

Odjel za matematiku

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Matematički praktikum

Globalna optimizacija

R. Scitovski, K. Sabo, I. Vazler

1 Uvod i motivacija

Na početku navedimo nekoliko praktičnih primjera u kojima se pojavljuje problem traženja globalnog minimuma funkcije jedne ili više varijabli.

Primjer 1. (Geometrijski medijan)

Za dani skup točaka–podataka $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ s odgovarajućim težinama $w_i > 0$ treba pronaći točku $c^* = (c_1^*, \dots, c_n^*) \in \mathbb{R}^n$, takvu da je

$$c^* = \operatorname{argmin}_{c \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m w_i d_2(c, a^i),$$

tj. točku u kojoj se postiže globalni minimum funkcionala

$$F_2(c) = \sum_{i=1}^m w_i d_2(c, a^i) = \sum_{i=1}^m w_i \sqrt{\sum_{s=1}^n (c_s - a_s^i)^2} = \sum_{i=1}^m w_i \|c - a^i\|_2. \quad (1)$$

Točka c^* zove se **težinski geometrijski median** skupa vektora \mathcal{A} (odnosno skupa točaka \mathcal{A}) i ne može se eksplicitno izraziti.

Primjer 2. (Reprezentant podataka na jediničnoj kružnici)

Zadan je skup realnih brojeva $t_1, \dots, t_m \in [0, 2\pi]$ s odgovarajućim težinama $w_1, \dots, w_m > 0$, pomoću kojih gradimo skup točaka $\mathcal{A} = \{a^i(t_i) = (\cos t_i, \sin t_i) \in \mathbb{R}^2 : t_i \in [0, 2\pi]\}$, na jediničnoj kružnici $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Treba odrediti točku $c^*(t^*) \in K$ koja će što bolje reprezentirati skup točaka \mathcal{A} .

Funkcija $d_K : A \times A \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$d_K(a(t_1), b(t_2)) = \begin{cases} |t_1 - t_2|, & \text{if } |t_1 - t_2| < \pi, \\ 2\pi - |t_1 - t_2|, & \text{if } |t_1 - t_2| > \pi. \end{cases} \quad (2)$$

je metrička funkcija na K .

Točka $c^*(t^*) \in K$ je najbolji reprezentant skupa \mathcal{A} s težinama $w_1, \dots, w_m > 0$ u odnosu na metričku funkciju d_K onda ako je

$$c^*(t^*) = \operatorname{argmin}_{t \in [0, 2\pi]} \sum_{i=1}^m w_i d_K(c(t), a^i(t_i)), \quad (3)$$

tj. ako je $c^*(t^*) \in K$ točka globalnog minimuma funkcionala $F: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$F(t) = \sum_{i=1}^m w_i d_K(c(t), a^i(t_i)). \quad (4)$$

Primjer 3. (Najbolji TLS-pravac)

Za dani skup točaka $\mathcal{A} = \{T_i = (x_i, y_i): i = 1, \dots, m\}$ s težinama $w_1, \dots, w_m > 0$ treba odrediti pravac p u ravnini oblika $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, tako da suma kvadrata euklidskih l_2 udaljenosti točaka T_i do pravca p bude minimalna. U literaturi takav pravac se naziva “the best Total Least Squares line”, a rješenje je sljedećeg nelinearnog problema globalne optimizacije

$$\operatorname{argmin}_p \sum_{i=1}^m w_i d_{LS}(T_i, p) = \operatorname{argmin}_{a,b,c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m w_i \frac{(ax_i + by_i + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Primijetite da smo ovaj problem razmatrali ranije tako da smo tražili svojstveni vektor koji odgovara najmanjoj svojstvenoj vrijednosti odgovarajuće kovarijacijske matrice. Inače ovdje se radi o problemu globalne optimizacije nelinearne, ali diferencijalne funkcije tri varijable.

Primjer 4. (Najbolji OD pravac)

Za dani skup točaka $\mathcal{A} = \{T_i = (x_i, y_i): i = 1, \dots, m\}$ s težinama $w_1, \dots, w_m > 0$ treba odrediti pravac p u ravnini oblika $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$, tako da suma euklidskih l_2 udaljenosti točaka T_i do pravca p bude minimalna. U literaturi takav pravac se naziva “the best Orthogonal Distance line”, a rješenje je sljedećeg nelinearnog problema globalne optimizacije

$$\operatorname{argmin}_p \sum_{i=1}^m w_i d_2(T_i, p) = \operatorname{argmin}_{a,b,c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m w_i \frac{|ax_i + by_i + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Primijetite da se ovdje radi o problemu globalne optimizacije nelinearne nediferencijalne funkcije tri varijable.

Primjer 5. (Euklidska udaljenost točke do parabole)

Treba izračunati l_2 udaljenost točke $T_0 = (3, 4)$ do kubne parabole $q(x) = .5x^3 - 6x + 2$. Primijetite da je l_2 udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ do neke točke $T = (x, q(x))$ na grafu funkcije q zadana s

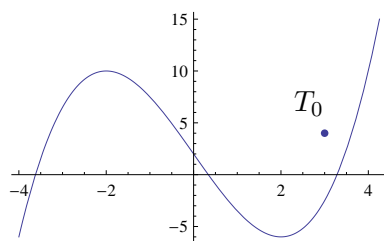
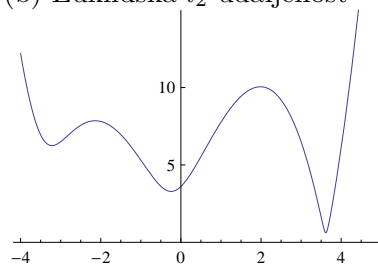
$$\delta_2(x) = d_2(T_0, T) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (q(x) - y_0)^2},$$

pa je određivanje udaljenosti točke T_0 do grafa funkcije q zadane na intervalu $[a, b]$ problem određivanja globalnog minimuma funkcije δ_2 na intervalu $[a, b]$ (vidi Sliku 1).

Je li funkcija δ_2 neprekidno diferencijabilna na segmentu $[a, b]$?

Budući da je funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ monotono rastuća funkcija, onda se naš problem može svesti na određivanje globalnog minimuma polinoma 5-tog stupnja

$$f(x) = (x - x_0)^2 + (q(x) - y_0)^2.$$

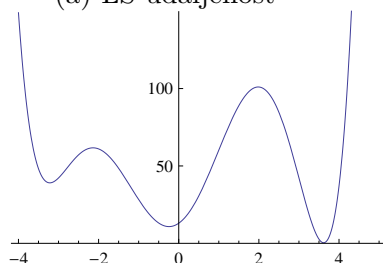
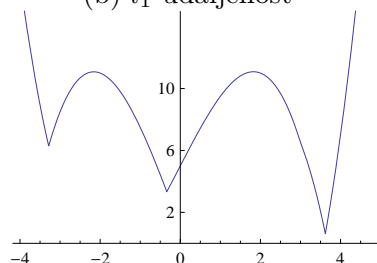
(a) $q(x) = .5x^3 - 6x + 2$; $T_0 = (3, 4)$ (b) Euklidska l_2 udaljenostSlika 1: Euklidska udaljenost točke T_0 do parabole q **Primjer 6.** (l_1 -udaljenost točke do parabole)

Treba odrediti l_1 -udaljenost točke $T_0 = (3, 4)$ do kubne parabole $q(x) = .5x^3 - 6x + 2$. Primijetite da je l_1 -udaljenost točke T_0 do neke točke $T = (x, f(x))$ na grafu funkcije q zadana s

$$\delta_1(x) = d_1(T_0, T) = |x - x_0| + |q(x) - y_0|,$$

pa je određivanje udaljenosti točke T_0 do grafa funkcije q zadane na intervalu $[a, b]$ problem određivanja globalnog minimuma funkcije δ_1 na intervalu $[a, b]$. Dakle, i u ovom primjeru radi se također o problemu jednodimenzionalne minimizacije, ali ovaj puta je minimizirajuća funkcija nediferencijabilna. Također iz slike se može uočiti da ova funkcija ima tri lokalna minimuma od kojih je jedan ujedno i globalni minimum.

(a) LS-udaljenost

(b) l_1 udaljenostSlika 2: LS i l_1 udaljenost točke T_0 do parabole q

2 Kvazikonveksne i unimodalne funkcije

Problem: Neka je $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Treba pronaći

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in D} f(x) \subseteq D \quad \text{i vrijednost} \quad f(x^*) = \min_{x \in D} f(x) =: f^*.$$

Oznaka: $\operatorname{argmin}_{x \in D} f(x)$ – skup svih globalnih minimizatora funkcije f

Konveksan skup: Kažemo da je skup $D \in \mathbb{R}^n$ konveksan ako je za svaki $x, y \in D$,

$\alpha x + (1 - \alpha)y \in D$ za svaki $\alpha \in [0, 1]$;

Konveksna funkcija: Kažemo da je funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna na D ako $\forall x, y \in D$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1];$$

Ako u prethodnoj nejednakosti vrijedi znak “<” za svaki $\alpha \in (0, 1)$ i $x \neq y$, onda kažemo da je funkcija f *strogo konveksna*

Definicija 1. Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je kvazikonveksna na D ako $\forall x, y \in D$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (5)$$

Ako u (5) vrijedi stroga nejednakost za $\alpha \in (0, 1)$ i $x \neq y$, onda kažemo da je f *strogo kvazikonveksna* na D (vidi (Demjanov, 1981; Ortega and Rheinboldt, 1970; Vasilev, 1974)).

Lema 1. (Demjanov, 1981) Funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ je kvazikonveksna na D onda i samo onda ako je za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ nivo-skup (level set) $D_\lambda = \{x \in D : f(x) \leq \lambda\}$ konveksan.

Dokaz. (Nuznost) Pretpostavimo da je funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kvazikonveksna i dokažimo da je za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ skup D_λ konveksan. Neka su $x, y \in D_\lambda$. To znači da je $f(x) \leq \lambda$ i $f(y) \leq \lambda$. Kako je f kvazikonveksna, za proizvoljni $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} = \lambda,$$

iz čega zaključujemo da je $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D_\lambda$.

(Dovoljnost) Pretpostavimo da je za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ skup D_λ konveksan i dokažimo da je tada funkcija $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kvazikonveksna. Za proizvoljne $x, y \in D$ definirajmo $\lambda_0 = \max\{f(x), f(y)\}$. Tada su $x, y \in D_{\lambda_0}$, a kako je D_{λ_0} konveksan, onda je $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D_{\lambda_0}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$, iz čega slijedi

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \lambda_0 = \max\{f(x), f(y)\}.$$

□

Primjedba 1. Primijetite da vrijedi (Avriel, 2006; Demjanov, 1981; Ortega and Rheinboldt, 1970; Vasilev, 1974):

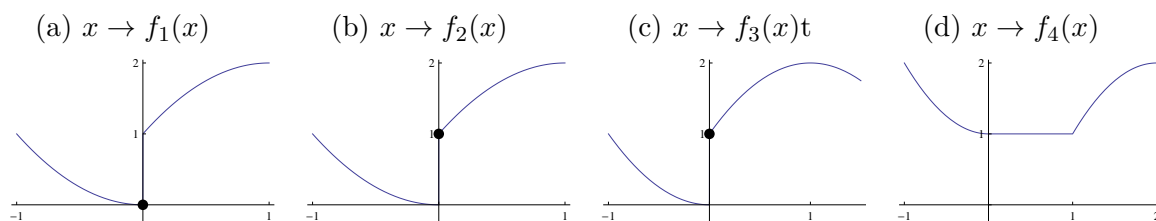
- (i) Svaka konveksna funkcija je kvazikonveksna (Lema 1), ali obrat ne vrijedi. Primjerice, funkcija $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ je kvazikonveksna, ali nije konveksna.
- (ii) Ako su funkcije f_i , $i = 1, \dots, m$ kvazikonveksne na D , onda je i funkcija $f(x) = \max_{i=1, \dots, m} f_i(x)$ takodjer kvazikonveksna na D .
- (iii) Kvazikonveksna funkcija ne mora biti neprekidna. Primjerice, funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sign } x$ je kvazikonveksna na \mathbb{R} , ali nije neprekidna. Primijetite također da ova funkcija nije strogo kvazikonveksna.

Primjer 7. Zadane su funkcije

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0] \\ 2 - (x - 1)^2, & x \in (0, 1] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0) \\ 2 - (x - 1)^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0] \\ 2 - (x - 1)^2, & x \in (0, 1.5] \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0] \\ 1, & c \in (0, 1] \\ 2 - (x - 2)^2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

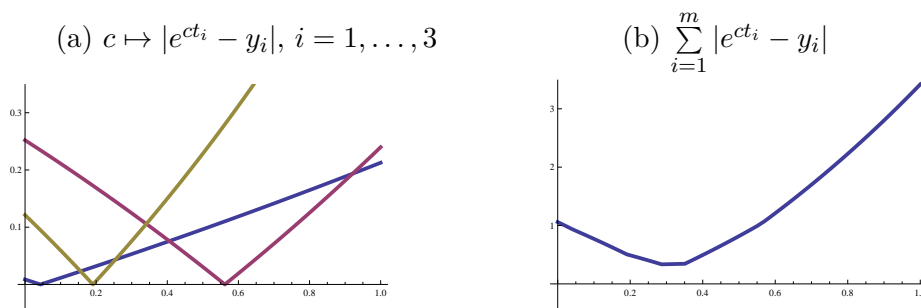
Primijetite da je f_1 strogo kvazikonveksna funkcija, za koju je $\operatorname{argmin}_{x \in [-1, 1]} f(x) = \{0\}$, da je f_2 strogo kvazikonveksna funkcija, za koju je $\operatorname{argmin}_{x \in [-1, 1]} f(x) = \emptyset$, da f_3 nije kvazikonveksna funkcija i da je f_4 kvazikonveksna, ali ne i strogo kvazikonveksna funkcija za koju je $\operatorname{argmin}_{x \in [-1, 2]} f(x) = [0, 1]$, pri čemu je $f(x^*) = 1, \forall x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in [-1, 2]} f(x)$.



Slika 3: Kvazikonveksne funkcije

Zadatak 1. Je li zbroj dvije kvazikonveksne funkcije također kvazikonveksna funkcija? Za podatke $(t_i, y_i), i = 1, \dots, m$, funkcija $c \mapsto |e^{ct_i} - y_i|$ je kvazikonveksna. Je li i sljedeća funkcija kvazikonveksna

$$F(c) = \sum_{i=1}^m |e^{ct_i} - y_i| ?$$



Slika 4: Eksponencijalna regresija

Označimo:

$Q[a, b]$: skup svih strogo kvazikonveksnih funkcija definiranih na $[a, b]$;

$Q^*[a, b]$: skup svih strogo kvazikonveksnih funkcija na $[a, b]$ za koje je $\operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} f(x) \neq \emptyset$.

Primjer 8. *Provjerite koje su od ovih funkcija konveksne, a koje kvazikonveksne:*

$$f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2, \quad f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = |x| + x + \operatorname{sign} x,$$

$$f_3 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \ln x,$$

$$g_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}, \quad g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g_2(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

$$g_3 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g_3(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ \sqrt{x}, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Funkcija $g_2 \in Q[0, 1]$, ali $g_2 \notin Q[-1, 1]$

Zadatak 2. *Kako treba proširiti funkciju $f(x) = \frac{1}{e^{1/x^2} + 1}$ u točki $x_0 = 0$, da bi*

(a) $f \in Q[0, 1]$,

(b) $f \in Q[-1, 1]$, (c) $f \in Q[-1, 0]$?

Zadatak 3. *Kako treba proširiti funkciju $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x + A, & x < 0 \end{cases}$ u točki $x_0 = 0$, da*

(a) $f \in Q[0, 1]$,

(b) $f \in Q[-1, 0]$,

(c) $f \in Q[-1, 1]$,

(d) $f \in Q[-a, b]$ za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$? *Razmotrite slučajeve: $A = 0, +1, -1$.*

Zadatak 4. *Ako su $f_1, f_2 \in Q[a, b]$, jesu li takve i funkcije: $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 \cdot f_2, \frac{f_1}{f_2}$?*

Definicija 2. (Jarre and Stoer, 2004)

Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *strogo unimodalna* ako postoji $x^* \in [a, b]$, takav da je $f|_{[a, x^*]}$ strogo monotono padajuća, a $f|_{[x^*, b]}$ strogo monotono rastuća ili preciznije (Ortega and Rheinboldt, 1970)

ako postoji $x^* \in [a, b]$, takav da je $f(x^*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, a za proizvoljne $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ vrijedi

$$x_2 \leq x^* \implies f(x_1) > f(x_2),$$

$$x^* \leq x_1 \implies f(x_2) > f(x_1).$$

Primjedba 2. (Jarre and Stoer, 2004)

- (i) Kažemo da je točka x^* iz Definicije 2 jedinstveni globalni minimizator funkcije f na $[a, b]$ ili da funkcija f u točki x^* postiže jedinstveni globalni minimum i pišemo

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} f(x).$$

- (ii) Svaka strogo monotono rastuća (padajuća) funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je unimodalna.
- (iii) Strogo konveksna funkcija je unimodalna.
- (iv) Unimodalna funkcija ne mora biti neprekidna.
- (v) Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unimodalna funkcija i $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, onda je $f|_{[a_1, b_1]}$ unimodalna funkcija na $[a_1, b_1]$.
- (vi) Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unimodalna funkcija, $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} f(x)$ i ako je $a < x_1 < x_2 < b$, onda vrijedi

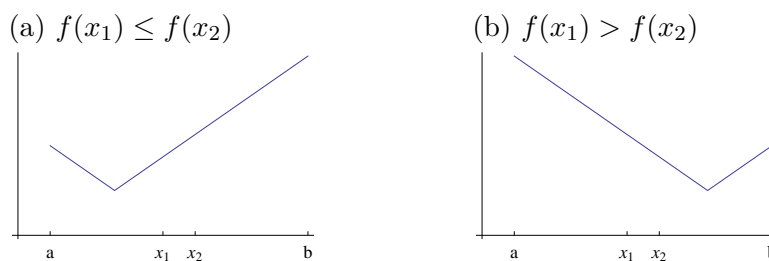
$$\begin{aligned} f(x_1) \leq f(x_2) &\implies x^* \in [a, x_2], \\ f(x_1) > f(x_2) &\implies x^* \in [x_1, b]. \end{aligned}$$

Zadatak 5. Neka za funkciju $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ postoji $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in [a, b]} f(x)$. Pokažite da je tada funkcija f strogo kvazikonveksna na $[a, b]$ onda i samo onda ako je strogo unimodalna.

3 Jednodimenzionalna minimizacija strogo kvazikonveksnih funkcija

3.1 Metoda polovljenja

$f \in Q^*[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Treba odrediti točku $x^* \in [a, b]$ s točnošću $\delta > 0$.



Slika 5: Metoda polovljenja

Iteracija 1: Definiram:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}\delta, \\x_2 &= \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2\delta}, \quad \delta > 0; \\[a_1, b_1] &:= \begin{cases} [a, x_2], & f(x_1) \leq f(x_2) \\ [x_1, b], & f(x_1) > f(x_2) \end{cases}.\end{aligned}$$

Svojstva:

$$\begin{aligned}x^* &\in [a_1, b_1], \\b_1 - a_1 &= \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2}(b - a) + \delta \\x_1^* &:= \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \\|x^* - x_1^*| &\leq \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2^2}(b - a) + \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2^2}(b - a) + \delta.\end{aligned}$$

Iteracija 2: Definiram:

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) - \frac{1}{2}\delta, \\x_4 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) + \frac{1}{2}\delta, \quad \delta > 0; \\[a_2, b_2] &:= \begin{cases} [a_1, x_4], & f(x_3) \leq f(x_4) \\ [x_3, b_1], & f(x_3) > f(x_4) \end{cases}.\end{aligned}$$

Svojstva:

$$\begin{aligned}x^* &\in [a_2, b_2], \\b_2 - a_2 &= \frac{1}{2}(b_1 - a_1) + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2^2}(b - a) + \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2^2}(b - a) + \delta, \\x_2^* &:= \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \\|x^* - x_2^*| &\leq \frac{1}{2}(b_2 - a_2) < \frac{1}{2^3}(b - a) + \frac{1}{2}\delta < \frac{1}{2^3}(b - a) + \delta\end{aligned}$$

Iteracija k: Neka je poznat interval $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ koji sadržava x^* i neka je

$$b_{k-1} - a_{k-1} < \frac{1}{2^{k-1}}(b - a) + \delta, \quad k \geq 2.$$

Definiram:

$$\begin{aligned}x_{2k-1} &= \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}) - \frac{1}{2}\delta, \\x_{2k} &= \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}) + \frac{1}{2}\delta, \quad \delta > 0; \\[a_k, b_k] &:= \begin{cases} [a_{k-1}, x_{2k}], & f(x_{2k-1}) \leq f(x_{2k}) \\ [x_{2k-1}, b_{k-1}], & f(x_{2k-1}) > f(x_{2k}) \end{cases}.\end{aligned}$$

Svojstva:

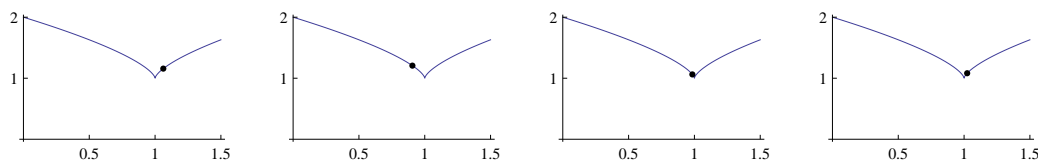
$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2^k}(b - a) + \frac{\delta}{2}$$

$$x_k^* := \frac{1}{2}(a_k + b_k),$$

$$|x^* - x_k^*| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) < \frac{1}{2^{k+1}}(b - a) + \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2^{k+1}}(b - a) + \delta.$$

Metodu nazivamo *Metoda polovljenja* jer u svakom koraku interval dijelimo gotovo na dvije polovine – čim je δ manji time je dijeljenje intervala bliže raspolavljanju. Najbolja točnost koja se može postići je $\delta > 0$. Ova metoda može se primijeniti i na proizvoljnu neprekidnu funkciju, ali tada u općem slučaju možemo pronaći lokalni minimum ako postoji.

Primjer 9. Metodu polovljenja ilustrirat ćemo na primjeru minimizacije funkcije $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$



Slika 6: Metoda polovljenja

Primjer 10. Lokalni minimumi funkcije iz Primjera 5 postižu se u točkama

$$x_1^* \approx -3.217, \quad x_2^* \approx 0.243, \quad x_3^* \approx 3.617,$$

$$f(x_1^*) \approx 6.251, \quad f(x_2^*) \approx 3.289, \quad f(x_3^*) \approx 0.618$$

3.2 Fibonaccijeva metoda

—

4 Metoda zlatnog reza

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad \implies \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \quad \quad \quad 1-x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$



Slika 7: Zlatni rez

$$x_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), \quad (6)$$

$$x_2 = a + b - x_1 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a), \quad (7)$$

$$x_1 < x_2,$$

$$\frac{b - a}{b - x_1} = \frac{b - x_1}{x_1 - a} = \frac{b - a}{x_2 - a} = \frac{x_2 - a}{b - x_2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Primijetite također da x_1 čini zlatni rez na $[a, x_2]$:

$$x_2 - x_1 < x_1 - a = b - x_2; \quad \frac{x_2 - a}{x_1 - a} = \frac{x_1 - a}{x_2 - x_1}.$$

Metoda zlatnog reza

1. $[a_1, b_1] = [a, b]$;

Definiram x_1, x_2 kao u (6-7);

$$f(x_1) \leq f(x_2) \implies [a_2, b_2] = [a_1, x_2]; \quad x_2^* = x_1,$$

$$f(x_1) > f(x_2) \implies [a_2, b_2] = [x_1, b_1]; \quad x_2^* = x_2;$$

$$b_2 - a_2 = x_2 - a_1 = b_1 - x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b - a)$$

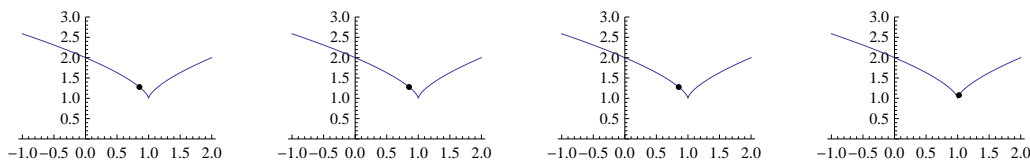
2. Simetrično s x_2^* kao u (7) izaberemo točku $x_3 = a_2 + b_2 - x_2^*$, koja također čini zlatni rez intervala $[a_2, b_2]$.

Uspoređujući $f(x_3)$ i $f(x_2^*)$ dobivamo novi interval $[a_3, b_3]$;

$$b_3 - a_3 = x_3 - a_2 = b_2 - x_2^* = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (b - a)$$

Više o metodi vidi u (Jarre and Stoer, 2004; Ortega and Rheinboldt, 1970).

Primjer 11. Metodu zlatnog reza ilustrirat ćemo na primjeru minimizacije funkcije $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$



Slika 8: Metoda zlatnog rez

5 Metoda “slomljenih pravaca” za traženje globalnog minimuma

5.1 Lipschitz-neprekidne funkcije

U ovom odjeljku razmatrat ćemo jednu metodu traženja globalnog minimuma realne funkcije jedne varijable, koja na intervalu $[a, b]$ zadovoljava Lipschitzov uvjet. Metoda potječe od ruskog matematičara Pijavskog (Danilin, 1967; Pijavskij, 1972). Vidi također (Vasilev, 1974).

Definicija 3. Kažemo da funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna (zadovoljava Lipschitzov uvjet) s konstantom $L > 0$ na $[a, b]$ i pišemo $f \in Lip_L[a, b]$ ako za svaki $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \quad (8)$$

Primjer 12. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ je Lipschitz-neprekidna s konstantom $L = 1$ na \mathbb{R} jer je $||x| - |y|| \leq 1 \cdot |x - y|$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za $x \neq y$ Lipschitzov uvjet (8) možemo zapisati u obliku

$$-L \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq L \quad \forall x, y \in [a, b],$$

odakle se vidi da je relativna promjena (kvocijent diferencija) funkcije f ograničena između $-L$ i L . Ako x fiksiramo, a y pustimo prema x , onda možemo zaključiti da ako postoji derivacija funkcije f , ona je ograničena između $-L$ i L .

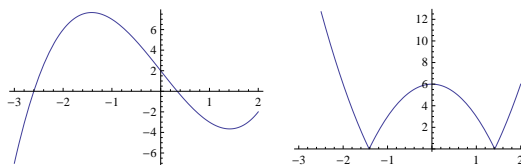
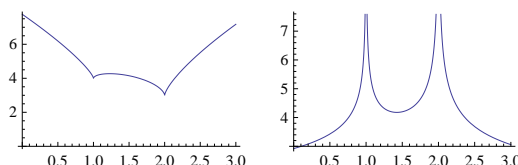
Primjedba 3. Svaka Lipschitz-neprekidna funkcija je neprekidna funkcija. Ako je $f \in C^1[a, b]$, onda je $f \in Lip_L[a, b]$ (Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti), ali obrat ne vrijedi (vidi Primjer 13 i Primjer 15). Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, koja ima po dijelovima neprekidnu derivaciju, onda primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti dobivamo konstantu $L = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ (Primjer 15).

Primjedba 4. Definicija Lipschitz-neprekidne funkcije lako se može proširiti na funkciju više varijabli $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Takva funkcija je Lipschitz-neprekidna (zadovoljava Lipschitzov uvjet) ako postoji konstanta $L > 0$ tako da za svaki $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ neka norma.

Primjer 13. Treba odrediti Lipschitzovu konstantu funkcije $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Iz Slike 9 može se vidjeti da je $L = |f'(-3)| = 21$.

Slika 9: Funkcija $f(x) = x^3 - 6x + 2$ i $x \mapsto |f'(x)|$ Slika 10: Funkcija $f(x) = 1 + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$ i $x \mapsto |f'(x)|$

Primjer 14. Treba odrediti Lipschitzovu konstantu funkcije $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$. Njena derivacija

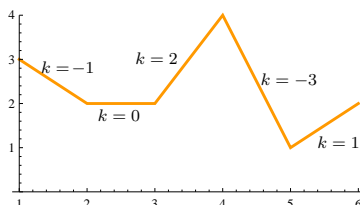
$$f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x-1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$$

nije definirana u točkama iz $\{1, 2\}$, a Lipschitzova konstanta bila bi $L = \infty$.

Primjer 15. Treba odrediti Lipschitzovu konstantu funkcije $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 2x - 4, & 3 \leq x \leq 4, \\ -3x + 16, & 4 \leq x \leq 5, \\ x - 4, & 5 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

čiji graf je prikazan na Slici 11. Očigledno je $L = 3$.

Slika 11: Koeficijenti smjera po dijelovima linearne funkcije f

5.2 Metoda slomljenih pravaca

Pretpostavimo da je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija. Tada prema (8) $\forall x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$-L|x - y| \leq f(x) - f(y) \leq L|x - y|,$$

iz čega slijedi

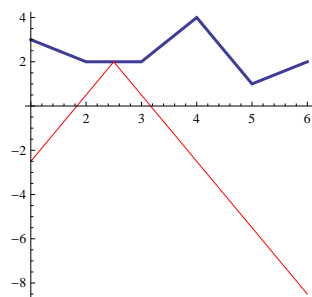
$$f(x) \geq f(y) - L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad (9)$$

(vidi Sliku 12). Iz toga zaključujemo da funkciju f u bilo kojoj točki $y \in [a, b]$ možemo od dolje ograničiti funkcijom $x \mapsto f(y) - L|x - y|$.

Na osnovi toga (Pijavskij, 1972) je konstruirao sljedeći algoritam. Pretpostavimo da postoji $u^* \in [a, b]$, na kome se postiže globalni minimum funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tj. postoji $u^* = \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} f(u)$. Za izabrani $u_0 \in [a, b]$ definiramo funkciju $K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$K(u; u_0) = f(u_0) - L|u - u_0|, \quad u \in [a, b], \quad (10)$$

koja ima sljedeća svojstva:



Slika 12: Lipschitz-donja ograda funkcije

$$u \mapsto K(u; u_0) \quad \text{po dijelovima je linearna funkcija,} \quad (11)$$

$$K(u_0, u_0) = f(u_0), \quad (12)$$

$$K(u; u_0) \leq f(u), \quad \forall u \in [a, b], \quad (13)$$

Svojstvo (13) slijedi iz

$$(K(u; u_0) - f(u) = f(u_0) - f(u) - L|u - u_0| \leq |f(u_0) - f(u)| - L|u - u_0| \leq L|u - u_0| - L|u - u_0| = 0).$$

Algoritam 1. (“Slomljeni pravci”)

Korak 0: Izabrati $u_0 \in [a, b]$ i definirati $K(u; u_0) := f(u_0) - L|u - u_0|$;

Odrediti $u_1 = \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} K(u; u_0)$ (Očigledno je $u_1 = a$ ili $u_1 = b$).

Korak 1: Definirati $K(u; u_1) := f(u_1) - L|u - u_1|$ i

$$P_1(u) := \max_{i=0,1} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_1), P_0(u)\}, \quad P_0(u) := K(u; u_0);$$

Odrediti $u_2 = \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} P_1(u)$.

Korak 2: Definirati $K(u; u_2) := f(u_2) - L|u - u_2|$ i
 $P_2(u) := \max_{i=0,1,2} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_2), P_1(u)\};$
 Odrediti $u_3 = \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} P_2(u).$

Korak n: Uz pretpostavku da su $u_0, u_1, \dots, u_n, K(u; u_0), K(u; u_1), \dots, K(u; u_n)$ ($n \geq 1$) poznati, definirati

$$P_n(u) = \max_{i=0, \dots, n} K(u; u_i) = \max\{K(u; u_n), P_{n-1}(u)\}, \quad P_0(u) = K(u; u_0); \quad (14)$$

Odrediti $u_{n+1} = \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} P_n(u)$. (Ako se $\min_{u \in [a,b]} P_n(u)$ postiže u više točaka, onda za u_{n+1} biramo bilo koju od njih).

Vidi animaciju algoritma na stranici

<http://www.mathos.unios.hr/~scitowsk/matprakt/index.html#materijali.html>

Sljedeća lema daje svojstva nizova (u_n) i (P_n) iz Algoritma 1 i $f \in Lip_L[a, b]$.

Lema 2. Neka je $f \in Lip_L[a, b]$, (u_n) niz realnih brojeva i (P_n) niz funkcija definiran kao u Algoritmu 1. Tada vrijedi:

- (i) P_n je neprekidna po dijelovima linearna funkcija, čiji dijelovi leže na pravcima s koeficijentima smjera L ili $(-L)$;
- (ii) $P_n(u) \leq P_{n+1}(u), \forall u \in [a, b]$ i $\forall n = 0, 1, \dots$;
- (iii) $P_n(u) \leq f(u), \forall u \in [a, b]$ i $\forall n = 0, 1, \dots$;
- (iv) $P_n(u_i) = f(u_i), \forall i = 0, 1, \dots, n$
- (v) $P_n \in Lip_L[a, b]$.

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) su očigledne. Tvrdnja (iii) slijedi induktivno na osnovi (13):

$$\begin{aligned} P_0(u) &= K(u; u_0) \leq f(u), \\ P_1(u) &= \max\{K(u; u_1), P_0(u)\} \leq \max\{f(u), f(u)\} = f(u), \\ &\dots \\ P_n(u) &= \max\{K(u; u_n), P_{n-1}(u)\} \leq \max\{f(u), f(u)\} = f(u). \end{aligned}$$

Tvrdnja (iv) slijedi iz (12), (14) $[P_n(u) \geq K(u; u_n), \forall u \in [a, b]]$ i (iii):

$$f(u_i) = K(u_i, u_i) \leq P_n(u_i) \leq f(u_i).$$

Tvrdnja (v) slijedi iz (i). □

Primjedba 5. Tvrdnje Leme 2 skraćeno možemo zapisati:

1. $P_n \in Lip_L[a, b]$ je po dijelovima linearna funkcija, čiji dijelovi leže na pravcima s koeficijentima smjera L ili $(-L)$;
2. $P_n(u) \leq P_{n+1}(u) \leq f(u), \forall u \in [a, b]$ i $\forall n = 0, 1, \dots$;
3. $P_n(u_i) = f(u_i), \forall i = 0, 1, \dots, n.$

Teorem 1. *Pretpostavimo:*

- (a) $f \in Lip_L[a, b]$;

(b) Postoji $u^* \in \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} f(u)$;

(b) Niz realnih brojeva (u_n) i niz funkcija (P_n) definiran je kao u Algoritmu 1.

Tada vrijedi:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) = \inf_{u \in [a,b]} f(u) = f(u^*) =: f^*$;

(ii) Ako je \hat{u} proizvoljno gomilište niza (u_n) , onda je $\hat{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} f(u)$;

(iii) Ako je $u^* = \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} f(u)$ (jednočlan), onda cijeli niz (u_n) konvergira prema u^* .

Dokaz. Dokažimo najprije da je niz $(P_n(u_{n+1}))$ monotono rastuć

$$\begin{aligned} P_{n-1}(u_n) &= \min_{u \in [a,b]} P_{n-1}(u) && \text{po definiciji} \\ &\leq P_{n-1}(u_{n+1}) && \text{po definiciji} \\ &\leq P_n(u_{n+1}) && \text{prema Lemi 2(ii)} \end{aligned}$$

i ograničen odozgo:

$$\begin{aligned} P_n(u_{n+1}) &= \min_{u \in [a,b]} P_n(u) && \text{po definiciji} \\ &\leq P_n(u^*) && \text{po definiciji – ovo je nepotrebno!} \\ &\leq f(u^*) = f^* && \text{prema Lemi 2(iii)} \end{aligned}$$

Dakle, postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) =: P^*$, a prema Lemi 2(iii) i zbog neprekidnosti funkcija P_n i f vrijedi

$$P^* \leq f^*. \quad (15)$$

Pokažimo da je $P^* = f^*$. U tu svrhu najprije pokazimo da vrijedi nejednakost

$$0 \leq f(u_i) - P_n(u_{n+1}) \leq L|u_i - u_{n+1}|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ i } \forall i = 0, \dots, n. \quad (16)$$

Kako je $P_n(u_{n+1}) = \min_{u \in [a,b]} P_n(u) \leq P_n(u_i)$, za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljni i ($0 \leq i \leq n$) vrijedi

$$P_n(u_{n+1}) \leq P_n(u_i) \leq f(u_i) \quad (\text{Lema 2(iii)}),$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(u_i) - P_n(u_{n+1}) \\ &= P_n(u_i) - P_n(u_{n+1}) && \text{prema Lemi 2(iv)} \\ &\leq L|u_i - u_{n+1}| && \text{prema Lemi 2(v)} \end{aligned}$$

Kako je niz $(u_n) \subset [a, b]$ ograničen, postoji barem jedno gomilište \hat{u} i podniz (u_{n_k}) , koji konvergira prema tom gomilištu, pri čemu možemo pretpostaviti da je $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$.

Primijetite da zbog $n_{k-1} < n_k$ vrijedi $n_{k-1} \leq n_k - 1$. Zato iz nejednakosti (16) za $n := n_k - 1$ i $i := n_{k-1}$ dobivamo

$$0 \leq f(u_{n_{k-1}}) - P_{n_k-1}(u_{n_k}) \leq L|u_{n_{k-1}} - u_{n_k}|,$$

odakle zbog neprekidnosti funkcije f za $k \rightarrow \infty$ dobivamo

$$0 \leq f(\hat{u}) - \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k-1}(u_{n_k}) \leq 0 \implies f(\hat{u}) = P^*.$$

Kako je $f^* \leq f(\hat{u})$ iz prethodne jednakosti i nejednakosti (15) dobivamo

$$f^* \leq f(\hat{u}) = P^* \leq f^*,$$

tj. $P^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) = f^* = f(\hat{u})$. Time su tvrdnje (i) i (ii) dokazane.

Tvrdnja (iii) slijedi iz prve dvije. □

Primjedba 6. Najpoznatije varijante metode slomljenih pravaca su *Metoda Pijavskog* (Danilin, 1967; Pijavskij, 1972), *Shubertova metoda* (Shubert, 1972), koje se nažalost ne mogu direktno generalizirati na više dimenzija i Algoritam DIRECT (Jones, 1993; Kvasov, 2011), koji je konstruiran u svrhu generalizacije na više dimenzija (Finkel and Kelley, 2004, 2006; Vanderbei, 1999). Metoda slomljenih pravaca ima niz prednosti:

1. Minimizirajuća funkcija f može imati proizvoljno stacionarnih točaka i lokalnih minimuma, ne mora biti derivabilna u svim točkama intervala $[a, b]$, već samo mora ispunjavati Lipschitzov uvjet (8);
2. Za proizvoljni $u_0 \in [a, b]$ metoda konvergira prema globalnom minimumu, a za njenu implementaciju potrebno je “samo” poznavati Lipschitzovu konstantu L ;
3. U svakom koraku metode treba riješiti minimizacijski problem za po dijelovima linearnu funkciju P_n , što se svodi na ispitivanje njenih poznatih vrhova. Pri tome P_n se od P_{n-1} može razlikovati za najviše dva nova vrha;
4. Može se pokazati (Vasilev, 1974) da je metoda slomljenih pravaca bliska optimalnoj strategiji traženja globalnog minimuma Lipschitzove funkcije.
5. Metodu možemo modificirati tako da na početku izaberemo $n + 1$ ekvidistantnih čvorova $a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$ u kojima definiramo:

$$K(u; u_i) := f(u_i) - L|u - u_i|, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$P_n(u) := \max_{i=0,1,\dots,n} K(u; u_i)$$

$$u_{n+1} = \operatorname{argmin}_{u \in [a,b]} P_n(u) \quad (\text{pretraživanje } n + 1 \text{ čvorova})$$

Dalje procedura može teći kao u Algoritmu 1;

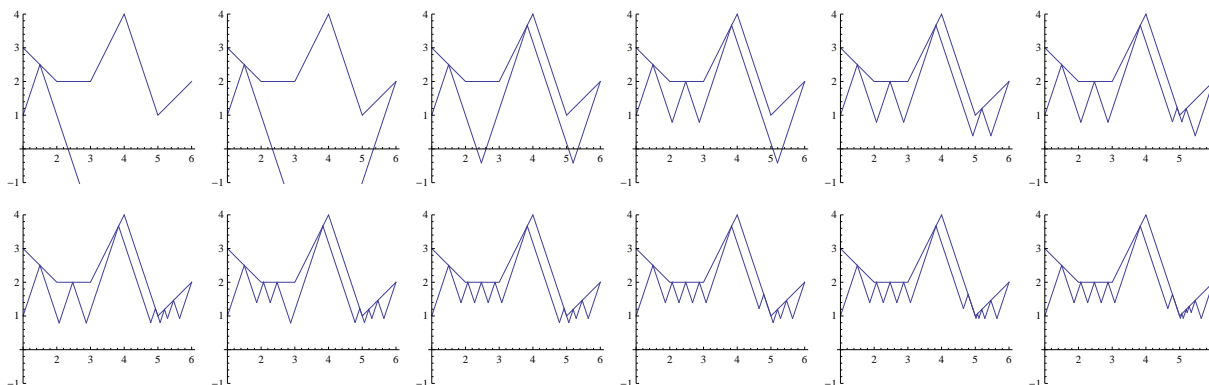
6. Metoda se može poopćiti za slučaj funkcija koje imaju konačno prekida prve vrste i koje su definirane na nepovezanom području (Strongin and Vasiljev, 1984),

i nedostataka:

1. Određivanje Lipschitzove konstante L može biti složeno. O jednoj metodi može se vidjeti u (Wood and Zhang, 1996);
2. Niska brzina konvergencije. Čim je L veći, brzina je niža – u graničnom slučaju kada $L \rightarrow \infty$ algoritam degenerira u izračunavanje vrijednosti funkcije na diskretnom skupu;
3. Kako definirati kriterij zaustavljanja ?
4. Računska kompleksnost u više dimenzija.

Primjer 16. Metodu slomljenih pravaca ilustrirat ćemo na traženju globalnog minimuma funkcije iz Primjera 15. Iterativni proces može se pratiti na Slici 13 i u niže navedenoj tablici.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_i	1.5	6	3.83	2.47	5.19	4.93	5.46	2.07	2.88	4.79	5.06	5.28	5.64	5.02	5.11	5.007
$f(u_i)$	2.5	2	3.67	2.	1.19	1.22	1.46	2.	2.	1.64	1.06	1.28	1.64	1.02	1.11	1.007



Slika 13: Metoda slomljenih pravaca

5.3 Shubertova metoda

Pretpostavimo da je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzova funkcija. Ako u nejednakost (8) umjesto y stavimo a , onda je $x - a \geq 0$ i vrijedi

$$|f(x) - f(a)| \leq L(x - a), \quad \forall x \in [a, b],$$

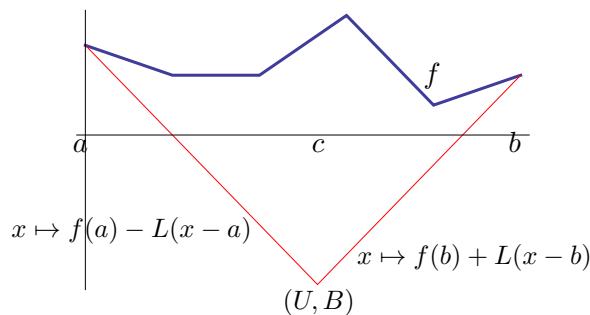
odnosno

$$-L(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq L(x - a), \quad \forall x \in [a, b],$$

odakle dobivamo

$$f(x) \geq f(a) - L(x - a). \quad (17)$$

Dakle, funkcija $x \mapsto f(a) - L(x - a)$ je jedna donju ograda funkcije f .

Slika 14: Donja ograda funkcija f na intervalu $[a, b]$

Slično, ako za y stavimo b , onda je $x - b \leq 0$ i vrijedi

$$|f(x) - f(b)| \leq -L(x - b), \quad \forall x \in [a, b],$$

odnosno

$$L(x - b) \leq f(x) - f(b) \leq -L(x - b), \quad \forall x \in [a, b],$$

odakle dobivamo

$$f(x) \geq f(b) + L(x - b). \quad (18)$$

Dakle, funkcija $x \mapsto f(b) + L(x - b)$ također je jedna donju ograda funkcije f .

Funkcija

$$x \mapsto \max\{f(a) - L(x - a), f(b) + L(x - b)\}, \quad (19)$$

također je donja ograda funkcije f (vidi Sliku 14), koja postiže svoj globalni minimum $B(a, b, f, L)$ u točki $U(a, b, f, L)$, gdje je

$$U(a, b, f, L) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2L}(f(a) - f(b)), \quad (20)$$

$$B(a, b, f, L) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{L}{2}(b - a), \quad (21)$$

a njezin graf je slomljeni pravac.

Primijetimo da je i $x \mapsto B(a, b, f, L)$ također donja ograda funkcije f na intervalu $[a, b]$. Naime, zbrajanjem (17) i (18) dobivamo

$$f(x) \geq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{L}{2}(b - a) = B(a, b, f, L).$$

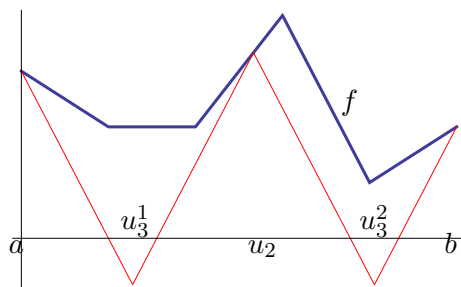
Algoritam 2. (Shubertova metoda, (Shubert, 1972))

Korak 1: Odrediti pravce $x \mapsto f(a) - L(x - a)$ i $x \mapsto f(b) + L(x - b)$ i točku njihovog sjecišta $(U(a, b, f, L), B(a, b, f, L))$

Korak 2: Staviti $u_1 = U(a, b, f, L)$. Od dva intervala $[a, u_1]$, $[u_1, b]$ izabrati onaj s manjom B -vrijednosti.

Korak 3: Ako je $[a, u_1]$ izabrani interval, staviti $u_2 = U(a, u_1, f, L)$.

Od tri intervala: $[a, u_2]$, $[u_2, u_1]$, $[u_1, b]$ izabrati onaj s najmanjom B -vrijednosti i na njemu ponoviti proceduru.



Slika 15: Veza Shubertove metode i Metode slomljenih pravaca

Vidi animaciju algoritma na stranici

<http://www.mathos.unios.hr/~scitowsk/matprakt/index.html#materijali.html>

Primjedba 7. Primijetite da je Shubertova metoda zapravo specijalni slučaj Algoritma 1 ako za početnu aproksimaciju izaberemo jedan od rubova intervala $[a, b]$. Neka je primjerice, $u_{-1} = a$. Tada je prema Metodi slomljenih pravaca

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{argmin}\{f(a) - L|u - a|\} = b, \\ P_1(u) &= \max\{f(a) - L|u - a|, f(b) - L|u - b|\}, \\ u_1 &= \operatorname{argmin} P_1(u). \end{aligned}$$

Nakon toga definiramo

$$\begin{aligned} P_2(u) &= \max\{P_1(u), f(u_1) - L|u - u_1|\}, \\ u_2 &= \operatorname{argmin} P_2(u), \end{aligned}$$

koji se postiže u jednoj od dviju vrijednosti u_2^1 ili u_2^2 , za koju je vrijednost funkcije f manja. (vidi Sliku 15). Očigledno se odluka može donijeti poznavanjem B -vrijednosti funkcije f na intervalima $[a, u_1]$ i $[u_1, b]$. Ovaj kriterij podudara se s kriterijem navedenim u *Koraku 2* Shubertovog algoritma.

Primjedba 8. Nažalost, ni metoda slomljenih pravaca, a onda ni Shubertova metoda ne može se generalizirati na višu dimenziju.

Zadatak 6. Napišite *Mathematica*-modul za Shubertovu metodu i testirajte ga na problemu iz *Primjera 15*.

5.4 DIRECT optimizacijski algoritam

Pretpostavimo da je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija. Prema (Jones, 1993) Shubertovu metodu modificirat ćemo tako da je generalizacija na višedimenzionalni slučaj moguća. Naziv te metode je DIRECT, što dolazi od: DI(viding)RECT(angles), a aludira na odgovarajući algoritam u više dimenzija (vidi t.6).

Ako u (8) za y stavimo $c = \frac{a+b}{2}$, onda za $x \geq c$, odnosno $x - c \geq 0$ dobivamo

$$-L(x - c) \leq f(x) - f(c) \leq L(x - c),$$

odnosno

$$f(x) \geq f(c) - L(x - c), \quad x \geq c, \quad (22)$$

iz čega zaključujemo da je funkcija $x \mapsto f(c) - L(x - c)$ jedna donja ograda funkcije f na intervalu $[c, b]$ (vidi Sliku 16).

Slično, za $x \leq c$, odnosno $x - c \leq 0$ dobivamo

$$L(x - c) \leq f(x) - f(c) \leq -L(x - c),$$

odnosno

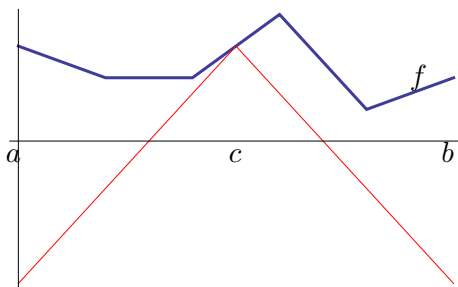
$$f(x) \geq f(c) + L(x - c), \quad x \leq c, \quad (23)$$

iz čega zaključujemo da je funkcija $x \mapsto f(c) + L(x - c)$ jedna donja ograda funkcije f na intervalu $[a, c]$ (vidi Sliku 16). Dakle, funkcija

$$x \mapsto \begin{cases} f(c) + L(x - c), & x \leq c \\ f(c) - L(x - c), & x \geq c \end{cases} \quad (24)$$

je donja ograda funkcije f na čitavom intervalu $[a, b]$ (vidi Sliku 16), koja postiže svoj globalni minimum $B(c)$ u lijevom i desnom rubu intervala $[a, b]$

$$B(c) = f(c) - L \frac{b-a}{2}. \quad (25)$$



Slika 16: Donja ograda funkcija f na intervalu $[a, b]$

Primjedba 9. Primijetite da uz poznavanje Lipschitzove konstante donja ograda B funkcije f ovisi samo o vrijednosti funkcije f u centru intervala $[a, b]$ i širini intervala. Ovo će biti važno prilikom konstrukcije optimizacijskog algoritma, ali posebno i kod generalizacije na višedimenzionalni slučaj.

Primjedba 10. Primijetite da je donja ograda (24) funkcije f specijalni slučaj funkcije (10) kod metode slomljenih pravaca (Pijavskij, 1972), gdje je $u_0 = c$.

Algoritam 3. (DIRECT algoritam, (Jones, 1993))

Korak 1: Interval $[a, b]$ podijeliti na $n = 3$ podintervala $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, jednake duljine $d = \frac{b-a}{3}$ s centrima u točkama

$$c_1 = a + \frac{d}{2}, \quad c_2 = a + 3\frac{d}{2}, \quad c_3 = a + 5\frac{d}{2};$$

Prema (25) izračunati \mathcal{B} -vrijednosti

$$\mathcal{B}(c_i) = f(c_i) - L\frac{b_i - a_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n;$$

Odrediti i_0 , tako da bude $f(c_{i_0}) = \min_{i=1, \dots, n} f(c_i)$ i staviti $\min = \{c_{i_0}, f(c_{i_0})\}$;

Korak 2: Odrediti $j \in \{1, \dots, n\}$ tako da bude $\mathcal{B}(c_j) = \min_{i=1, \dots, n} \mathcal{B}(c_i)$;

Korak 3: Interval s centrom u c_j podijeliti na 3 podintervala jednake duljine $\frac{d}{3}$;

Na taj način umjesto intervala duljine d s centrom u c_j dobivamo tri nova podintervala duljine $\frac{d}{3}$ s centrima u $c_j - \frac{d}{3}$, c_j , $c_j + \frac{d}{3}$;

Korigirati \min s vrijednosti funkcije u dva nova centra $c_j - \frac{d}{3}$, $c_j + \frac{d}{3}$;

Izračunati \mathcal{B} -vrijednosti za tri nova podintervala. **Primijetite da je za to potrebno poznavati samo centre i širine podintervala!**;

Staviti $n = n + 2$ i prijeći na *Korak 2*;

Vidi animaciju algoritma na stranici

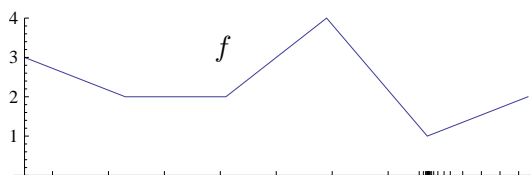
<http://www.mathos.unios.hr/~scitowsk/matprakt/index.html#materijali.html>

Primjedba 11. Prema Teoremu 1 proizvoljno gomilište niza (c_n) je točka u kojoj funkcija f postiže svoj globalni minimum.

Iterativni postupak može se ubrzati koristeći činjenicu da se u svakom koraku od postojećeg niza podintervala ispušta jedan i dodaju tri nova podintervala:

- U *Koraku 1* i *Koraku 3* intervale sortirati u opadajućem poretku prema njihovim \mathcal{B} -vrijednostima.
- Tri nova podintervala dodati postojećem nizu tako da novi niz podintervala bude sortirati u opadajućem poretku prema njihovim \mathcal{B} -vrijednostima. U *Koraku 2* tada je $j = n$.

Primjer 17. *Primjenom DIRECT optimizacijskog algoritma odredit ćemo globalni minimum funkcije $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ zadane u Primjeru 15. Na Slici 17 prikazan je niz aproksimacija (c_n) globalnog minimuma, koji se postiže u točki $x^* = 5$.*



Slika 17: Niz aproksimacija (c_n) globalnog minimuma funkcije iz Primjera 15

5.4.1 Optimizacija DIRECT algoritma

Ako bi u svakom koraku između svih podintervala tražili onaj s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti, to bi značajno usporilo algoritam. Zbog toga ćemo pokušati koliko god je to moguće suziti broj “potencijalno optimalnih intervala”.

Primijetimo još jednom važnu činjenicu da smo podintervale $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ u algoritmu DIRECT reprezentirali smo njihovim centrima $c_i, i = 1, \dots, n$ i poluširinama intervala $d_i = \frac{b_i - a_i}{2}$. Zato ćemo svakom intervalu $[a_i, b_i]$ s centrom c_i pridružiti točku

$$T_i = \left(\frac{b_i - a_i}{2}, f(c_i) \right).$$

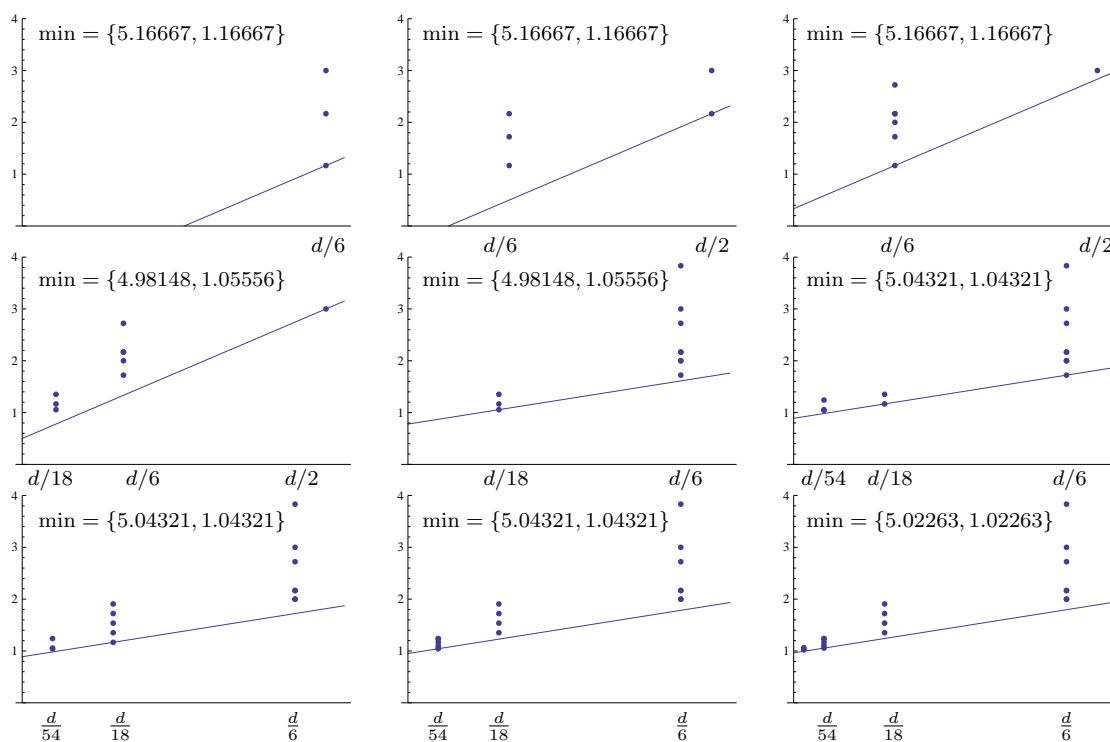
Donja ograda (\mathcal{B} -vrijednost)

$$\mathcal{B}(c_i) = f(c_i) - L \frac{b_i - a_i}{2},$$

intervala $[a_i, b_i]$ može se interpretirati kao odsječak na ordinati linearne funkcije l_i čiji graf prolazi točkom T_i i ima koeficijent smjera L

$$l_i(t) = Lt + \left(f(c_i) - L \frac{b_i - a_i}{2} \right). \quad (26)$$

Svaki grafikon na Slici 18 prikazuje točke $T_i, i = 1, \dots, n$ dobivene u nekoj iteraciji algoritma DIRECT i pravac l_j kroz točku T_j i koeficijentom smjera L , pri čemu je j izabran tako da bude $\mathcal{B}(c_j) = \min_{i=1, \dots, n} \mathcal{B}(c_i)$ (interval s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti – najmanjim odsječkom na ordinati). U prvoj iteraciji pojavljuje se $n = 3$ točke, u drugoj $n = 5$ točaka, u trećoj $n = 7$ točaka itd. Pri tome neke točke se podudaraju.



Slika 18: Vrijednosti funkcije u ovisnosti o udaljenosti centra do ruba podintervala

Već na drugom grafikonu Slike 18 vidi se da je bilo moguće izabrati “bolji pravac” – donju ogradu točaka $T_i, i = 1, \dots, n$ izborom nove točke T_j i manjeg koeficijenta smjera $0 < \tilde{L} \leq L$.

Geometrijski, interval $[a_j, b_j]$ bit će potencijalno optimalan ako birajući $\hat{L} > 0$, mogu pronaći pravac kroz točku T_j koji je ujedno donja ograda za sve druge točke $T_i, i = 1, \dots, n$. Znat ću da je taj pravac donja ograda ako je njegov odsječak na ordinati manji od odgovarajućih odsječaka za druge točke T_i . Ako pri tome sve točke jednake apscise sortiram prema veličini ordinate, onda potencijalno optimalne

intervale treba tražiti između točaka najmanje ordinate (vidi Sliku ??). Od svih tih “donjih” točaka treba izabrati one kroz koje prolazi pravac iznad kojeg se nalaze sve ostale točke.

Općenito, to znači da među intervalima $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$ s centrima c_i , $i = 1, \dots, n$ treba izabrati *potencijalno optimalan interval* $[a_j, b_j]$ s centrom c_j sukladno sljedećoj definiciji.

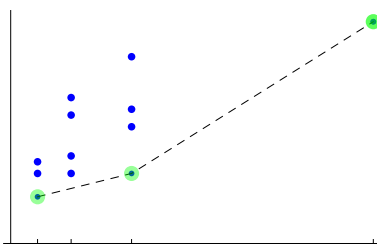
Definicija 4. Interval $[a_j, b_j]$ s centrom c_j je potencijalno optimalan ako postoji $\hat{L} > 0$, tako da bude

$$f(c_j) - \hat{L} \frac{b_j - a_j}{2} \leq f(c_i) - \hat{L} \frac{b_i - a_i}{2}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

Izborom različitih vrijednosti konstante $\hat{L} > 0$ u svakoj iteraciji može postojati više potencijalno optimalnih intervala.

Jedan razlog za traženje manje vrijednosti za Lipschitzovu konstantu leži u činjenici što se za veliku vrijednost Lipschitzove konstante, postupak može nepotrebno produljiti.

Ipak, pravi razlog za uvođenje konstante (stope rasta) \hat{L} leži u činjenici da je često puta teško odrediti Lipschitzovu konstantu (Wood and Zhang, 1996). Umjesto toga, za razne vrijednosti od \hat{L} trebalo provjeravati uvjet (27) i tražiti potencijalno optimalne intervale. Na sreću, čak ni to neće biti potrebno. Kao što se vidi na Slici 18, a još jasnije na Slici ?? potencijalno optimalni intervali odgovaraju točkama T_i na vrhovima donjeg ruba konveksne ljuske $\text{conv}\{T_1, \dots, T_n\}$. Za promatrani primjer u prvoj i drugoj iteraciji (drugi i treći grafikon na Slici 18) dobivamo samo dva potencijalno optimalna intervala (odgovaraju najnižim točkama za apscise $\frac{d}{2}$ i $\frac{d}{6}$), a u petoj iteraciji (šesti grafikon na Slici 18) dobivamo tri potencijalno optimalna intervala (odgovaraju najnižim točkama s apscisama $\frac{d}{6}$, $\frac{d}{18}$ i $\frac{d}{54}$).



Slika 19: Veće zelene točke odgovaraju potencijalno optimalnim intervalima

Skup potencijalno optimalnih točaka dobiven sukladno Definiciji 4 može se još više suziti tako da ne razmatramo podintervale čije se \mathcal{B} -vrijednosti ne bitno ne razlikuju od trenutno minimalne vrijednosti funkcije f_{min} . U tom smislu proširit ćemo Definiciju 4.

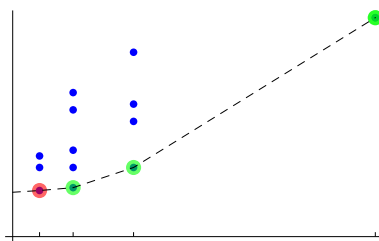
Definicija 5. Interval $[a_j, b_j]$ s centrom c_j je potencijalno optimalan ako zadovoljava Definiciju 4 i ako postoji $\epsilon > 0$, tako da bude

$$f(c_j) - \hat{L} \frac{b_j - a_j}{2} \leq f_{min} - \epsilon |f_{min}|, \quad (28)$$

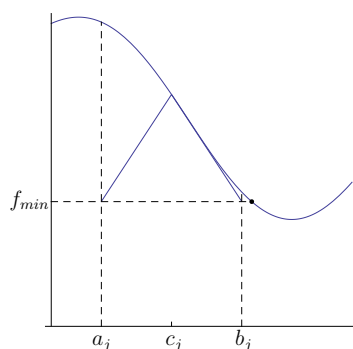
gdje je $f_{min} = \min\{f(c_i) : i = 1, \dots, n\}$.

Uvjet (28) još više sužava broj *potencijalno optimalnih intervala*. Najprije primijetite da iz definicije \mathcal{B} -vrijednosti slijedi $\mathcal{B}(c_j, d_j) = f(c_j) - \hat{L} \frac{b_j - a_j}{2} \leq f_{min}$. Uvjet (28) garantira da se među potencijalno optimalnim intervalima neće pojaviti interval čija \mathcal{B} -vrijednost ($\mathcal{B}(c_j, d_j) = f(c_j) - \hat{L} \frac{b_j - a_j}{2}$) nije manja od trenutnog minimuma funkcije f_{min} barem za $\epsilon > 0$. Na Slici 21 prikazan je interval s centrom u točki c , čija \mathcal{B} -vrijednost se podudara s trenutnim minimumom funkcije f_{min} . Takav interval ne spada u potencijalno optimalne. Geometrijsko objašnjenje uvjeta (28) može se također vidjeti na Fig 2.2 kod (Finkel and Kelley, 2004).

Potencijalno optimalni intervali na Slici 19 prikazani su zelenim točkicama. Nasuprot tome, interval, koji je na Slici 20 pretstavljen crvenom točkicom, zbog uvjeta (28) neće biti svrstan u potencijalno optimalne zato što se njegova \mathcal{B} -vrijednost gotovo ne razlikuje od trenutno minimalne vrijednosti funkcije f_{min} .



Slika 20: Veće zelene točke odgovaraju potencijalno optimalnim intervalima



Slika 21: Interval koji nije potencijalno optimalan

5.4.2 Traženje potencijalno optimalnih intervala

Geometrijski gledano, točka na Slici 19 predstavljat će potencijalno optimalan interval u smislu Definicije 4 onda ako se kroz nju može provući pravac s nekim koeficijentom smjera $\hat{L} > 0$, iznad kojeg (ili na kojem) se nalaze sve druge točke. To znači da je njegov odsječak na ordinati (tj. njegova \mathcal{B} -vrijednost) manji od \mathcal{B} -vrijednosti svih drugih točaka.

U nastavku ćemo operacionalizirati opisani princip. Označimo $I = \{1, \dots, n\}$, $d_i = \frac{b_i - a_i}{2}$. Primijetimo najprije da za izabrani $j \in I$ (a time i izabrani d_j) na Slici 19 može se pojaviti samo jedna točka, a može se pojaviti i više njih. Sve točke s apscisama d_j reprezentiraju sve intervale širine $2d_j$. Označimo nadalje:

- $I_1 = \{i \in I: d_i < d_j\}$ – indeksi točaka koje se na grafikonu (19) nalaze lijevo od točaka s apscisom d_j ;
- $I_2 = \{i \in I: d_i > d_j\}$ – indeksi točaka koje se na grafikonu (19) nalaze desno od točaka s apscisom d_j ;
- $I_3 = \{i \in I: d_i = d_j\}$ – indeksi točaka s apscisom d_j .

Primjerice, ako je j indeks točke T_j sa Slike 19 koja ima apscisu $\frac{d}{2}$ ($d = \frac{b-a}{3}$), imamo: $|I_1| = 11$, $|I_2| = 0$, $|I_3| = 1$. Ako je j indeks točke T_j koja ima apscisu $\frac{d}{6}$, imamo: $|I_1| = 7$, $|I_2| = 1$, $|I_3| = 4$. Ako je j indeks točke T_j koja ima apscisu $\frac{d}{27}$, imamo: $|I_1| = 0$, $|I_2| = 9$, $|I_3| = 3$. Formula (27) znači da je za dani $\hat{L} > 0$ koeficijent smjera pravca (26), koji prolazi točkom T_j manji ili jednak od koeficijentata smjera pravaca koji prolaze drugim točkama T_i , $i \in I$.

Ako (27) zapišemo kao

$$f(c_j) - f(c_i) \leq \hat{L}(d_j - d_i), \quad \forall i \in I, \quad (29)$$

onda za sve $i \in I_3$ uvjeti (27) jednostavno znače da točka T_j mora biti najniža između svih točaka apscise d_j , tj.

$$f(c_j) \leq f(c_i), \quad \forall i \in I_3. \quad (30)$$

Za $i \in I_1$ ($d_j - d_i > 0$) uvjete (27), odnosno (29) možemo zapisati

$$\frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \hat{L}, \quad \forall i \in I_1. \quad (31)$$

Za $i \in I_2$ ($d_j - d_i < 0$) uvjete (27), odnosno (29) možemo zapisati

$$\hat{L} \leq \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, \quad \forall i \in I_2. \quad (32)$$

Zato uvjete (27), odnosno (29) možemo pisati

$$f(c_j) \leq f(c_i), \quad \text{if } i \in I_3 \quad (33)$$

$$\max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \hat{L} \leq \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, \quad \text{if } I_1 \neq \emptyset \text{ and } I_2 \neq \emptyset \quad (34)$$

$$\max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \hat{L}, \quad \text{if } I_1 \neq \emptyset \text{ and } I_2 = \emptyset \quad (35)$$

$$\hat{L} \leq \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, \quad \text{if } I_1 = \emptyset \text{ and } I_2 \neq \emptyset. \quad (36)$$

Primijetite da je slučaj $I_1 = I_2 = \emptyset$ ne treba posebno promatrati jer je uključen u (33).

Uvjet (35) znači da mora postojati $\hat{L} > 0$, tako da je $\max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \hat{L}$, a praktično se može provjeriti tako da ispitamo je li $\max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} < +\infty$.

Uvjet (36) znači da mora postojati $\hat{L} > 0$, tako da je $\hat{L} \leq \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}$, a praktično se može provjeriti tako da ispitamo je li $\min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} > 0$!

Dakle, na taj način uvjete (27), odnosno (29), zapisali smo bez korištenja konstante \hat{L} !!!

Proanalizirajmo još proširenje pojma potencijalno optimalnog intervala sukladno Definiciji 5, koji sužava skup potencijalno optimalnih intervala. Ako je $f_{\min} \neq 0$ i $I_2 \neq \emptyset$, iz (28) koristeći (36) dobivamo

$$\epsilon \leq \frac{f_{\min} - f(c_j)}{|f_{\min}|} + \hat{L} \frac{d_j}{|f_{\min}|} \leq \frac{f_{\min} - f(c_j)}{|f_{\min}|} + \frac{d_j}{|f_{\min}|} \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i},$$

a ako je $f_{\min} \neq 0$ i $I_2 = \emptyset$, iz (28) i $\hat{L} \leq L$ dobivamo

$$\epsilon \leq \frac{f_{\min} - f(c_j)}{|f_{\min}|} + \hat{L} \frac{d_j}{|f_{\min}|} \leq \frac{f_{\min} - f(c_j)}{|f_{\min}|} + \frac{d_j}{|f_{\min}|} L.$$

Ako je $f_{\min} = 0$ i $I_2 \neq \emptyset$, iz (28) koristeći (36) dobivamo

$$f(c_j) \leq \hat{L} d_j \leq d_j \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i},$$

a ako je $f_{\min} = 0$ i $I_2 = \emptyset$, iz (28) i $\hat{L} \leq L$ dobivamo

$$f(c_j) \leq \hat{L} d_j \leq L d_j.$$

Zato uvjet (28) možemo zapisati

$$\epsilon \leq \frac{f_{\min} - f(c_j)}{|f_{\min}|} + \frac{d_j}{|f_{\min}|} K, \quad \text{if } f_{\min} \neq 0 \quad (37)$$

ili

$$f(c_j) \leq d_j K, \quad \text{if } f_{\min} = 0. \quad (38)$$

gdje je

$$K = \begin{cases} \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, & \text{if } I_2 \neq \emptyset, \\ L, & \text{if } I_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (39)$$

Dakle, na taj način i uvjete (28) zapisali smo bez korištenja konstante \hat{L} !!!
Na taj način možemo napisati uvjete ekvivalente uvjetima (27)–(28) bez korištenja konstante \hat{L} .

Lema 3. (Gablonsky, 2001) – korigirana

Neka je $L > 0$ Lipschitzova konstanta funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $I = \{1, \dots, n\}$, $f_{\min} = \min_{i \in I} f(c_i)$.

Interval s oznakom $j \in I$ je potencijalno optimalan u smislu Definicije 4 ako

$$(i) \quad f(c_j) \leq f(c_i), \quad \text{if } i \in I_3 \quad (40)$$

$$(ii) \quad \max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} \leq \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, \quad \text{if } I_1 \neq \emptyset \text{ and } I_2 \neq \emptyset \quad (41)$$

$$(iii) \quad \max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} < +\infty, \quad \text{if } I_1 \neq \emptyset \text{ and } I_2 = \emptyset \quad (42)$$

$$(iv) \quad \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i} > 0, \quad \text{if } I_1 = \emptyset \text{ and } I_2 \neq \emptyset \quad (43)$$

$$(v) \quad \epsilon \leq \frac{f_{\min} - f(c_j)}{|f_{\min}|} + \frac{d_j}{|f_{\min}|} K, \quad \text{if } f_{\min} \neq 0 \quad (44)$$

ili

$$(vi) \quad f(c_j) \leq d_j K, \quad \text{if } f_{\min} = 0, \quad (45)$$

gdje je

$$K = \begin{cases} \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, & \text{if } I_2 \neq \emptyset, \\ L, & \text{if } I_2 = \emptyset. \end{cases} \quad (46)$$

Programsku konstrukciju uvjeta (i)–(vi) isprogramirao sam ovako:

`false = 0;`

`Do[If[f[cj] > f[ci], false = 1], {i, I3}];`

`If[false = 0, Print["(i) je isp."];`

`If[(I1 ≠ ∅ and I2 ≠ ∅ and KL ≤ KD) or (I1 ≠ ∅ and I2 = ∅ and KL < +∞) or (I1 = ∅ and I2 ≠ ∅ and KD > 0),`

`Print["(ii-iv) je isp."];`

`If[If[I2 = ∅, K = L, K = KD]; (fmin = 0 and f[cj] ≤ Kdj) or (fmin ≠ 0 and ε ≤ $\frac{f_{\min} - f[c_j]}{|f_{\min}|} + \frac{d_j}{|f_{\min}|} K$),`

`Print["(v-vi) je isp."]; S=Append[S,j],`

`Print["(v-vi) nije isp."]`

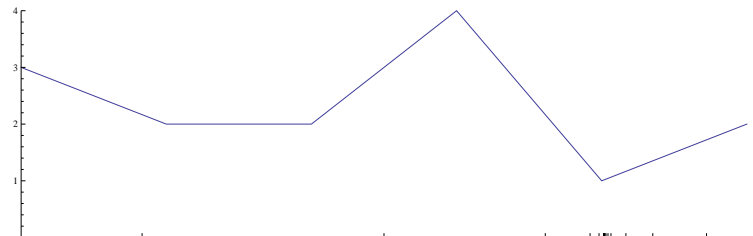
`], Print["(ii-iv) nije isp."]`

`], Print["(i) nije isp."]`

`], {j, n}`

$$KL = \max_{i \in I_1} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}, \quad KD = \min_{i \in I_2} \frac{f(c_j) - f(c_i)}{d_j - d_i}$$

Primjer 18. Na Slici 22 prikazan je iterativni postupak DIRECT s biranjem potencijalno optimalnih intervala u smislu Definicije 4.



Slika 22: Primjena algoritma DIRECT s izborom potencijalno optimalnih intervala

Primjedba 12. Ako se u algoritmu primijeni paralelno programiranje, onda se može postaviti pitanje je li traženje podintervala s najmanjom \mathcal{B} -vrijednosti efikasnije (brže) izdvajanjem potencijalno optimalnih intervala sukladno Definiciji 4 ili Definiciji 5 ili je efikasnije (brže) jednostavno ispitivati sve “donje” točke u klasterima točaka jednake apscise?

Primjedba 13. Možemo promatrati funkciju

$$\Phi(\lambda) = \operatorname{med}_i (y_i - \lambda)^2, \quad (47)$$

koja se pojavljuje kod Least Median of Squares. Vjerojatno bi u ovom slučaju DIRECT slabo funkcionirao jer je Lipschitzova konstanta ove funkcije vrlo velika. Mislim da ovo možemo razmatrati kao problem optimizacije funkcije sa skokovima prve vrste: postoje $\lim_{t \rightarrow x_0^-} f(t)$ i $\lim_{t \rightarrow x_0^+} f(t)$, ali su međusobno različiti.

U (Strongin and Vasiljev, 1984) opisan je postupak koji rješava ovakvu situaciju za jednu drugu metodu, ali se spominje da bi se na sličan način moglo pristupiti i metodi slomljenih pravaca (Pijavskij, 1972).

5.4.3 Diskretni DIRECT

Neka je $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, Lipschitzova funkcija s konstantom $L > 0$ zadana na diskretnom skupu $U = \{u_i \in \mathbb{R}: u_1 < \dots < u_n\}$. Treba odrediti

$$\operatorname{argmin}_U f. \quad (48)$$

Neka je $[a, b] = \{u_i \in U: a \leq u_i \leq b\}$ neki “interval” na U .

- Ako je $(a, b) = \{u_i \in U: a < u_i < b\}$ prazan ili jednočlan skup, cijeli “interval” $[a, b]$ zamijenim samo jednom točkom (nazovimo je s c) u kojoj se postiže najmanja vrijednost funkcije f na “intervalu” $[a, b]$;
- Ako (a, b) ima više od jednog člana, onda odredim

$$c \in \left(\operatorname{Med}_{a < u_i < b} u_i \right) \cap U \quad (49)$$

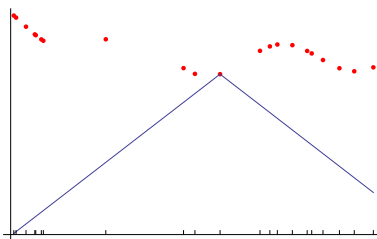
Slično kao kao kod DIRECT metode (Jones, 1993), dobivamo

$$f(x) \geq f(c) + L(x - c), \quad x \leq c, \quad (50)$$

$$f(x) \geq f(c) - L(x - c), \quad x \geq c \quad (51)$$

Graf funkcije f nalazi se iznad slomljene linearne funkcije čija je najmanja vrijednost na “intervalu” $[a, b]$ zadana s (vidi Sliku 23)

$$\mathcal{B}(a, b) = \min\{f(c) + L(a - c), f(c) - L(b - c)\}. \quad (52)$$



Slika 23: Donja ograda funkcija f na intervalu $[a, b]$

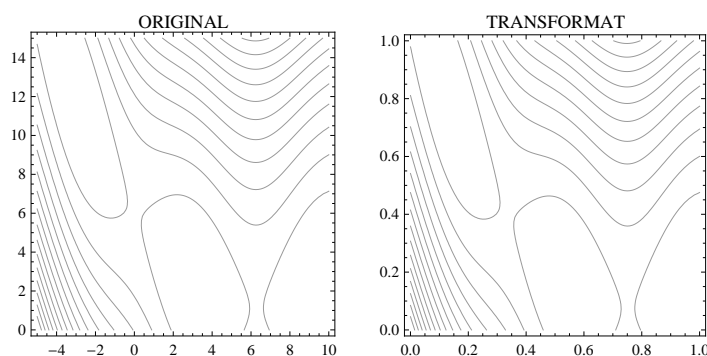
Dalje poduzmemo strategiju kao kod (Pijavskij, 1972) ili (Shubert, 1972) ili (Jones, 1993), a dokaz konvergencije imamo kao kod (Vasilev, 1974).

6 DIRECT algoritam za globalnu optimizaciju funkcija više varijabli

Primjer 19. Promatramo Branin funkciju, koja se razmatra kao test primjer u (Jones, 1993) $g: [-5, 10] \times [0, 15] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x_1, x_2) = \left(x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x_1 + 10$$

Ova funkcija postiže globalni minimum $g_{\min} = 0.398$ u tri različite točke. Jedna od njih je $x_1^* = (3.14159, 2.275)$.



Slika 24: ContourPlot of the Branin function

Za optimizaciju algoritmom DIRECT najprije treba odrediti preslikavanje koje pravokutnik $[-5, 10] \times [0, 15]$ prevodi u $[0, 1] \times [0, 1]$. Općenito, preslikavanje koje pravokutnik $[a, b] \times [c, d]$ prslikava u $[0, 1] \times [0, 1]$ zadano je s $T(x) = A(x - u)$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d-c} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}.$$

Na taj način umjesto optimizacije funkcije $g: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ provodimo optimizaciju funkcije $f = g \circ T^{-1}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $T^{-1}(x) = A^{-1}x + u$.

Postupak počinje dijeljenjem kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$ s centrom u točki $c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ na način opisan na Slici 25.a ako je

$$w_1 := \min\{f(c - \delta e_1), f(c + \delta e_1)\} \leq \min\{f(c - \delta e_2), f(c + \delta e_2)\} =: w_2, \quad (53)$$

odnosno na način opisan na Slici 25.b ako je

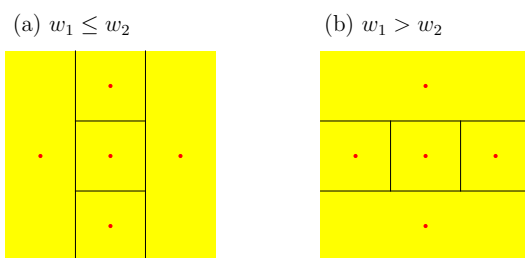
$$w_1 > w_2, \quad (54)$$

Tako dobivamo skup od $n = 5$ pravokutnika $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ s centrima

$$c_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), c_2 = (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}), c_3 = (\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2}), c_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \delta), c_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta), \quad (55)$$

gdje je $\delta = \frac{1}{3}$. Također, svakom pravokutniku pridružujemo duljine njegovih stranica u slučaju (53) (Slika 25.a)

$$h^{(1)} = (\delta, \delta), h^{(2)} = (\delta, 1), h^{(3)} = (\delta, 1), h^{(4)} = (\delta, \delta), h^{(5)} = (\delta, \delta), \quad (56)$$

Slika 25: Dijeljenje kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$

odnosno duljine njegovih stranica u slučaju (54) (Slika 25.b)

$$h^{(1)} = (\delta, \delta), h^{(2)} = (\delta, \delta), h^{(3)} = (\delta, \delta), h^{(4)} = (1, \delta), h^{(5)} = (1, \delta). \quad (57)$$

Kao mjeru veličine pravokutnika uzimamo

$$d_i = \max\{h_1^{(i)}, h_2^{(i)}\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (58)$$

Tako u slučaju (53) (Slika 25.a) imamo

$$d_1 = \delta, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = \delta, \quad d_5 = \delta,$$

a u slučaju (54) (Slika 25.b) imamo

$$d_1 = \delta, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = \delta, \quad d_4 = 1, \quad d_5 = 1.$$

Primjedba 14. Primijetite da je svaki pravokutnik P_i određen svojim centrom c_i i mjerom njegove veličine d_i . Također važno je primijetiti da smo za mjeru veličine pravokutnika mogli uzeti i nešto drugo (primjerice, poluduljinu maksimalne stranice ili udaljenost centra do vrha) – to nam dozvoljavaju zapisi uvjeta (ii), (iii) u Lemi 4! To će biti važno kod trokuta.

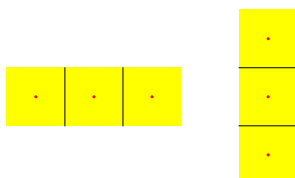
Kao početnu točku globalnog minimuma uzimamo

$$\{\hat{c}, f_{min}\}, \text{ gdje je } f_{min} = f(\hat{c}) = \min_{i=1, \dots, n} f(c_i). \quad (59)$$

Nadalje, primjenom Leme 4 pronađemo skup potencijalno optimalnih pravokutnika

$$S = \{P_\mu, \dots\} \subseteq P$$

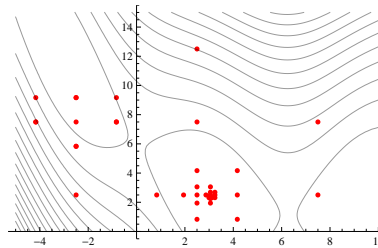
Skup potencijalno optimalnih pravokutnika S sadrži kvadrate ili paralelepipede. Ovisno tome provest ćemo njihovo dijeljenje na sljedeći način:



Slika 26: Dijeljenje pravokutnika

- Ako je potencijalno optimalni pravokutnik $P_\mu(c_\mu, d_\mu)$, kvadrat ($h_1^{(\mu)} = h_2^{(\mu)}$), dijelimo ga dalje prema (53) (Slika 25.a) ili prema (54) (Slika 25.b) ovisno o njegovim brojevima w_1, w_2 definiranim kao u (53). Primijetite da na taj način umjesto kvadrata $P_\mu(c_\mu, d_\mu)$ dobivamo manji kvadrat s istim centrom $P'_\mu(c_\mu, \frac{d_\mu}{3})$ i 4 nova pravokutnika. Dakle, ukupni broj pravokutnika postaje $n := n + 4$;
- Ako je potencijalno optimalni pravokutnik $P_\mu(c_\mu, d_\mu)$, pravokutnik ($h_1^{(\mu)} = h_2^{(\mu)}$), dijelimo ga dalje na tri jednaka dijela kao na Slici 26. Primijetite da na taj način umjesto pravokutnika $P_\mu(c_\mu, d_\mu)$ dobivamo manji kvadrat s istim centrom $P'_\mu(c_\mu, \frac{d_\mu}{3})$ i 2 nova kvadrata. Dakle, ukupni broj pravokutnika postaje $n := n + 2$;

Primjer 20. Za funkciju iz Primjera 19 Nakon 6 iteracija (41 centar) dobivamo $\hat{x} = (0.541152, 0.154321)$ i $f_{min} = 0.40$.



Slika 27: The Branin function and DIRECT-approxiamtions

Primjedba 15. Primijetite da u slučaju $N = 3$ kocku dijelimo na $2N + 1$ paralelepipeda na sljedeći način (vidi (Jones, 1993), Fig. 8, str. 169):

- po prvoj izabranoj koordinati (izbor ovisi o brojevima w_1, w_2, w_3 analogno definiranih kao u (53)) kocku dijelimo na 3 jednaka paralelepipeda (sloja);
- po drugoj izabranoj koordinati centralni paralelepiped (sloj) dijelimo na 3 jednaka paralelepipeda (sloja);
- po trećoj koordinati centralni paralelepiped (sloj) dijelimo na 3 jednake kocke.

Nadalje uvijek samo kocku dijelimo na na ovaj način. Paralelepipede, kakvi god bili, uvijek dijelimo na tri jednaka dijela.

7 Metoda tangenti za konveksnu funkciju

Definicija 6. Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna ako

$$f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v), \quad \forall u, v \in [a, b], \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (60)$$

Geometrijski smisao: u bilo kojoj točki iz $[a, b]$ tangenta je ispod grafa funkcije f .

Primjeri: $u \mapsto u^2$, $u \mapsto u$, $u \mapsto (-u)$, $u \mapsto |u|$, $u \mapsto e^u$, $u \mapsto e^{-u}$, $u \mapsto -\ln u$

Teorem 2. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna neprekidno diferencijabilna funkcija. Tada:

- (i) $f(u) \geq f(v) + f'(v)(u - v)$, $\forall u, v \in [a, b]$ (gradijentna nejednakost¹)
- (ii) Derivacija f' ne opada na $[a, b]$;
- (iii) $f \in Lip_L[a, b]$, gdje je $L = \max\{|f'(a+)|, |f'(b-)|\}$.

Dokaz. U svrhu dokaza tvrdnje (i) nejednakost (60) zapišimo u obliku

$$f(v + \alpha(u - v)) - f(v) \leq \alpha(f(u) - f(v)).$$

Primjenom Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti na lijevoj strani dobivamo

$$f'(v + \vartheta\alpha(u - v))\alpha(u - v) \leq \alpha(f(u) - f(v)), \quad \vartheta \in [0, 1],$$

odnosno

$$f'(v + \vartheta\alpha(u - v))(u - v) \leq f(u) - f(v), \quad \vartheta \in [0, 1].$$

Za $\alpha \rightarrow 0+$ dobivamo nejednakost (i).

Dokažimo tvrdnju (ii). U gradijentnoj nejednakosti (i) varijable u, v su ravnopravne. Zamijenimo li ih, iz (i) dobivamo

$f(v) \geq f(u) + f'(u)(v - u)$. Zbrajanjem ove nejednakosti s (i) dobivamo

$$(f'(u) - f'(v))(u - v) \geq 0.$$

Dokažimo tvrdnju (iii). Prema (ii) vrijedi $f'(a+) \leq f'(u) \leq f'(b-)$, $\forall u \in [a, b]$. Prema Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti postoji ξ između u i v , tj. postoji $\xi \in [a, b]$, takav da bude

$$|f(u) - f(v)| = |f'(\xi)(u - v)| \leq L|u - v| \quad \forall u, v \in [a, b],$$

gdje je prema (ii), $L = \max_{a \leq \xi \leq b} |f'(\xi)| = \max\{|f'(a+)|, |f'(b-)|\}$. □

Neka je U^* skup svih točaka globalnog minimuma funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mogući su sljedeći slučajevi:

1. Skup U^* je prazan, Primjerice, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$;
2. Skup U^* je jednočlan. Primjerice, $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
3. Skup U^* je višočlan. Primjerice, za funkcija iz Primjera 15 restringiranu na interval $[1, 4]$ skup $U^* = [2, 3]$.

Teorem 3. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija, koja na tom intervalu postiže svoj minimum. Tada je $f \in Q^*[a, b]$.

¹tangenta na glatku konveksnu funkciju u proizvoljnoj točki leži ispod grafa te funkcije

Dokaz. Vidi Vasilev (1974).

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna neprekidno diferencijabilna funkcija. Za fiksni $u_0 \in [a, b]$ definiramo funkciju

$$\Lambda(u, u_0) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0), \quad u \in [a, b]. \quad (61)$$

Zbog svojstva (i) iz *Teorema 2* vrijedi $f(u) \geq \Lambda(u, u_0), \quad \forall u \in [a, b]$.

Algoritam 4. (Metoda tangenti)

Korak 1: Izabрати $u_0 \in [a, b]$ i definirati $\Lambda(u, u_0) = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0)$;
Odrediti $u_1 = \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} \Lambda(u, u_0)$ (Očigledno je $u_1 = a$ ili $u_1 = b$);

Korak 2: Provjeriti je li $f'(u_0) \neq 0$;²
Definirati $\Lambda(u, u_1)$ i $P_1(u) = \max_{i=0,1} \Lambda(u, u_i)$;
Odrediti $u_2 = \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} P_1(u)$;

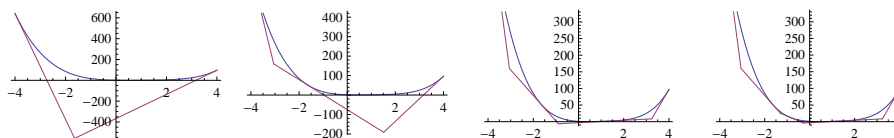
K_2 : Uz pretpostavku da su u_0, u_1, \dots, u_n ($n \geq 1$) poznati, provjeriti je li $f'(u_n) \neq 0$;
Definirati

$$P_n(u) = \max_{i=0, \dots, n} \Lambda(u, u_i) = \max \{ \Lambda(u, u_n), P_{n-1}(u) \}, \quad P_0 = \Lambda(u, u_0); \quad (62)$$

Odrediti $u_{n+1} = \operatorname{argmin}_{u \in [a, b]} P_n(u)$

P_n je neprekidna po dijelovima linearna funkcija, čiji graf je sastavljen od dijelova tangenti na graf funkcije f . Zato ovu metodu zovemo *Metoda tangenti*.

Primjer 21. Metodu tangenti ilustrirat ćemo na primjeru minimizacije funkcije $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (x - 1)^4$



Slika 28: Metoda tangenti

Teorem 4. Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna neprekidno diferencijabilna funkcija i neka je niz (u_n) definiran na prethodno opisan način u Algoritmu 4, pri čemu je $f'(u_n) \neq 0, n = 0, 1, \dots$. Tada

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(u_{n+1}) = f^* := \inf_{u \in [a, b]} f(u)$$

(ii) Niz (u_n) ima najviše dva gomilišta: $u^* = \inf U^*$, $u^{**} = \sup U^*$, gdje je U^* skup točaka minimuma funkcije f na $[a, b]$. Ako je U^* jednočlan, onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^*$.

Dokaz. Prema Teoremu 2 funkcija f zadovoljava Lipschitzov uvjet s konstantom $L = \max\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$. Korištenjem gradijentne nejednakosti (Teoremu 2(i)) dobivamo

$$\Lambda(u, u_n) \leq f(u), \quad \forall u \in [a, b] \text{ i za svaki } n = 0, 1, \dots$$

Zato niz funkcija (P_n) zadovoljava Lemu 2. Nadalje dokaz slijedi dokaz Teorema 2. □

²ako je $f'(u_0) = 0$, onda funkcija f u točki u_0 postiže minimum

Primjedba 16. Opisana *Metoda tangenti* može se modificirati za traženje minimuma konveksne funkcije (ne nužno derivabilne), koja na intervalu $[a, b]$ postiže svoj minimum. Naime, konveksna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna na (a, b) i u svakoj točki $x \in (a, b)$ postoje konačni limesi

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x+), \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} =: f'(x-),$$

pri čemu je $f'(x-) \leq f'(x+)$ (vidi *Zadatak 8*). Zato u prethodno opisanoj *Metodi tangenti* možemo staviti

$$\Lambda(u, u_n) = f(u_n) + \gamma_n(u - u_n), \quad u \in [a, b], \quad (63)$$

gdje je γ_n proizvoljna konstanta koja zadovoljava nejednakost

$$f'(u_n-) \leq \gamma_n \leq f'(u_n+).$$

Primijetite da nejednakost $f(u) \geq \Lambda(u, u_n)$, $u \in [a, b]$ pri tome ostaje sačuvana (vidi *Zadatak 9*). U primjeni najjednostavnije je γ_n odrediti iz uvjeta

$$|\gamma_n| = \min\{|f'(u_n-)|, |f'(u_n+)|\}.$$

Ako se za neki n pokaže da vrijedi

$$f'(u_n-) \leq 0 \leq f'(u_n+),$$

onda je u_n točka minimuma (vidi *Zadatak 10*) i proces je završen.

U cilju izbjegavanja mogućih degeneracija: $f'(a-) = -\infty$ ili $f'(b+) = +\infty$, dovoljno je iterativni proces započeti s točkama $u_0 = a + h_0$, $u_1 = b - h_1$, gdje h_0, h_1 treba izabrati tako da $f'(a + h_0+)$ i $f'(b - h_1-)$ računalo prepoznaje. Tvrđnje *Teorema 4* pri tome ostaju sačuvane.

7.1 Zadaci

Zadatak 7. Pokažite da za konveksnu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u}, \quad a \leq v < u < w \leq b. \quad (64)$$

Što je geometrijski smisao ovih nejednakosti?

Uputa. Iskoristiti konveksnost funkcije f i zapis $u = \alpha v + (1 - \alpha)w$, gdje je $v < u < w$, $\alpha = \frac{w-u}{w-v}$, $\alpha \in (0, 1)$.

Zadatak 8. Dokažite da je konveksna funkcij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u svim unutrašnjim točkama intervala $[a, b]$ i da ima konačne derivacije slijeva i sdesna, pri čemu vrijedi $f'(x-) \leq f'(x+)$, $x \in (a, b)$.

Uputa: Koristeći nejednakosti (64) dokazati da vrijedi

$$\frac{f(u) - f(u - \tau)}{\tau} \leq \frac{f(u) - f(u - h)}{h} \leq \frac{f(u + h) - f(u)}{h} \leq \frac{f(u + \tau) - f(u)}{\tau}, \quad (65)$$

gdje je $0 < h < \tau$; $u, u \pm \tau, u \pm h \in [a, b]$.

Zadatak 9. Dokažite da ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda vrijedi

$$f(u) \geq f(v) + \gamma_n(u - v), \quad \forall u \in [a, b], \forall v \in (a, b), \quad (66)$$

gdje je $\gamma_n \in \mathbb{R}$ proizvoljni broj takav da je $f'(v-) \leq \gamma_n \leq f'(v+)$.

Uputa. Iskoristiti nejednakost (65) razmotrivši slučajeve $u > v$ i $u < v$ i nejednakost $f'(v-) \leq f'(v+)$.

Zadatak 10. Dokažite da je $x^* \in [a, b]$ točka minimuma konveksne funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ onda i samo onda ako je $f'(x^*+) \geq 0$ i $f'(x^*-) \leq 0$. Specijalno, ako $f'(x^*)$ postoji i ako je $x^* \in (a, b)$, onda je $f'(x^*) = 0$.

Uputa. U (66) stavite $\gamma_n = 0$.

Zadatak 11. Dokažite da je konveksna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna skoro svuda na $[a, b]$.
Uputa. Koristeći monotonost funkcija $f'(u-)$ i $f'(u+)$, pokažite da je $f'(u-) = f'(u+)$ u svim točkama neprekidnosti $f'(u-)$ (ili $f'(u+)$).

Zadatak 12. Dokažite da konveksna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava Lipschitzov uvjet na svakom segmentu $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Na primjeru funkcije $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$ pokazati da u općem slučaju ovdje nije dobro staviti $\alpha = a$, $\beta = b$.

Uputa. Koristeći nejednakosti (64), (65) pokazati da je

$$f'(\alpha+) \leq \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq f'(\beta-), \quad \forall u, v \in [\alpha, \beta].$$

Zadatak 13. Diferencijabilna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna onda i samo onda ako njezina derivacija f' ne opada na $[a, b]$. Dovoljnost je dokazana u Teoremu ???. Dokažite nužnost.

Zadatak 14. Dokažite da je funkcija $f \in C^2[a, b]$ konveksna onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$.

Zadatak 15. Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna na intervalu (a, b) onda i samo onda ako postoji takva funkcija $l : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f(u) \geq f(v) + l(v)(u - v)$ za sve $u \in (a, b)$. Dokažite da je $l(v) \equiv f'(v)$ gotovo svuda.

Zadatak 16. Dokažite da ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotono rastuća, a $z : [c, d] \rightarrow [a, b]$ konveksna, onda je $f \circ z : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna.

7.2 Metoda parabola

Zadatak 17. (Ortega and Rheinboldt (1970), str. 254)

8 Strongin -metoda za traženje globalnog minimuma

Prema Strongin (1978) navest ćemo jednu metodu zasnovanu na informacijsko-statističkim pristupu, koja vodi prema točki globalnog minimuma.

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, koja na $[a, b]$ može primiti više lokalnih minimuma.

Algoritam 5. (Strongin)

K_0 : Izaberi $\epsilon > 0$, $u_0 = a$, $u_1 = b$ i izračunati $M = \frac{|f(u_1) - f(u_0)|}{u_1 - u_0}$

K_1 : Izračunati $\mu = \begin{cases} rM, & M > 0 \\ 1, & M = 0 \end{cases}$, gdje je $r > 0$ konstanta (parametar algoritma, primjerice $r = 2$)

K_2 : Izračunati sljedeću točku $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_0) - \frac{f(u_1) - f(u_0)}{2\mu}$.

K_3 : Uz pretpostavku da su određene točke $a = u_0 < u_1 < \dots < u_{k-1} < u_k = b$ odrediti veličine

$$M = \max_{1 \leq s \leq k} \frac{|f(u_s) - f(u_{s-1})|}{u_s - u_{s-1}}, \quad \mu = \begin{cases} rM, & M > 0 \\ 1, & M = 0 \end{cases}$$

i definirati funkciju cjelobrojnog argumenta $s = 1, \dots, k$

$$R_k(s) = \mu(u_s - u_{s-1}) + \frac{|f(u_s) - f(u_{s-1})|^2}{u_s - u_{s-1}} - 2(f(u_s) - f(u_{s-1}))$$

Odrediti $s_k \in \{1, \dots, k\}$ iz uvjeta $R_k(s_k) = \max_{1 \leq s \leq k} R_k(s)$.

Ako je $u_{s_k} - u_{s_k-1} \leq \epsilon$, proces završavamo u točki u_{s_k} ;

Ako je $u_{s_k} - u_{s_k-1} > \epsilon$, stavimo

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_{s_k} + u_{s_k-1}) - \frac{f(u_{s_k}) - f(u_{s_k-1})}{2\mu}.$$

Iz definicije broja μ vidi se da je $u_{s_k-1} < u_{k+1} < u_{s_k}$.

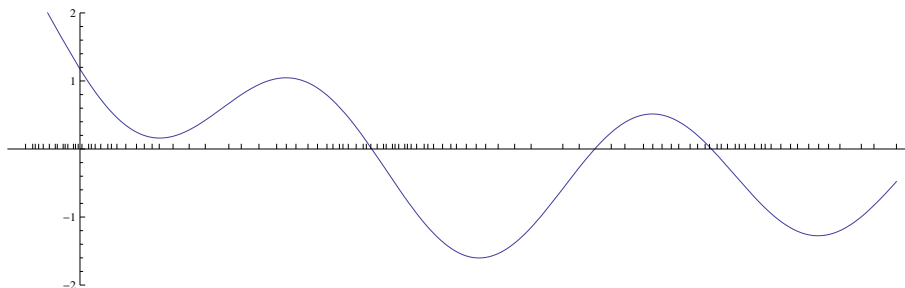
Sada treba prenumerirati niz $u_0, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ u rastućem poretku i prijeći na definiranje sljedeće točke u_{k+2} na analogan način.

```
In[1]:= f[x_]:= If[x <= 2, -x + 4,
             If[x <= 3, 2,
               If[x <= 4, 2 x - 4,
                 If[x <= 5, -3 x + 16, x - 4]]]]
a = 1.; b = 6.; ccc = 0; ddd = 4;

In[2]:= x= {a, b}; It=100;
Do[
  x = Sort[x]; k = Length[x];
  M = Max[Table[Abs[(f[x[[i]]]-f[x[[i-1]])]/(x[[i]]-x[[i-1]])], {i,2, k}]];
  m = If[M == 0, 1, r M];
  R = Table[m (x[[i]]-x[[i-1]])+(f[x[[i]]]-f[x[[i-1]])^2/(m(x[[i]]-x[[i-1]]))
            -2(f[x[[i]]]-f[x[[i-1]])), {i,2,k}];
  t = Position[R, Max[R]][[1]][[1]];
  x = Append[x, (x[[t+1]]+x[[t]])/2 - (f[x[[t+1]]]-f[x[[t]])/(2 m));
  , {n,It}]
Print[It, " ", x]
Plot[f[x], {x,a,b}, PlotRange -> {ccc, ddd}, AspectRatio -> .3,
      Ticks -> {Table[{x[[i]], ""}, {i, k+1}], Automatic}, ImageSize -> 700]
```

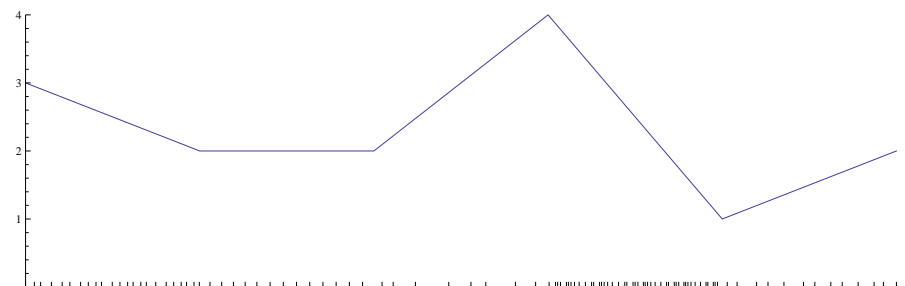
Primjer 22. Potražimo globalni minimum funkcije

$$f : [2.7, 7.5] \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x + \sin \frac{10}{3}x + \ln x - 0.84x + 3.$$



Slika 29: Niz aproksimacija globalnog minimuma

Primjer 23. Potražimo globalni minimum funkcije iz Primjera 15.



Slika 30: Niz aproksimacija globalnog minimuma

Literatura

- M. Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Dover Publications, Inc., New York, 2006.
- Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1993.
- Ю. М. Данилин, Ц. А. Пиявский, Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума, Тп. семинара “Теория оптимальных решений”, Киев Изд-во АН УССР **2**(1967), 25-37.
- В. Ф. Демянов, Ф. П. Василев, Недифференцируемая оптимизация, Наука, Москва, 1981.
- J. E. Dennis, Jr, R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- J. E. Dennis Jr., J. J. More, *Quasi-Newton methods, motivation and theory*, SIAM Review, **19**(1977), 46-89.
- D. E. Finkel, C. T. Kelley, *Additive scaling and the DIRECT algorithm*, J. Glob. Optim. **36**(2006), 597–608
- D. E. Finkel, C. T. Kelley, *Convergence analysis of the DIRECT algorithm*, 2004???
- R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Wiley, New York, 1987.
- J. M. Gablonsky, *Modifications of the Direct Algorithm*, PhD Thesis, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, 2001.
- P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- F. Jarre, J. Stoer *Optimierung*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- D. R. Jones, C. D. Perttunen, B. E. Stuckman, *Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant*, JOTA **79**(1993), 157–181
- D. E. Kvasov, Y. D. Sergeyev, *A univariate global search working with a set of Lipschitz constants for the first derivative*, Optimization Letters (to appear in 2011)
- J. H. Mathews, *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*, Prentice-Hall Int. Ed., London, 1992.

- J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- С. А. Пиявский, Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **12**(1972), 888-896.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- H. R. Schwarz, *Numerische Mathematik*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- B. Shubert, *A sequential method seeking the global maximum of a function*, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **9**(1972), 379-388
- J. Stoer, *Numerische Mathematik I*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- Р. Г. Стронгин, Численные методы в многоэкстремальных задачах, Наука, Москва, 1978.
- Р. Г. Стронгин, Ф. П. Василев, —, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* , 1984.
- R. J. Vanderbei, *Extension of Piyavskii's algorithm to continuous global optimization*, *Journal of Global Optimization* **14**(1999), 205-216
- Ф. П. Василев, Лекции по методам решения экстремальных задач, Издательство Московского университета, Москва, 1974.
- G. R. Wood, B. P. Zhang, *Estimation of the Lipschitz constant of a function*, *Journal of Global Optimization* **8**(1996) 91-103