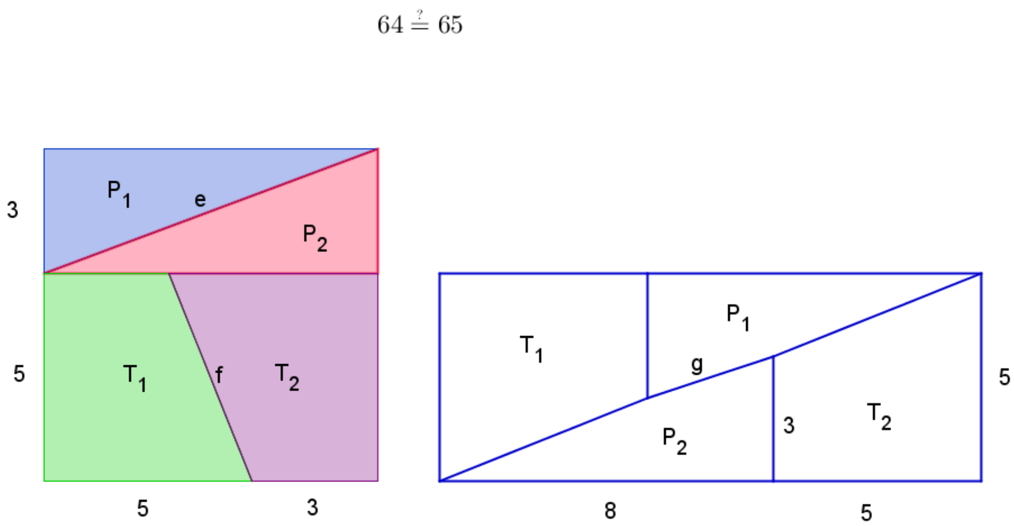
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1.$$

6 Poteškoće pri vizualizaciji

Postoje prepreke i poteškoće koje sprječavaju da vizualizacija bude više zastupljena u obrazovnom procesu. Jedan od njih je i mišljenje kako vizualizacija dovodi do pogrešaka. Sasvim je istina kako nas loše napravljena slika ili skica može dovesti do pogrešnog zaključka i navesti na krivi put rješavanja problema. Ponekad se lošom slikom može prikazati situacija koja se ne odvija ili se ne može desiti u promatranom problemu. Tada se događa da nas naša intuicija odvede u sasvim suprotnom smjeru.

Koristeći samo vizualizaciju može se dogoditi da prihvatimo određene veze koje su iz slike očite, a ustvari se ne pojavljuju. Zato u tim situacijama moramo dati opravdano objašnjenje onoga što tvrdimo kako bismo zaključili što je istinito.

Klasičan primjer kod kojeg nas vizualizacija može dovesti do pogreške je "dokaz" bez riječi tvrdnje 64=65.



Slika 40: *64=65*

Na Slici 40 vidimo kvadrat duljine stranice 8. Taj kvadrat podijeljen je na četiri dijela: dva sukladna trapeza T_1 i T_2 s osnovicama 5 i 3 i visinom duljine 5 te dva sukladna pravokutna trokuta P_1 i P_2 kojima su duljine kateta 5 i 3. Pomoću tih dijelova preslagivanjem je dobiven pravokutnik sa stranicama duljina 5 i 13. Površina kvadrata je $8^2 = 64$, dok je površina pravokutnika $13 \cdot 5 = 64$ pa se na prvi pogled čini kako je 64=65.

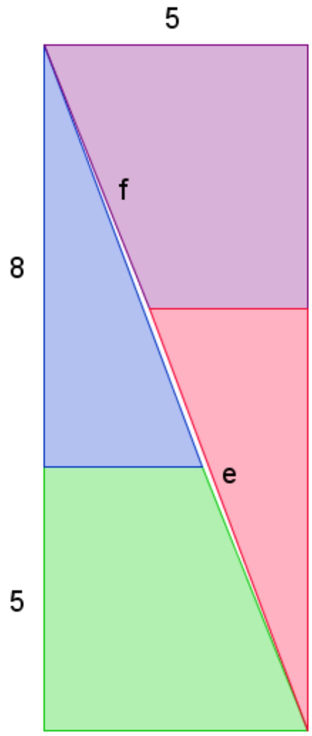
Što ne valja? Gdje je greška?

Sa e smo označili duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta, sa f smo označili duljinu kraka trapeza, a sa g duljinu dijagonale pravokutnika. Prema Pitagorinom poučku vrijedi da je $e = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \approx 5.544$, $f = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5.3852$ i $g =$

$\sqrt{13^2+5^2} = \sqrt{194} \approx 13.9284$. Očito je

$$e + f < g$$
$$\sqrt{29} + \sqrt{73} < \sqrt{194},$$

odnosno ove duljine čine trokut pa se na slici krije paralelogram sa stranicama duljina $\sqrt{29}$ i $\sqrt{73}$ čija je površina $65 - 64 = 1$.



Slika 41: *64=65*

Matematičko razmišljanje nije potpuno ostvareno samo kroz formalno izlaganje koje je kontrolirano u svakom koraku, već se može uspješno nadopuniti vizualizacijskim tehnikama poput dokaza bez riječi koje nam stvaraju novu dimenziju u matematici. Istina je da svaku sliku moramo potkrijepiti tvrdnjom i dokazati njenu istinitost, ali takva slika onda nam daje pravi matematički dokaz jer time znamo što se krije iza te slike. Ljepotu toga da samo pogledaš u sliku i možeš shvatiti što ti ona govori ne može zamijeniti niti jedan formalni dokaz.

Ograničavajuća okolnost i nedostatak za ovakav način vizualnog dokazivanja je i manjak vremena. Učenicima se pokušava što više objasniti i pokazati u raspoloživom intervalu vremena. Stoga jedino upornost i samostalan rad učenika može rezultirati dobrim ishodom, ali na nama je da učenike zainteresiramo za primjenu vizualizacije u matematici i time nekim učenicima olakšamo učenje i shvaćanje matematike.

7 Računalo kao pomoć

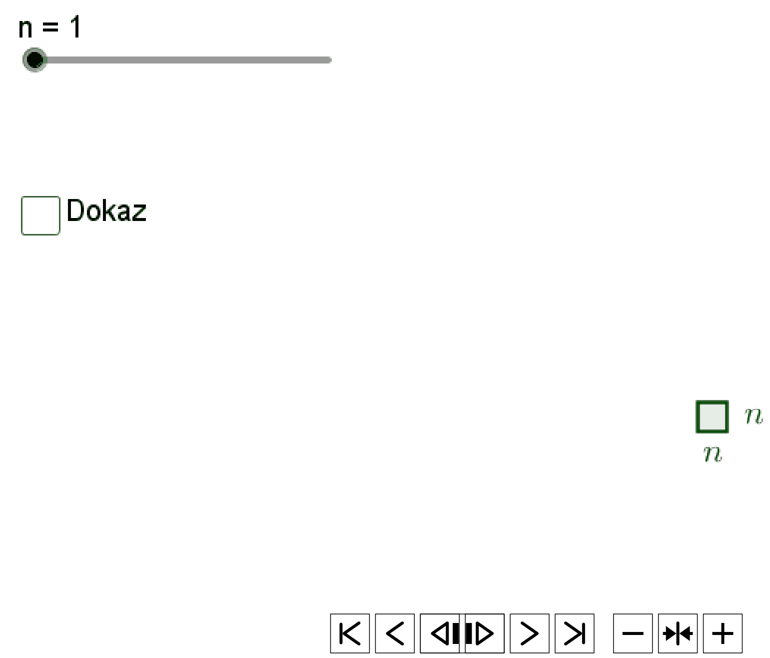
Naravno da upotreba vizualizacije može biti teška. Vizualizacija općenito kao intelektualni proces koji je direktan ne zahtjeva mnogo napora, no u matematici zna predstavljati problem. Postoje učenici koji će lakše razmišljati vizualno, a naravno i oni drugi. Učenici koji su vizualni tipovi i koji su dovoljno pripremljeni i potkovani znanjem znat će vizualizaciju koristiti na efikasan način.

Dokaze bez riječi koje smo naveli i naravno sve ostale dokaze možemo vizualizirati uz pomoć naše mašte i pomoćnih alata kao što su kreda, ploča, olovka, papir... No, već smo napomenuli kako nam slika može prikazati samo jedan slučaj problema što nekada zna biti zbunjujuće jer dokazujemo općenite tvrdnje.

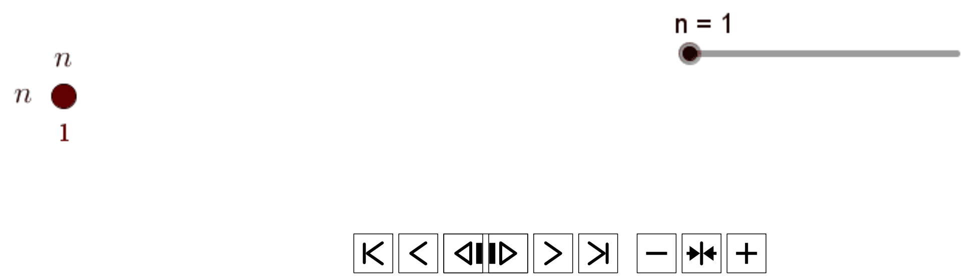
U današnje doba tehnologija nam pruža mnogo mogućnosti koje mogu poboljšati i unaprijediti nastavu matematike. Koristeći interaktivne materijale, dinamične slike i računalne programe pomoću kojih će učenici bolje shvatiti i razumjeti gradivo možemo obogatiti nastavu matematike.

Računalni programi koje možemo koristiti u nastavi su npr. Matlab, Sketchpad, GeoGebra... Svi ti programi daju našim dokazima bez riječi novu dimenziju. U nastavku ćemo prezentirati nekoliko primjera dokaza bez riječi iz rada napravljenih u računalnom programu GeoGebra. GeoGebra je besplatni računalni matematički program lagan za korištenje i interaktivno podučavanje.Na sljedećim slikama možemo vidjeti kako dokazi bez riječi izgledaju kao animacije u GeoGebri.

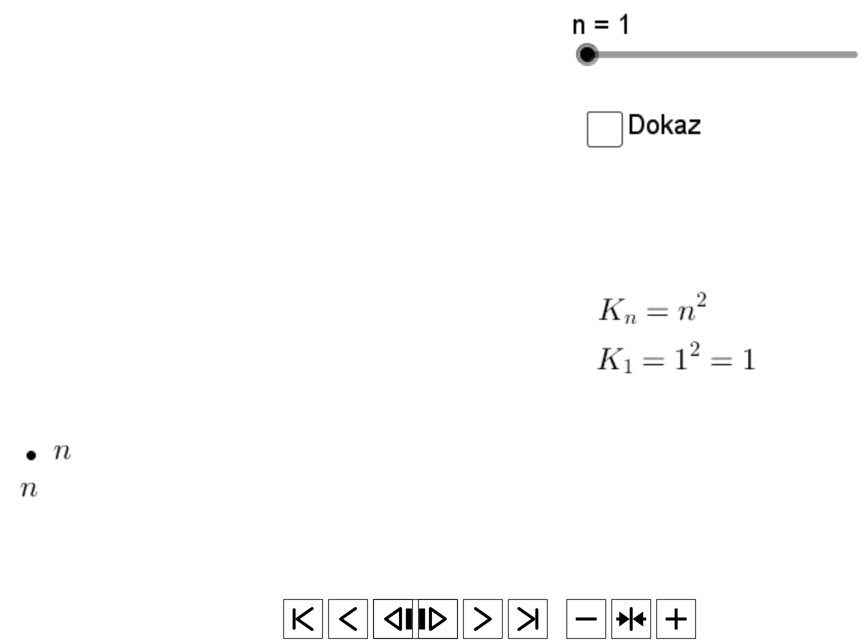
Suma prvih n prirodnih brojeva



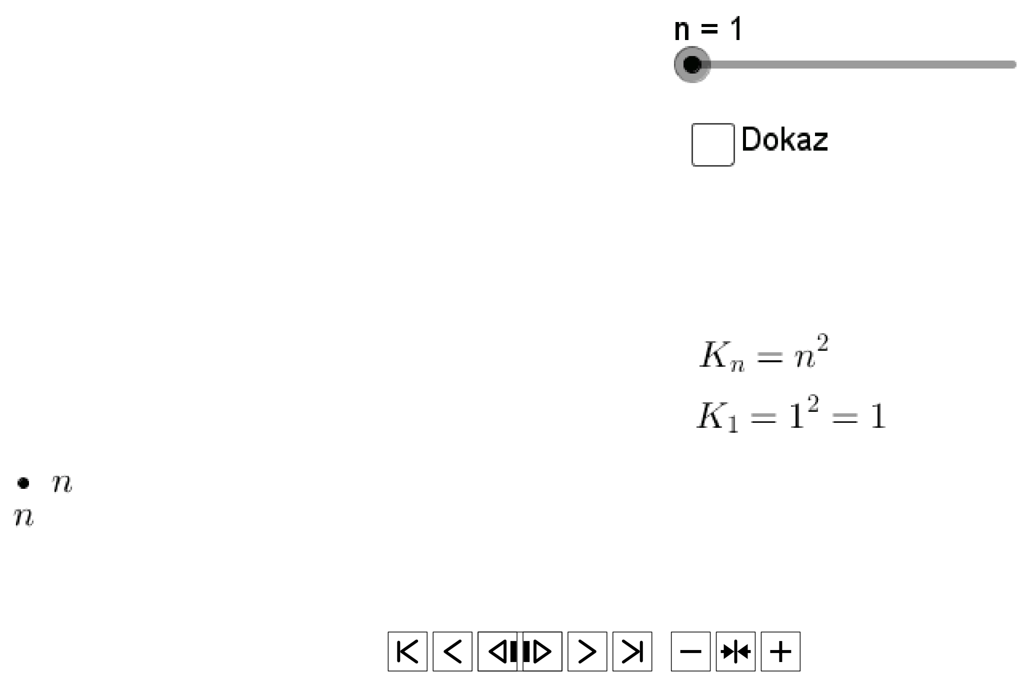
Suma prvih n neparnih prirodnih brojeva



Veza kvadratnih i trokutastih brojeva - prvi način



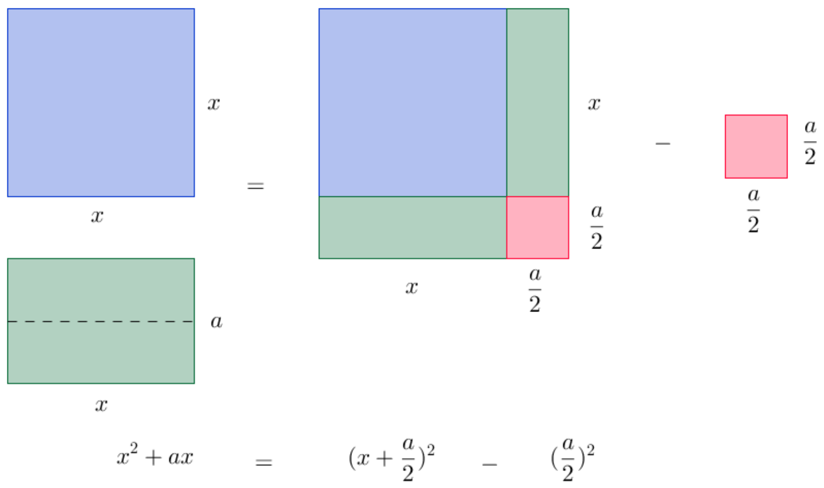
Veza kvadratnih i trokutastih brojeva - drugi način



Svaki primjer je napravljen kao animacija kako bi bilo što zanimljivije učenicima. Time oni mogu vidjeti što se događa za više slučajeva. Naravno, opet ne možemo to prikazati na općenitoj razini, ali ovakve animacije su svakako uvjerljivije od samih crteža. Interaktivni materijali uključuju učenike u nastavni proces i omogućuju učenje matematike na zabavni način.

8 Zaključak

Nakon svega možemo zaključiti kako vizualizacija ima važno mjesto u podučavanju i učenju matematike. Kao što kaže i izreka "Čujem i zaboravim. Vidim i zapamtim. Uradim i shvatim." vizualizacija može samo pomoći pri procesu učenja, kao kod vizualnog primjera za nadopunu do potpunog kvadrata s čime se učenici često muče, na sljedećoj slici.



Slika 42: *Nadopunjavanje do potpunog kvadrata*

Ovakva vizualna pojašnjenja, kao i dokazi bez riječi sigurno će potaknuti učenike i učiniti im matematiku zanimljivijom. Kao što smo vidjeli, možemo kombinirati različite tehnike, formalne i vizualne, kako bi došli do željenih rezultata, a ponekad će nam jedna slika dati i više različitih zaključaka.

Što se tiče zastupljenosti dokaza bez riječi u promatranim udžbenicima, u prvom razredu pojavljuje se čak dvanaest dokaza bez riječi. U višim razredima je to znatno manje: u drugom razredu dva, u trećem razredu jedan i u četvrtom razredu jedan dokaz bez riječi. Možda je razlog tome složenije gradivo u višim razredima srednjih škola.

U svakom slučaju, upotreba vizualizacije u učenju, istraživanju i ostalim matematičkim aktivnostima je u porastu. Činjenica da nas vizualizacija može dovesti do pogrešaka ne bi trebala biti dobar argument za protiv korištenja vizualizacije u matematici jer vizualizacija u matematici može biti jako efikasna i učinkovita u različitim procesima matematičke aktivnosti. Nekada nas i formalne tehnike mogu dovesti do pogreške što nije razlog da prestanemo s takvim načinom rješavanja. Pogreške bismo trebali shvatiti kao nešto prirodno što nas tjera na rad, a u matematici nas nekad mogu dovesti i do novih otkrića.

Literatura

[1] C. Alsina, R. B. Nelsen, Math Made Visual - Creating Images for Understanding Mathematics, The Mathematical Association of America, 2006.

[2] A. Bogomolny, *Cut The Knot! - Proofs Without Words* , dostupno na: `http://www.cut-the-knot.org/ctk/pww.shtml`

[3] A. Čižmešija, D. Marić, *Dokaz bez riječi kao metoda uvođenja dokaza u nastavu matematike*, PMF Matematički odjel, Zagreb, dostupno na: `http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/Dokazi_bez_rijeci.pdf`

[4] B. Dakić, *Metodika: Bez riječi*, Matematika i škola, 206-213, broj 55, 2010.

[5] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[6] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[7] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[8] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[9] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[10] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[11] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 1. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[12] B. Dakić, N. Elezović, *MATEMATIKA 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, 2. dio*, Element d.o.o., 2014., Zagreb

[13] T. Doyle, L. Kutler, R. Miller, A. Schueller, *Proofs Without Words and Beyond*, Convergence, dostupno na: `http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond`

[14] E. Forhan, Polygonal Numbers and Finite Calculus, 14.11.2007, dostupno na `http://documents.kenyon.edu/math/Forhan07.pdf`

[15] M. de Guzmán, *The role of visualization - In the Teaching and Learning of Mathematical Analysis*, Univerzidad Complutense de Madrid, 2002., Španjolska, dostupno na: http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf

[16] V. J. Katz, F. J. Sweet, *Mathematical Treasures - Oliver Byrne's Euclid*, Convergence, dostupno na: http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/mathematical-treasures-oliver-byrnes-euclid (05.02.2015.)

[17] Lj. Kuljanac, S. Varošanec, *Dokaz bez riječi, 64=65 i zlatni rez*, Math.e, broj 8, lipanj 2006.

[18] Z. Kurnik, *Iz rječnika metodike: Načelo primjerenosti*, Matematika i škola, broj 48, 100-105, 2010.

[19] Z. Leljak Pavleković, *Rad s udžbenikom*, Matematika i škola, broj 14, 158-160, 2002.

[20] R. L. Miller, *On Proofs Without Words*, Whitman College, Washington, 2012., dostupno na: http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf

[21] R. B. Nelsen, Proofs without words - exercises in visual thinking, The Mathematical Association of America, 1993.

[22] B. Rosken, K. Rolka, *A picture is worth a 1000 words - The role of visualisation in mathematics Learning*, University of Duisburg - Essen, 2006, Germany, dostupno na: ftp://ftp.gwdg.de/pub/EMIS/proceedings/PME30/4/457.pdf

[23] D. Tall, *The psycology of advanced mathematical thinking: Biological brain and mathematical mind*, Proceedings of the 18. Conference of the International Group for the Psyhology of Mathematics Education (Vol. 1), 1994, Portugal

[24] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta, *Udžbenički standard*, Republika Hrvatska, 2013

[25] https://element.hr/static/nova-matematika/index.html, (03.03.2015.)

[26] http://www.ck12.org/book/CK-12-Algebra-II-with-Trigonometry-Concepts/r3/section/6.6/ (03.05.2015)

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su dokazi bez riječi te što je novo u nastavi matematike vezano za dokaz bez riječi. U radu je na samom početku navedeno što je vizualizacija i kako nam ona pomaže u nastavi matematike. Zatim je kratko opisano što je to dokaz bez riječi te kako se upotreba i prihvaćanje ovakve vrste dokazivanja razvijala kroz povijest. Nakon toga razmatra se koji se dokazi bez riječi pojavljuju u udžbenicima te su navedeni još neki dokazi koji bi se također mogli uvesti u nastavu matematike. Zatim je primjerom dano koje su poteškoće kod ovakve vrste dokazivanja u matematici. Na samom kraju diplomskog rada spomenuto je kako nam računalo pomaže u nastavi matematike te su prezentirani neki primjeri animacija dokaza bez riječi rađenih u programskom paketu GeoGebra.

Summary

The theme of this thesis is proofs without words, and what is new in the teaching of mathematics in relation to proofs without words. In this paper it is noted at the very beginning what is visualization and how it helps us in teaching mathematics. Then it is briefly described what is proofs without words and how the use and acceptance of this kind of evidence developed through history. After that it is considered what proofs without words appear in textbooks and some other evidences are listed that could be introduced into the teaching of mathematics. Then some difficulties that are met with this kind of proofing in mathematics are given by example. At the very end of this thesis it is mentioned how a computer can help us in mathematics teaching and some proofs without words animation examples are presented in a software called GeoGebra.

Životopis

Marija Tomašević rođena je 05. lipnja 1989. godine u Novoj Gradišci. Živi u Rešetarima gdje je pohađala Osnovnu školu Ante Starčevića. Nakon završetka osnovne škole upisala je Elektrotehničku školu u Novoj Gradišci smjer Tehničar za računalstvo. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2008. godine upisuje Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.