Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike i računarstva

Dražen Šokčević
Redukcija sustava drugog reda
Diplomski rad

Osijek, 2023.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike
Sveučilišni diplomski studij matematike i računarstva

Dražen Šokčević
Redukcija sustava drugog reda
Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2023.

Sadržaj

1 Uvod

Linearno vremenski invarijantni sustavi modeliraju fizikalne sustave tako da možemo promatrati promjene u sustavu kroz vrijeme koje ovise o početnom stanju sustava i upravljanju. Sustavi drugog reda opisuju fizikalne modele u kojima se pojavljuje derivacija drugog reda. Sustavima drugog reda mogu se opisati vibriranje žica, mostova i zgrada, sustav masa na oprugama, dinamika robotskih sustava i mnogi drugi važni primjeri iz prakse. Važna svojstva sustava su stabilnost, upravljivost i osmotrivost. U primjeni često se pojavljuju sustavi velikih dimenzija što može dovesti do dugog vremena potrebnog za simulaciju, analizu i određivanje rješenja sustava. Redukcijom sustava želimo smanjiti sustav tako da reducirani sustav daje dobru aproksimaciju originalnog sustava, a vrijeme potrebno za određivanje rješenja i analizu reduciranog sustava kojim aproksimiramo početni sustav je puno manje. Metodom balansiranog odsijecanja sustav transformiramo u ekvivalentni sustav tako da transformiramo matrice koje opisuju sustav i reduciramo transformirani sustav smanjivanjem dimenzija matrica sustava, a reducirani sustav zadržava sva svojstva originalnog sustava i daje dobru aproksimaciju početnog sustava. Za sustave drugog reda balansirano odsijecanje daje dobru aproksimaciju, ali ne zadržava svojstva osim kada sustav ima posebnu strukturu.

1.1 Uvod u LTI sustave prvog reda

U ovom poglavlju definirat ćemo linearni vremenski invarijantni sustav i izvesti funkciju prijenosa koja prikazuje utjecaj ulaza na izlaz sustava.

Definicija 1.1.1 Linearni vremenski invarijantni (LTI) sustav definiran je s dvije jednadžbe

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^k, y(t) \in \mathbb{R}^m \text{ (LTI)}$$

pri čemu je $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^k$ ulaz, $x : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ stanje, $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ izlaz, a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $D \in \mathbb{R}^{m\times k}$ su matrice sustava. U slučaju kada je ulaz skalar ($k = 1$) sustav zovemo single-input, a u suprotnom kažemo da je sustav multi-input. Kada je y skalar ($m = 1$) onda sustav zovemo single-output, a u suprotnom kažemo da je sustav multi-output.

Primjenom Laplaceovih transformacija [6] na jednadžbe koje opisuju sustav dobivamo funkciju prijenosa. Za prvu jednadžbu dobivamo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) / \mathcal{L}$$

$$s\hat{x}(s) - x_0 = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s)$$

$$s\hat{x}(s) - A\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) + x_0$$

$$(sI - A)^{-1} / (sI - A)\,\hat{x}(s) = B\hat{u}(s) + x_0$$

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} B\hat{u}(s) + (sI - A)^{-1} x_0.$$

Slično za drugu jednadžbu

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)/\mathcal{L}$$

$$\hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s)$$

i uvrštavanjem izraza za $\hat{x}(s)$ dobivamo

$$\hat{y}(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B\hat{u}(s) + C\left(sI - A\right)^{-1} x_0 + D\hat{u}(s)$$

$$\hat{y}(s) = \left(C\left(sI - A\right)^{-1} B + D\right)\hat{u}(s) + C\left(sI - A\right)^{-1} x_0.$$

Funkciju prijenosa označavamo sa $G(s)$ i računamo $G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D$ i ona opisuje kako ulaz utječe na izlaz sustava. Više detalja o Laplaceovim transformacijama može se pogledati u [6]. Kod redukcije sustava važno je da reducirani sustav bude što sličniji originalnom. Norma sustava je važna za provjeru kvalitete aproksimacije jer nam daje informaciju o tome koliko smo pogriješili kod aproksimacije sustava.

Definicija 1.1.2 $\mathcal{H}_\infty$ norma asimptotski stabilnog LTI sustava sa funkcijom prijenosa $G(s)$ definira se

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \max_{w \in \mathbb{R}} \|G(iw)\|_2,$$

pri čemu je $\|R\|_2$ standardna inducirana 2 norma matrice R.

Pretpostavimo da smo reducirali asimptotski stabilan sustav i neka je njegova funkciju prijenosa G_r, a y_r izlaz. Tada se može pokazati [1] da za svaki ulaz sa konačnim $\|u\|_{L_2}$ vrijedi relacija

$$\|y - y_r\|_{L_2} \leq \|G - G_r\|_{\mathcal{H}_\infty} \|u\|_{L_2}.$$

Ako reduciramo asimptotski stabilne sustave tako da je razlika između funkcija prijenosa mala onda smo sigurni da će i razlika u izlazima biti malo odnosno da je aproksimacija kvalitetna. Važno svojstvo sustava je algebarska ekvivalentnost sustava. Algebarska ekvivalentnost sustava osigurava da sustav možemo transformirati tako da transformiramo matrice sustava i tako dobiveni sustav ima ista svojstva i funkciju prijenosa kao originalni sustav. U nastavku dajemo definiciju algebarske ekvivalentnosti prema [4].

Definicija 1.1.3 LTI sustav $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ algebarski je ekvivalentan LTI sustavu $\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = \overline{A}\overline{x}(t) + \overline{B}u(t) \\ y(t) = \overline{C}\overline{x}(t) + \overline{D}u(t) \end{cases}$ ako postoji regularna matrica $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da vrijedi $\overline{x} = Tx, \overline{A} = TAT^{-1}, \overline{B} = TB, \overline{C} = CT^{-1}, \overline{D} = D.$

1.2 Stabilnost sustava

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam stabilnosti sustava. Stabilnost sustava osigurava da će sustav doći u ravnotežni položaj u konačnom vremenu neovisno o početnom stanju sustava. Stabilnost sustava je nužan uvjet za redukciju sustava algoritmom balansiranog odsijecanja.

Definicija 1.2.1 Za LTI sustav kažemo da je asimptotski stabilan ukoliko za svaki početni uvjet $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da $x(t) \to 0$ kako $t \to \infty$.

Dokaz sljedećeg teorema koji daje karakterizaciju stabilnosti može se pogledati u [4].

Teorem 1.2.2 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne za LTI sustav*

i) *Sustav je asimptotski stabilan.*

ii) *Sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realan dio.*

iii) *Za svaku pozitivno definitnu matricu Q postoji jedinstvena simetrična pozitivno definitna matrica W koja zadovoljava Ljapunovljevu jednadžbu*

$$A^T W + WA = -Q.$$

1.3 Upravljivost sustava

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam upravljivosti sustava. Upravljivost sustava osigurava da sustav možemo dovesti u proizvoljno stanje u konačnom vremenu uz pravilan odabir ulaza. Ukoliko je sustav stabilan i upravljiv možemo izračunati matricu gramijana upravljivosti koja je potrebna za algoritam balansiranog odsijecanja rješavanjem Ljapunovljeve jednadžbe, a to će biti analizirano u nastavku.

Definicija 1.3.1 Za LTI sustav kažemo da je upravljiv ako počevši iz proizvoljnog stanja x_0 sustav možemo dovesti u proizvoljno stanje $x_1 = x(t_1)$ u konačnom vremenu t_1 uz pravilan odabir ulaza $u(t)$, za $0 \leq t \leq t_1$.

Sljedeći teorem služi za provjeru svojstva upravljivosti LTI sustava koje ovisi o matricama A i B preko ranga matrice upravljivosti i daje karakterizaciju upravljivosti, a njegov dokaz se može pogledati u [4].

Teorem 1.3.2 *Za matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k}, k \leq n$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne*

i) *LTI je upravljiv.*

ii) *Matrica upravljivosti $C_m = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$ je punog ranga n.*

Pretpostavimo da je sustav stabilan. Sljedeći teorem poznatiji kao Ljapunov test upravljivosti nije najstabilniji, ali daje karakterizaciju upravljivosti preko Ljapunovljeve jednadžbe koju kada riješimo dobivamo gramijan upravljivosti P.

Teorem 1.3.3 *Stabilan LTI sustav je upravljiv ako i samo ako postoji jedinstveno pozitivno definitno rješenje P Ljapunovljeve jednadžbe*

$$AP + PA^T = -BB^T.$$

Schurova metoda je efikasna i često korištena numerička metoda za rješavanje Ljapunovljevih jednadžbi. Implementaciju Schurove metode i više detalja o numeričkim metodama za rješavanje Ljapunovljevih jednadžbi mogu se pogledati u [2].

1.4 Osmotrivost sustava

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam osmotrivosti sustava. Osmotrivost sustava je svojstvo sustava koje osigurava da jedinstveno možemo odrediti početno stanje sustava ako poznajemo upravljanje i izlaz sustava. Za algoritam balansiranog odsijecanja potrebno je izračunati gramijan osmotrivosti. Gramijan osmotrivosti može se izračunati rješavanjem Ljapunovljeve jednadžbe ako je sustav stabilan i osmotriv.

Definicija 1.4.1 Za LTI sustav kažemo da je osmotriv ako $\exists t_1 > 0$ tako da početno stanje x_0 može biti jedinstveno određeno iz poznavanja kontrole $u(t)$ i izlaza $y(t)$ za sve $0 \leq t \leq t_1$.

Sljedeći teorem koristi se za provjeru osmotrivosti sustava, a njegov dokaz se može pogledati u [4].

Teorem 1.4.2 *Za matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne*

i) LTI je osmotriv.

ii) Matrica osmotrivosti $O_m = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ *je punog ranga n.*

Slično kao kod Ljapunovljevog testa upravljivosti ukoliko je sustav stabilan važan teorem je Ljapunov test osmotrivosti. Rješavanjem Ljapunovljeve jednadžbe dobivamo gramijan osmotrivosti Q koji je potreban za algoritam balansiranog odsijecanja.

Teorem 1.4.3 *Stabilan LTI sustav je osmotriv ako i samo ako postoji jedinstveno pozitivno definitno rješenje Q Ljapunovljeve jednadžbe*

$$A^TQ + QA = -C^TC.$$

Pokažimo postupak provjere svojstva stabilnosti, upravljivosti i osmotrivosti na primjeru jednog jednostavnog LTI sustava

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}.$$

Kako bi provjerili stabilnost sustava preko teorema 1.2.2 trebamo odrediti svojstvene vrijednosti matrice A

$$\det(\lambda I - A) = 0$$
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda(\lambda + 3) + 2 = 0$$
$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Sustav je stabilan jer sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realan dio. Za provjeru upravljivosti sustava odredimo rang matrice upravljivosti

$$\text{rang}(C_m) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} B, AB \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Matrica upravljivosti je punog ranga pa prema teoremu 1.3.2 sustav je upravljiv. Slično za osmotrivost sustava prema teoremu 1.4.2 dovoljno je provjeriti je li matrica osmotrivosti punog ranga. Odredimo rang matrice osmotrivosti

$$\text{rang}(O_m) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Matrica osmotrivosti je punog ranga pa je sustav osmotriv.
Definirat ćemo dekompoziciju matrice na singularne vrijednosti i Cholesky dekompoziciju matrice koje se koriste u algoritmu balansiranog odsijecanja.

Definicija 1.4.4 Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dekompoziciju matrice

$$A = U\Sigma V^*$$

pri čemu su matrice $U \in \mathbb{C}^{m\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarne, a matrica $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dijagonalna sa elementima $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ koje zovemo singularne vrijednosti matrice A pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_n \geq 0$ zovemo singularna dekompozicija matrice A.

Za svaku matricu postoji dekompozicija na singularne vrijednosti. Više detalja o singularnoj dekompoziciji matrice i dokaz da postoji za svaku matricu mogu se pogledati u [7].

Definicija 1.4.5 Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Cholesky dekompozicija matrice A je

$$A = LL^T$$

pri čemu je L donje trokutasta nesingularna matrica.

Teorem 1.4.6 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Postoji jedinstvena Cholesky dekompozicija matrice A ako i samo ako je A simetrična pozitivno definitna matrica.*

Cholesky dekompozicija matrice koristi se u mnogim algoritmima. Uvjeti za Cholesky dekompoziciju matrice su da je matrica simetrična i pozitivno definitna. Više detalja o Cholesky dekompoziciji može se pogledati u [3].

2 Algoritam balansiranog odsijecanja

2.1 Balansirani sustav

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam balansiranog sustava. Balansirani sustav je važan jer kada reduciramo balansirani sustav na manju dimenziju od originalnog sustava dobivamo dobru aproksimaciju i iznos najveće pogreške za reduciranu dimenziju. Svaki stabilan, upravljiv i osmotriv LTI sustav prvog reda može se transformirati u algebarski ekvivalentan sustav koji je balansiran.

Definicija 2.1.1 Asimptotski stabilan sustav $[A, B, C, D]$ sa gramijanom upravljivosti P i gramijanom osmotrivosti Q se zove balansiran ako je

$$P = Q = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Sljedeća lema koristi se u dokazu da svaki stabilan, upravljiv i osmotriv sustav prvog reda možemo transformirati u ekvivalentni balansirani sustav.

Lema 2.1.2 *Neka je dan asimptotski stabilan, upravljiv i osmotriv sustav* $[A, B, C, D]$ *i neka je* $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *regularna te* $\left[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\right] = [T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D]$. *Tada vrijedi*

i) ako je P *gramijan upravljivosti od* $[A, B, C, D]$, *a* $\overline{P}$ *gramijan upravljivosti od* $\left[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\right]$ *onda je* $\overline{P} = T^{-1}P\,(T^{-1})^T$.

ii) ako je Q *gramijan osmotrivosti od* $[A, B, C, D]$, *a* $\overline{Q}$ *gramijan osmotrivosti od* $\left[\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\right]$ *onda je* $\overline{Q} = T^TQT$.

Dokaz. Za dokazivanje $i)$ pokažimo da je matrica $\overline{P} = T^{-1}P\,(T^{-1})^T$ gramijan upravljivosti transformiranog sustava odnosna da je rješenje Ljapunovljeve jednadžbe

$$\overline{A}\;\overline{P} + \overline{P}\;\overline{A}^T = -\overline{B}\;\overline{B}^T$$

pri čemu su $\overline{A} = T^{-1}AT$, $\overline{B} = T^{-1}B$, $\overline{C} = CT$, $\overline{D} = D$.
Množenjem matrica $\overline{A}$ i $\overline{P}$ dobivamo

$$\overline{A}\;\overline{P} = T^{-1}ATT^{-1}P\left(T^{-1}\right)^T = T^{-1}AP\left(T^{-1}\right)^T.$$

Slično množenjem matrica $\overline{P}\;\overline{A}^T$ dobivamo

$$\overline{P}\;\overline{A}^T = T^{-1}P\left(T^{-1}\right)^T\left(T^{-1}AT\right)^T = T^{-1}P\left(T^{-1}\right)^T T^TA^T\left(T^{-1}\right)^T = T^{-1}PA^T\left(T^{-1}\right)^T.$$

Zbroj matrica $\overline{A}\;\overline{P} + \overline{P}\;\overline{A}^T$ možemo jednostavnije zapisati na sljedeći način

$$\overline{A}\;\overline{P} + \overline{P}\;\overline{A}^T = T^{-1}\left(AP + PA^T\right)\left(T^{-1}\right)^T.$$

Preostalo je pokazati da je taj zbroj jednak izrazu $-\overline{B}\;\overline{B}^T$

$$-\overline{B}\;\overline{B}^T = -T^{-1}B\left(T^{-1}B\right)^T = T^{-1}\left(-BB^T\right)\left(T^{-1}\right)^T.$$

Matrica P je gramijan upravljivosti originalnog sustava pa za nju vrijedi $AP+PA^T = -BB^T$. Uvrštavanjem tog izraza u gornju jednakost dobivamo

$$-\overline{B}\ \overline{B}^T = T^{-1}\left(AP + PA^T\right)\left(T^{-1}\right)^T.$$

Pokazali smo da je matrica $\overline{P}$ rješenje Ljapunovljeve jednadžbe transformiranog sustava i tako dokazali da je ona gramijan upravljivosti tog sustava. Analogno pokažimo *ii*) odnosno da je $\overline{Q} = T^TQT$ gramijan osmotrivosti transformiranog sustava. Dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\overline{A}^T\ \overline{Q} + \overline{Q}\ \overline{A} = -\overline{C}^T\ \overline{C}.$$

Množenjem matrica $\overline{A}^T$ i $\overline{Q}$ dobivamo

$$\overline{A}^T\ \overline{Q} = \left(T^{-1}AT\right)^T T^TQT = T^TA^T\left(T^{-1}\right)^T T^TQT = T^TA^TQT.$$

Analogno množenjem matrica $\overline{Q}$ i $\overline{A}$ dobivamo

$$\overline{Q}\ \overline{A} = T^TQTT^{-1}AT = T^TQAT.$$

Zbroj matrica $\overline{A}^T\ \overline{Q} + \overline{Q}\ \overline{A}$ možemo zapisati

$$\overline{A}^T\ \overline{Q} + \overline{Q}\ \overline{A} = T^T\left(A^TQ + QA\right)T.$$

Pokažimo da je taj zbroj jednak $-\overline{C}^T\ \overline{C}$ uz pretpostavku da je Q gramijan osmotrivosti originalnog sustava i da riješava $A^TQ + QA = -C^TC$

$$-\overline{C}^T\ \overline{C} = -\left(CT\right)^T CT = T^T\left(-C^TC\right)T = T^T\left(A^TQ + QA\right)T.$$

Teorem 2.1.3 *Neka je* $[A, B, C, D]$ *asimptotski stabilan, upravljiv i osmotriv LTI sustav. Tada postoji regularna matrica* $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *takva da je* $[T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D]$ *balansiran.*

Dokaz. Sustav je stabilan i upravljiv pa prema teoremu 1.3.3 postoji pozitivno definitna matrica P koja je gramijan upravljivosti. Sustav je dodatno osmotriv pa prema teoremu 1.4.3 postoji pozitivno definitna matrica Q koja je gramijan osmotrivosti. S obzirom da su P i Q pozitivno definitne prema teoremu 1.4.6 možemo napraviti Cholesky dekompoziciju matrica P i Q

$$P = RR^T$$

$$Q = LL^T.$$

Neka je singularna dekompozicija matrice $L^TR = U\Sigma V^T$. Za matricu transformacije sustava uzmimo $T = RV\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ pri čemu je $\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}}\right)$. Pokažimo da je $T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^TL^T$. Matrice U i V su ortogonalne

$$U^T / L^TR = U\Sigma V^T / V$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} / U^TL^TRV = \Sigma / \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}U^TL^TRV\Sigma^{-\frac{1}{2}} = I.$$

Treba pokazati da je transformirani sustav balansiran odnosno da vrijedi jednakost $\overline{P} = \overline{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Prema svojstvu $i)$ leme 2.1.2

$$\overline{P} = T^{-1} P \left(T^{-1}\right)^T$$

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T L^T R R^T L U \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\overline{P} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T U \Sigma V^T V \Sigma U^T U \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\overline{P} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma.
\end{aligned}$$

Slično prema svojstvu $ii)$ leme 2.1.2 može se pokazati da za $\overline{Q}$ vrijedi

$$\overline{Q} = T^T Q T$$

$$\begin{aligned}
\overline{Q} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} V^T R^T L L^T R V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\overline{Q} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} V^T V \Sigma U^T U \Sigma V^T V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \\
\overline{Q} &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Sigma \Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma.
\end{aligned}$$

Algoritam balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda može se pronaći u Algoritmu 1. Za taj algoritam postoji i pripadna ocjena pogreške koja se u algoritmu i koristi. Više detalja o algoritmu mogu se pronaći u [2].

2.2 Algoritam

Algoritam 1: Balansirano odsijecanje sustava prvog reda

Ulaz: *Matrice stabilnog, upravljivog i osmotrivog sustava prvog reda* A, B, C, D *i dimenzija reduciranog modela* r

Odrediti gramijan upravljivosti i gramijan osmotrivosti rješavanjem Ljapunovljevih jednadžbi

$$AP + PA^T = -BB^T, \quad A^TQ + QA = -C^TC.$$

Napraviti Cholesky dekompoziciju matrica P i Q

$$P = RR^T, \quad Q = LL^T.$$

Napraviti dekompoziciju matrice L^TR na singularne vrijednosti

$$L^TR = U\Sigma V^T.$$

Izračunaj ocjenu pogreške

$$\|G - \tilde{G}\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2\sigma_{r+1}.$$

Izračunaj matrice transformacije T i T^{-1}

$$T = RV\Sigma^{-\frac{1}{2}}, \quad T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U^TL^T.$$

Izačunaj matrice balansiranog sustava

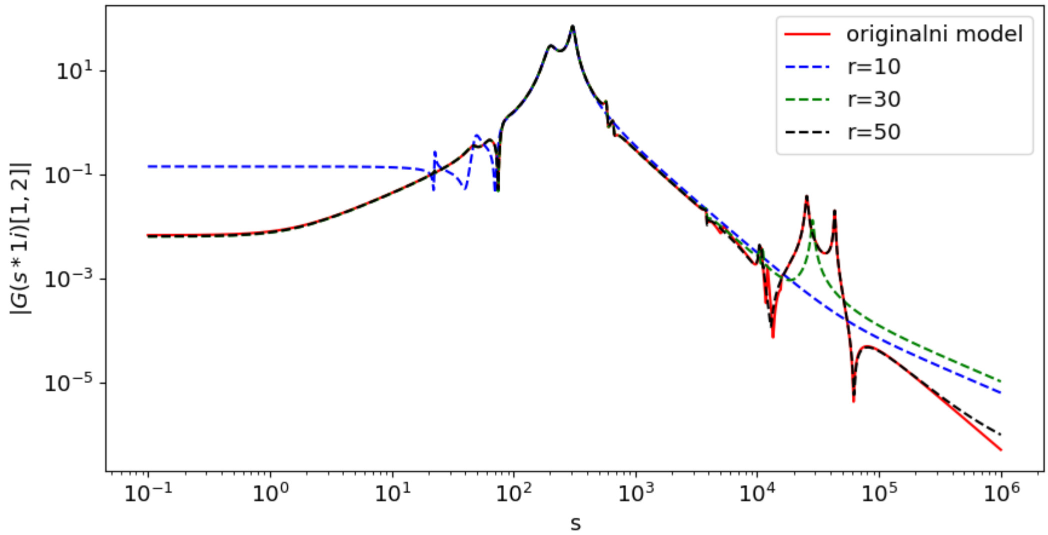
$$\hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad \hat{C} = CT.$$

Matrica reduciranog sustava $\overline{A}$ dobije se tako da se uzme prvih r redaka i stupaca matrice $\hat{A}$, matrica $\overline{B}$ dobije se tako da se uzme prvih r redaka matrice $\hat{B}$, matrica $\overline{C}$ dobije se tako da se uzme prvih r stupaca matrice $\hat{C}$ i matrica $\overline{D} = D$.

Izlaz: *Matrice* $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ *reduciranog sustava i ocjena pogreške*

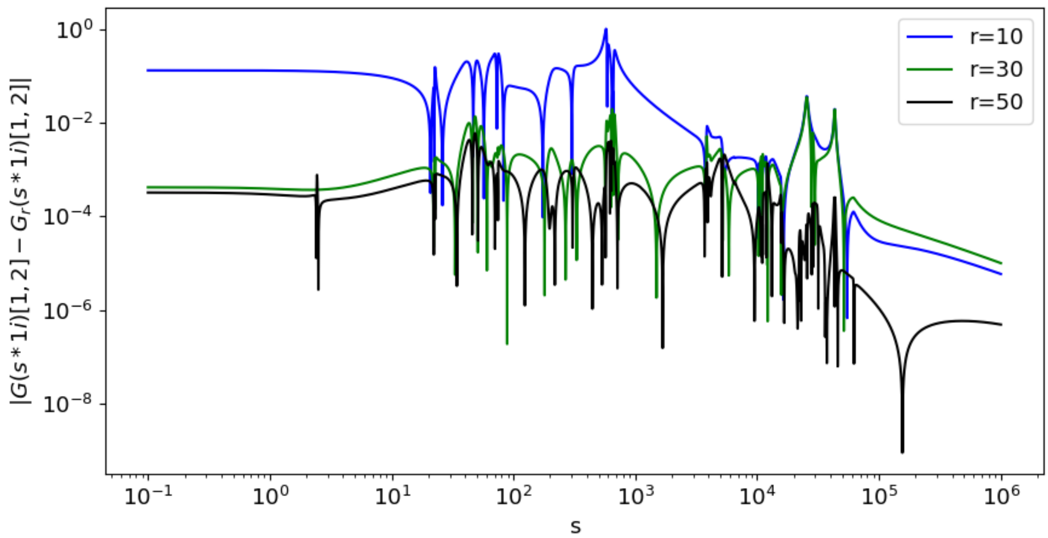
2.3 Primjer redukcije na CD player modelu

CD player model modelira pomicanje ruke horizontalno na kojoj se nalazi laser za čitanje podataka sa CD-a. Dimenzije matrica koje opisuju model su $A \in \mathbb{R}^{120\times120}, B \in \mathbb{R}^{120\times2}, C \in \mathbb{R}^{2\times120}$ i $D = 0$. Više o modelu može se pogledati u [8]. Model ćemo reducirati na dimenzije $10, 30, 50$ i za svaku reduciranu dimenziju prikazati funkciju prijenosa originalnog i reduciranog modela i njihovu razliku. Za svaku redukciju promatrat ćemo kako prvi ulaz utječe na drugi izlaz sustava odnosno prvi redak i drugi stupac iz funkcije prijenosa.



Slika 1: Funkcija prijenosa originalnog modela i reduciranih modela

Slika 1. prikazuje funkciju prijenosa originalnog modela i reduciranih modela. Aproksimacija sustava je najbolja kada je dimenzija na koju se sustav reducira najveća.



Slika 2: Razlika funkcija prijenosa originalnog modela i reduciranih modela

Slika 2. prikazuje apsolutnu razliku funkcije prijenosa originalnog modela i funkcije prijenosa reduciranih modela. Razlika je najveća kada je dimenzija na koju reduciramo sustav najmanja.

3 LTI sustav drugog reda

3.1 Definicija

U ovom poglavlju definirat ćemo linearni vremenski invarijantni sustav drugog reda i neka osnovna svojstva.

Definicija 3.1.1 Linearni vremenski invarijantni (LTI) sustav drugog reda definiran je s dvije jednadžbe

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = B_2 u(t) \\ C_2\dot{q}(t) + C_1 q(t) = y(t) \end{cases}$$

pri čemu je $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna, $D, K \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $q(t) \in \mathbb{R}^n$. Matrica $u(t) \in \mathbb{R}^m$ je ulaz, a $y(t) \in \mathbb{R}^p$ je matrica izlaza. Sustav jednostavnije možemo označiti sa $G = [M, D, K, B_2, C_1, C_2]$

3.2 Svojstva

Funkcija prijenosa opisuje kako ulaz utječe na izlaz sustava. Možemo je odrediti primjenom Laplaceovih transformacija na jednadžbe koje opisuju sustav i korisiti za provjeru točnosti aproksimacije. Funkcija prijenosa za (LTI) drugog reda dana je sa

$$G(s) = (sC_2 + C_1)(s^2M + sD + K)^{-1}B_2.$$

Stabilnost sustava drugog reda osigurava da će sustav doći u ravnotežni položaj u konačnom vremenu. Ukoliko je sustav drugog reda stabilan gramijani sustava koji su važni za algoritam mogu se odrediti rješavanjem generaliziranih Ljapunovljevih jednadžbi. Sustavi drugog reda mogu biti stabilni, upravljivi i osmotrivi kao i sustavi prvog reda. Više detalja o sustavu drugog reda može se pronaći u [5].

Definicija 3.2.1 (LTI) sustav drugog reda je asimptotski stabilan ako sve nultočke matričnog polinoma $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda D + K$ imaju negativan realan dio.

Definicija 3.2.2 (LTI) sustav drugog reda je upravljiv ako vrijedi

$$rang\left[\lambda^2 M + \lambda D + K, B_2\right] = n, \forall\lambda \in \mathbb{C}.$$

Definicija 3.2.3 (LTI) sustav drugog reda je osmotriv ako vrijedi

$$rang\left[\lambda^2 M^T + \lambda D^T + K^T, \lambda C_2^T + C_1^T\right] = n, \forall\lambda \in \mathbb{C}.$$

3.3 Linearizacija sustava

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako sustav drugog reda možemo zapisati kao sustav prvog reda. To je potrebno za algoritam jer se matrice transformiranog sustava koriste za rješavanje Ljapunovljevih jednadžbi. Kako bi zapisali prvu jednadžbu u matričnom obliku

$$\dot{q}(t) - \dot{q}(t) = 0$$
$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = B_2 u(t).$$

Jednadžbe možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ M\ddot{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}(t) \\ Kq(t) + D\dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2u(t) \end{bmatrix}.$$

Uz supstituciju $x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ K & D \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -D \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t).$$

Drugu jednadžbu $C_2\dot{q}(t) + C_1q(t) = y(t)$ koja opisuje sustav možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = y(t)$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(t) = y(t).$$

(LTI) sustav drugog reda možemo zapisati u obliku (LTI) sustava prvog reda

$$\begin{cases} \mathcal{E}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases},$$

pri čemu je $x(t) = \begin{bmatrix} q(t)^T, \dot{q}(t)^T \end{bmatrix}^T$ i matrice su dane po blokovima dimenzija $n \times n$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -D \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1, & C_2 \end{bmatrix}.$$

Nakon transformacije sustava mogli bi primijeniti algoritam balansiranog odsijecanja za sustav prvog reda, ali matrice bi mogle izgubiti strukturu sustava drugog reda. Slično algoritmu balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda prije redukcije želimo transformirati sustav u ekvivalentni sustav.

Definicija 3.3.1 Kažemo da su sutav $G = [M, D, K, B_2, C_1, C_2]$ i $\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{M}, \hat{D}, \hat{K}, \hat{B}_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2 \end{bmatrix}$ ekvivalentni ako postoje regularne matrice $W, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takve da vrijedi

$$\hat{M} = WMT, \quad \hat{D} = WDT, \quad \hat{K} = WKT, \quad \hat{B}_2 = WB_2, \quad \hat{C}_1 = C_1T, \quad \hat{C}_2 = C_2T.$$

Može se pokazati ako su sustavi ekvivalenti onda imaju istu funkciju prijenosa.

3.4 Gramijani sustava drugog reda

Za algoritam balansiranog odsijecanja potrebno je odrediti gramijan upravljivosti P i gramijan opažajnosti Q. Pretpostavimo da je sustav drugog reda asimptotski stabilan, tada se gramijani mogu odrediti rješavanjem generaliziranih Ljapunovljevih jednadžbi koje imaju jedinstveno, simetrično i pozitivno semidefinitno rješenje

$$\mathcal{E}PA^T + AP\mathcal{E}^T = -BB^T, \quad \mathcal{E}^TQA + A^TQ\mathcal{E} = -C^TC.$$

Gramijane možemo podijeliti u blokove dimenzija $n \times n$ tako da

$$P = \begin{bmatrix} P_p & P_{12} \\ P_{12}^T & P_v \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_p & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_v \end{bmatrix}.$$

Gramijani pozicije i brzine upravljanja su P_p i P_v, a gramijani pozicije i brzine opažanja su Q_p i Q_v Slično kao kod algoritma balansiranog odsijecanja za sustav prvog reda potrebno je izračunati Cholesky faktorizaciju matrica P_p, P_v, Q_p i Q_v. Označimo te matrice sa

$$P_p = R_p R_p^T, \quad P_v = R_v R_v^T, \quad Q_p = L_p L_p^T, \quad Q_v = L_v L_v^T.$$

4 Algoritam balansiranog odsijecanja za sustav drugog reda

4.1 Balansirani sustav drugog reda

Za LTI sustave drugog reda ne postoji transformacija sustava takva da su svi gramijani transformiranog sustava balansirani [5]. Odabirom metode odnosno odabirom matrica koje transformiraju sustav možemo balansirati par gramijana koji želimo. U nastavku rada bavimo se metodom zasnovanom na balansiranju pozicija.

Definicija 4.1.1 Stabilan LTI sustav drugog reda zovemo pozicijski balansiran ako vrijedi $P_p = Q_p = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Teorem 4.1.2 *Neka je dan stabilan LTI sustav drugog reda $G = [M, D, K, B_2, C_1, C_2]$. Tada postoje regularne matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takve da je $\hat{G} = [WMT, WDT, WKT, WB_2, C_1T, C_2T]$ pozicijski balansiran.*

Dokaz. Pretpostavili smo da je sustav drugog reda stabilan pa prema [5] postoje jedinstvena, pozitivno semidefinitna i simetrična rješenja generaliziranih Ljapunovljevih jednadžbi. Napravimo Cholesky dekompoziciju blokova P_p i Q_p

$$P_p = R_p R_p^T$$

$$Q_p = L_p L_p^T.$$

Neka je $R_p^T L_p = U_p \Sigma V_p^T$ singularna dekompozicija pri čemu je $\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}}\right)$. Tada su matrice U_p i V_p ortogonalne. Za odabir matrice transformacije $T = R_p U_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$ pokažimo da je sustav uz proizvoljan odabir regularne matrice transformacije W pozicijski balansiran. Pokažimo da je matrica T regularna

$$U_p^T / R_p^T L_p = U_p \Sigma V_p^T \ / V_p$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} / U_p^T R_p^T L_p V_p = \Sigma / \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} U_p^T R_p^T L_p V_p \Sigma^{-\frac{1}{2}} = I /^T$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} V_p^T L_p^T R_p U_p \Sigma^{-\frac{1}{2}} = I$$

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} V_p^T L_p^T T = I.$$

Matrica T je regularna i inverzna matrica je $T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} V_p^T L_p^T$. Preostaje pokazati da ona balansira gramijane. Slično kao kod sustava prvog reda prema [5] gramijani transformiranog sustava drugog reda dani su sa

$$\hat{P}_p = T^{-1} P_p \left(T^{-1}\right)^T$$

$$\hat{Q}_p = T^T Q_p T.$$

Gramijani transformiranog sustava ne ovisi o odabiru matrice transformacije W i zbog toga se ona može proizvoljno odabrati. Pokažimo da je gramijan pozicije upravljanja balansiran

$$\hat{P}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} V_p^T L_p^T R_p R_p^T L_p V_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

$$\hat{P}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} V_p^T \left(R_p^T L_p\right)^T U_p \Sigma V_p^T V_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

$$\hat{P}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} V_p^T V_p \Sigma U_p^T U_p \Sigma V_p^T V_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{P}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma\Sigma\Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{P}_p = \Sigma.$$

Kako bi pokazali da vrijedi $\hat{P}_p = \hat{Q}_p$ pokažimo da je $\hat{Q}_p = \Sigma$

$$\hat{Q}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U_p^T R_p^T L_p L_p^T R_p U_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{Q}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U_p^T R_p^T L_p \left(R_p^T L_p\right)^T U_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{Q}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U_p^T U_p \Sigma V_p^T V_p \Sigma U_p^T U_p \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{Q}_p = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma\Sigma\Sigma^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{Q}_p = \Sigma.$$

U algoritmu se matrica transformacije W odabire tako da se i gramijan brzine opažanja balansira i vrijedi $\hat{P}_p = \hat{Q}_p = \hat{Q}_v = \Sigma$.

4.2 Ideja algoritma

Prvi korak algoritma je transformirati sustav drugog reda u ekvivalenti sustav takav da kada se transformirani sustav reducira razlika između originalnog i reduciranog sustava bude što manja. Za sustave drugog reda algoritam balansiranog odsijecanja ne može balansirati sve gramijane. Matrice W, T koje transformiraju originalni sustav određuju koji će gramijani biti balansirani. U slučaju kada je sustav drugog reda simetričan i matrice M, D i K su pozitivno definitne može se pokazati da pristup koji koristi balansiranje pozicija-brzina zadržava stabilnost. Više o pristupu zasnovanom na balansiranju pozicija-brzina može se pogledati u [5]. Balansirano odsijecanje za sustave drugog reda nema ocjenu pogreške. Sustav drugog reda možemo transformirati u sustav prvog reda i primijeniti balansirano odsijecanje za sustave prvog reda, ali onda reducirani sustav gubi strukturu sustava drugog reda i fizikalnu interpretaciju. Implementirat ćemo balansirano odsijecanje sustava drugog reda sa balansiranim pozicijama. Više detalja o algoritmu se nalazi u Algoritmu 2.

4.3 Algoritam

Algoritam 2: Balansirano odsijecanje sustava drugog reda sa balansiranim pozicijama[5]

1 **Ulaz:** *Matrice stabilnog sustava drugog reda* M, D, K, B_2, C_1, C_2 *i dimenzija reduciranog modela* r

2 Generiraj matrice

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -D \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1, & C_2 \end{bmatrix}$$

3 Riješi generalizirane Ljapunovljeve jednadžbe

$$\mathcal{E}PA^T + AP\mathcal{E}^T = -BB^T, \quad \mathcal{E}^TQA + A^TQ\mathcal{E} = -C^TC$$

4 Podijeli matrice P i Q u blokove $n \times n$

$$P = \begin{bmatrix} P_p & P_{12} \\ P_{12}^T & P_v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Q_p & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_v \end{bmatrix}$$

5 Izračunaj Cholesky faktorizaciju

$$P_p = R_pR_p^T, \quad P_v = R_vR_v^T, \quad Q_p = L_pL_p^T, \quad Q_v = L_vL_v^T$$

6 Odredi SVD dekompoziciju matrice $R_p^TL_p$ i $R_v^TM^TL_v$

$$R_p^TL_p = U_p\Sigma_pV_p^T,$$

$$R_v^TM^TL_v = U_v\Sigma_vV_v^T$$

7 Izračunaj matrice transformacije W i T

$$W = L_vV_{v1}\Sigma_{p1}^{-1/2}, \quad T = R_pU_{p1}\Sigma_{p1}^{-1/2}$$

pri čemu je V_{v1} matrica koja se dobije tako da se uzme prvih r redaka iz matrice V_v, U_{p1} matrica koja se dobije tako da se uzme prvih r stupaca iz matrice U_p, a matrica $\Sigma_{p1}^{-1/2}$ je dijagonalna sa elementima $\frac{1}{\sqrt{\sigma_l}}$ za $l = 1, ..., r$, a σ_l su elementi dijagonalne matrice Σ_p

8 Izačunaj matrice reduciranog sustava

$$\hat{M} = WMT, \quad \hat{D} = WDT, \quad \hat{K} = WKT, \quad \hat{B}_2 = WB_2, \quad \hat{C}_1 = C_1T, \quad \hat{C}_2 = C_2T.$$

Izlaz: *Matrice* $\hat{M}, \hat{D}, \hat{K}, \hat{B}_2, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ *reduciranog sustava, bez ocjene pogreške*

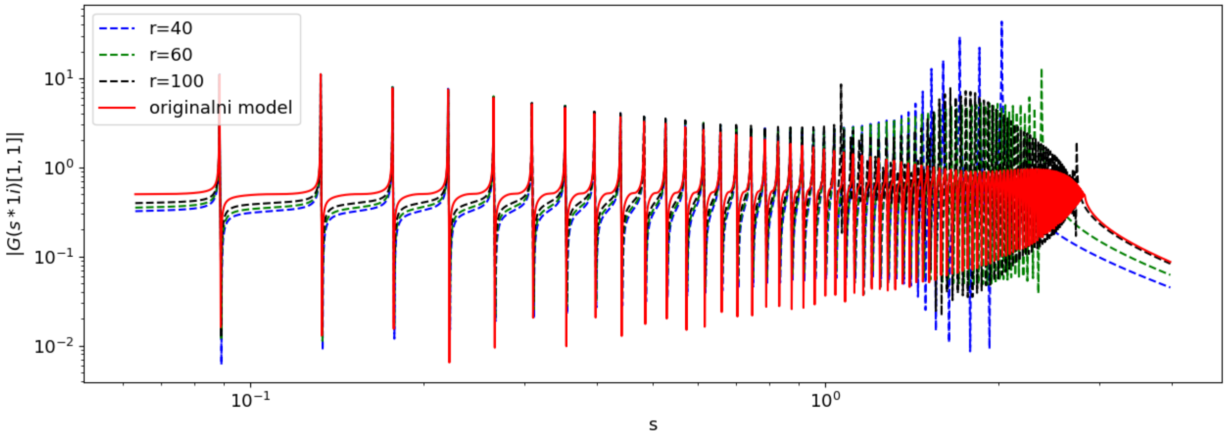
4.4 Usporedba metoda za balansirano rezanje

Usporedimo metode na primjeru redukcije Mass-Spring-Damper modela. Modeliramo ponašanja više masa koje titraju na opruzi. Model je zadan sa matricama

$$M = mI, \quad K = kl \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad D = d \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

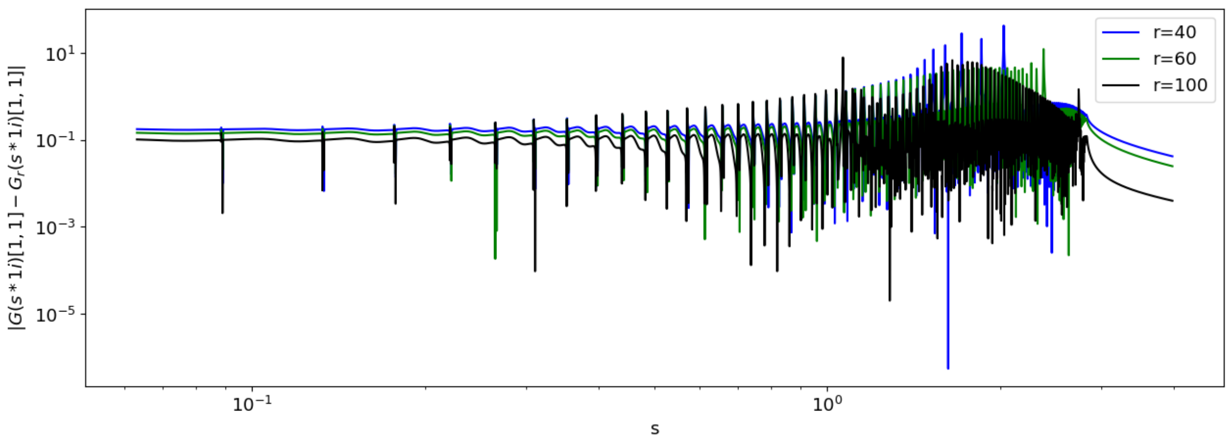
$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

pri čemu su m, kl i d konstante. U primjeru koristimo dimenziju sustava 200 te parametre $m = 1, kl = 2, d = 0.001$ i element matrice D na poziciji $(100, 100)$ je postavljen na 2.02. Sustav reduciramo na više dimenzija i uspoređujemo funkciju prijenosa za svaku reduciranu dimenziju. Više o modelu može se pogledati u [9].



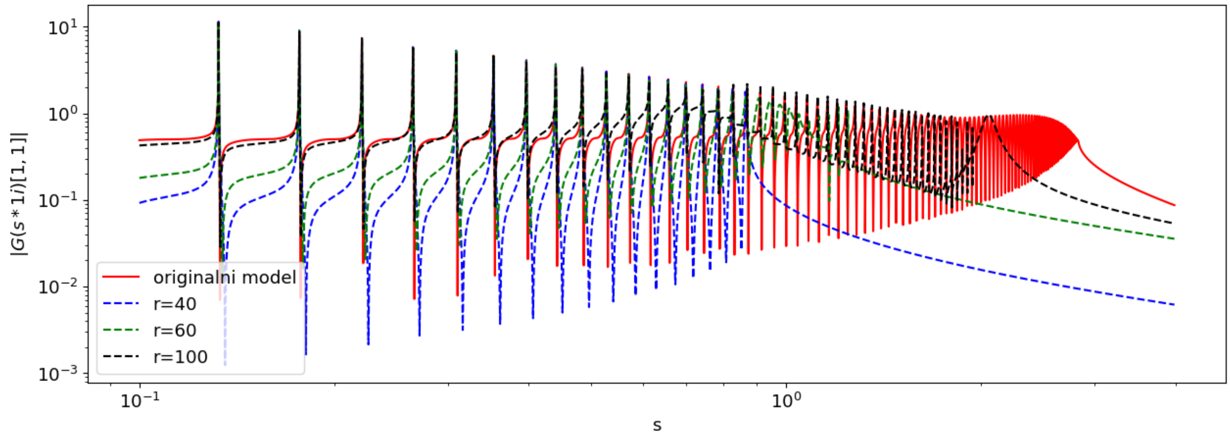
Slika 3: Funkcija prijenosa originalnog modela i reduciranih modela

Slika 3. prikazuje funkciju prijenosa originalnog modela i funkcije prijenosa reduciranih modela korištenjem algoritma balansiranog odsijecanja za sustave drugog reda s balansiranim pozicijama.



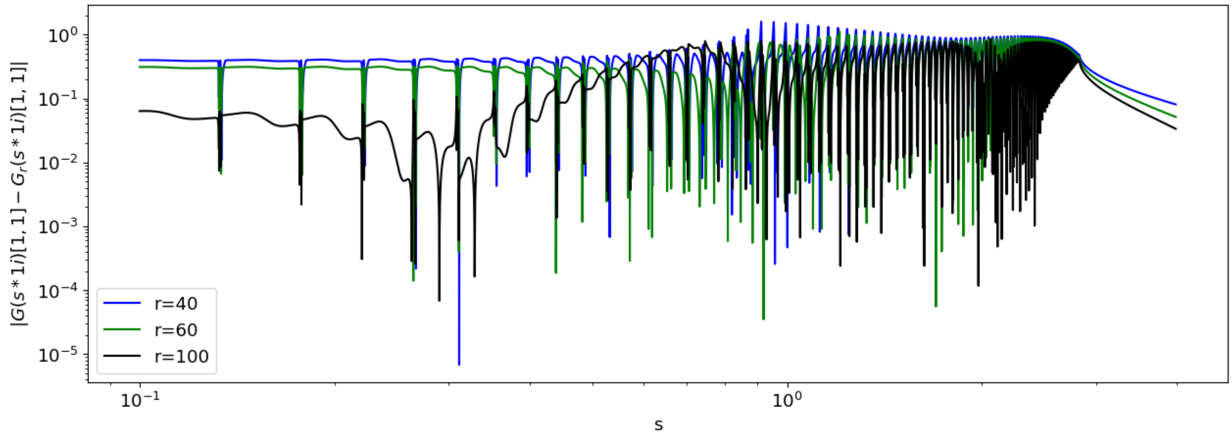
Slika 4: Razlika funkcija prijenosa originalnog modela i reduciranih modela

Slika 4. prikazuje apsolutnu razliku funkcije prijenosa originalnog modela i funkcije prijenosa reduciranih modela.
Iz slika vidimo da reducirani sustavi dobro aproksimiraju originalni sustav. Reducirani sustavi manjih dimenzija imaju lošiju aproksimaciju. U praksi je cilj reducirati sustav tako da pogreška aproksimacije bude prihvatljiva i vrijeme potrebno za računanje sustava reduciranog modela puno manje od originalnog sustava. Metoda balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda ima ocjenu pogreške i tako možemo znati na koju dimenziju možemo reducirati sustav tako da greška bude prihvatljiva. Kod sustava drugog reda ne postoji ocjena pogreške, ali u praksi dobro aproksimira sustave drugog reda. Nakon linearizacije sustava drugog reda kojim modeliramo Mass-Spring-Damper model možemo primijeniti algoritam balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda i usporediti rezultate sa reduciranim modelima koje smo dobili koristeći algoritam balansiranog odsijecanja za sustave drugog reda.



Slika 5: Funkcija prijenosa originalnog modela i reduciranih modela

Slika 5. prikazuje funkciju prijenosa originalnog modela i funkcije prijenosa reduciranih modela dobivenih primjenom algoritma balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda na lineariziranom sustavu drugog reda.



Slika 6: Razlika funkcija prijenosa originalnog modela i reduciranih modela

Slika 6. prikazuje apsolutnu razliku funkcije prijenosa originalnog modela i funkcije prijenosa reduciranih modela.

Redukcija lineariziranog modela bolje aproksimira ekstremne vrijednosti i daje bolju aproksimaciju za reducirane sustave većih dimenzija. Algoritam za redukciju sustava drugog reda ima veće maksimalne apsolutne pogreške, ali funkcija prijenosa reduciranog modela bolje opisuje funkciju prijenosa originalnog modela. Kod linearizacije sustava drugog reda dobiveni sustav prvog reda ima dvostruko veće dimenzije matrica od originalnih matrica sustava drugog reda i zbog toga algoritam balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda treba puno više vremena za redukciju lineariziranog sustava nego algoritmu balansiranog odsijecanja za sustave drugog reda za redukciju originalnog sustava.

Literatura

[1] A. C. Antoulas, C. A. Beattie, S. Gügercin, Interpolatory Methods for Model Reduction, 2020.

[2] B. N. Datta, Numerical Methods for Linear Control Systems, Department of Mathematical Sciences Northern Illinois University, 2003.

[3] T. Drašinac, Cholesky dekompozicija i primjena u financijama. Diplomski rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[4] J. P. Hespanha, Linear System Theory, Princeton University Press, 2009.

[5] T. Reis, T. Stykel, Balanced truncation model reduction of second-order systems, Technical Report 376-2007

[6] Ž. Salinger, Laplaceova transformacija. Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2011.

[7] N. Truhar, Numerička linearna algebra, Odjel za matematiku, 2010.

[8] https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/CD_Player, siječanj 2023.

[9] https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Mass-Spring-Damper, siječanj 2023.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavimo se temom redukcije sustava drugog reda algoritmom balansiranog odsijecanja. Na početku rada definiramo linearno vremenski invarijantan sustav prvog reda i funkciju prijenosa za sustav. Definirat ćemo svojstva stabilnosti, upravljivosti i osmotrivosti koja sustav mora imati kako bi se mogao reducirati algoritmom balansiranog odsijecanja. Algoritam balansiranog odsijecanja za sustave prvog reda primijenit ćemo na CD player modelu. Definirat ćemo sustave drugog reda i njihova svojstva te primijeniti na primjeru Mass-Spring-Damper jednu verziju algoritma balansiranog odsijecanja za sustave drugog reda. Metode balansiranog odsijecanja za sustave drugog reda su važne jer zadržavaju strukturu sustava i fizikalnu interpretaciju.

Ključne riječi: linearni vremenski invarijantan sustav, funkcija prijenosa, stabilnost, upravljivost, osmotrivost, algoritam balansiranog odsijecanja, linearni vremenski invarijantan sustav drugog reda, algoritam balansiranog odsijecanja za sustave drugog reda

Model reduction of second-order systems

Abstract

In this thesis, we deal with the topic of second-order system reduction using the balanced truncation algorithm. At the beginning of the work, we define a linear time-invariant system of the first order and a transfer function for the system. We will define the properties of stability, controllability and observability that the system must have in order to be able to be reduced by the balanced truncation algorithm. We will demonstrate the balanced truncation algorithm for first-order systems on the CD player model. We will define second-order systems and their properties and apply, using the Mass-Spring-Damper example, one version of the balanced truncation algorithm for second-order systems. Balanced truncation methods for second-order systems are important because they preserve the system structure and physical interpretation.

Keywords: linear time-invariant system, transfer function, stability, controllability, observability, balanced truncation algorithm, second-order linear time-invariant system, balanced truncation algorithm for second-order systems

Životopis

Rođen sam 23. 3. 1998. godine u Osijeku. Osnovnu školu Franje Krežme završio sam 2013. godine, nakon čega sam upisao Srednju školu III. gimnazija Osijek, smjer prirodoslovno matematička gimnazija. Gimnaziju završavam 2017. godine, te tada upisujem Sveučilišni preddiplomski studij Matematike i računarstva na Odjelu za Matematiku u Osijeku. Studij završavam 2020. godine sa završnim radom na temu "Stabilizabilnost LTI sustava", pod mentorstvom izv. prof. dr. sc Zorana Tomljanovića. Iste godine upisujem Sveučilišni diplomski studij Matematike i računarstva, na Odjelu za matematiku.