Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Arbutina

Simetričan svojstveni problem

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Arbutina

Simetričan svojstveni problem

Završni rad

Mentor : doc. dr. sc. Suzana Miodragović
Komentor : dr. sc. Matea Ugrica

Osijek, 2022.

Sažetak

U ovom radu ćemo se baviti simetričnim svojstvenim problemom. U uvodu ćemo navesti osnovne definicije vezane za svojstveni problem kao što su definicija svojstvene vrijednosti i vektora, karakteristični polinom i neke od njihovih karakteristika. Zatim ćemo definirati što znači da je matrica simetrična (hermitska) i ortogonalna (unitarna) te kada su sdvije matrice slične. U nastavku ćemo iskazati i dokazati Schurov teorem te navesti iterativne metode za rješavanje simetričnog problema, njihove algoritme te primjere.

Ključne riječi

svojstvene vrijednosti, svojstveni vektor, karakteristični polinom, simetrična matrica, ortogonalna matrica, ortogonalno dijagonalizabilna, Schurov teorem, iterativne metode

The symmetric eigenvalue problem

Summary

In this paper, we will deal with the symmetric eigenvalue problem. In the introduction, we will state the basic definitions related to the eigenvalue problem, such as the definition of eigenvalue and vector, characteristic polynomial and some of their characteristics. Next, we will define what it means that a matrix is symmetric (Hermitian) and orthogonal (unitary) and when the two matrices are similar. In the following we will state and prove Schur's theorem and list iterative methods for solving a symmetric problem, their algorithms and examples.

Keywords

eigenvalues, eigenvector, characteristic polynomial, symmetric matrix, orthogonal matrix, orthogonally diagonalizable, Schur's theorem, iterative methods

Sadržaj

1 Uvod

U uvodnom dijelu ovog rada ćemo nešto ukratko reći o osnovnim pojmovima vezanim za svojstveni problem zatim ukratko o simetričnim matricama.

1.1 Svojstvene vrijednosti

Definicija 1. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ i vektor $x \in \mathbb{C}^n$ koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0 \tag{1}$$

nazivamo svojstvena vrijednost matrice A i svojstveni vektor matrice A. Kažemo da je svojstveni vektor x pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Bilo koji takav par (λ, x) nazivamo svojstveni par.

Ponekad se umjesto svojstvene vrijednosti kaže i karakteristična ili vlastita vrijednost.

Definicija 2. *Skup svih svojstvenih vrijednosti λ matrice A nazivamo spektar matrice A i označavamo ga s $\sigma(A)$.*

Napomena 1.

a) Treba napomenuti da svojstveni vektor nije jednistven. Primjerice, ako je x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ onda je i αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$. Zaista,

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x).$$

b) Također neka svojstvena vrijednost λ može posjedovati i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora.

Definicija 3. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratna matrica. Polinom*

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{2}$$

naziva se karakteristični polinom matrice A.

Napomena 2. *Uočimo također da za proizvoljnu matricu A drugog reda vrijedi*

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + detA.$$

Napomena 3. *Jednakost (1) možemo zapisati i u sljedećem obliku:*

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad x \neq 0. \tag{3}$$

Postojanje vektora $x \neq 0$ takvog da vrijedi (3) povlači da je matrica $A - \lambda I$ singularna. U tom slučaju je

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{4}$$

Iz (2) i (4) slijedi da su nultočke karakterističnog polinoma svojstvene vrijednosti matrice A. Stoga iz Osnovnog teorema algebre[1] *slijedi i sljedeći teorem:*

Teorem 1. *(vidi* $[7, Teorem 1.1]$*) Svaka matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ima n, ne nužno različitih, svojstvenih vrijednosti.*

Primjer 1. *Pronađite svojstvene vrijednosti matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:
Ranije smo pokazali da su nultočke karakterističnog polinoma upravo svojstvene vrijednosti. Dakle, rješenje ćemo odrediti preko karakterističnog polinoma, tj:

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 10 + 7\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

Nadalje, rješavanjem jednadžbe $\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$ dobivamo $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -6$.
Skup { -1, -6 } je spektar matrice A.
Kada tražimo pripadne svojstvene vektore koji pripadaju određenoj svojstvenoj vrijednosti rješavamo sustav (1). Na primjer, za $\lambda_1 = -1$:

$$-5x_1 + 2x_2 = -x_1$$
$$2x_1 - 2x_2 = -x_2$$

[1]**Teorem (Osnovni teorem algebre)** Svaki kompleksni polinom stupnja n ima n kompleksnih korijena.

Rješavanjem sustava dobivamo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Slično za λ_2 dobivamo pripadni svojsteni vektor $x = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dakle, potprostor koji razapinju svojstveni vektori je dan s $\left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right]$.

1.2 Simetrične matrice

Definicija 4. *Za kvadratnu matricu $A = [\alpha_{ij}], A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kažemo da je hermitska ako vrijedi $A^* = A$, tj.*

$$\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji}, \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

U slučaju kada je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kažemo da je matrica simetrična i pišemo $A^T = A$, dakle $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Definicija 5. *Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kažemo da je unitarna ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$.*
Za kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kažemo da je ortogonalna ako vrijedi $AA^T = A^TA = I$.

Definicija 6. *Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratna. Ukoliko postoji matrica $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da vrijedi: $AB = BA = I$, gdje je I jedinična matrica onda kažemo da je matrica A regularna ili invertibilna. U suprotnom matricu A nazivamo singularnom.*

Definicija 7. *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kvadratne matrice. Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da vrijedi:*

$$B = S^{-1}AS.$$

Teorem 2. *(vidi* [2, *Propozicija* 5.5.6.]*) Slične matrice imaju jednake karakteristične polinome.*

Dokaz:
Uzmimo $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i regularnu matricu $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takvu da vrijedi

$B = S^{-1}AS$. Tada vrijedi, uz pomoć *Binet-Cauchyjeva teorema*[2]:

$$\begin{aligned} k_B(\lambda) &= det(B - \lambda I) = det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = det(S^{-1})det(A - \lambda I)detS \\ &= det(A - \lambda I) = k_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

Budući da su svojstvene vrijednosti nultočke karakterističnog polinoma, a upravo smo pokazali da slične matrice imaju jednake karakteristične polinome, to znači da slične matrice imaju i jednake svojstvene vrijednosti.

Definicija 8. *Neka su dane matrice $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Kažemo da je matrica A unitarno slična matrici B ako postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da vrijedi:*

$$A = UBU^*.$$

Ako je $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna onda kažemo da je matrica A ortogonalno slična matrici B.

Definicija 9. *Kažemo da je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitarno dijagonalizabilna ako je unitarno slična dijagonalnoj matrici.*
Kažemo da je matrica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ortogonalno dijagonalizabilna ako je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici.

[2]**Teorem (Binet-Cauchyjev)** Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, onda je $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

2 Schurov teorem

U teoremu 2 nam je vidljivo da je kod pronalaženja svojstvenih vrijednosti matrice ponekad lakše pronaći njoj sličnu, ali jednostvaniju matricu.
Također znamo da je za simetričnu matricu A moguće pronaći dijagonalnu matricu D i ortogonalnu matricu V, tako da je $A = VDV^T$.

Općenitija tvrdnja je opisana u poznatom *Schurovom teoremu.* Riječ je također o sličnim matricama tako da možemo, u konačnici, lakše odrediti svojstvene vrijednosti.

Teorem 3 (Schurov teorem)**.** *(vidi,* [6, *Teorem* 1.1.1.]*) Ako je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska matrica, tada postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i dijagonalna matrica $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je*

$$A = UDU^*.$$

Dokaz:
Uzmimo svojstvenu vrijednosti λ_1 i pripadni svojstveni vektor u_1 tako da je $Au_1 = \lambda_1 u_1, \quad \|u_1\|_2 = 1$. Lako odredimo matricu $\widehat{U_1} \in \mathbb{C}^{n\times(n-1)}$ tako da je $U_1 = (u_1, \widehat{U_1})$ unitarna. Ovo se postiže standardnom dopunom do baze u unitarnom prostoru, koju najlakše dobijemo algoritamski iz QR faktorizacije matrice u_1. Vrijedi

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} u_1^* \\ \widehat{U_1^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Au_1 & A\widehat{U_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & u_1^* A \widehat{U_1} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \widehat{U_1^*} A \widehat{U_1}.$$

Iz $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)\det(A_2 - \lambda I_{n-1})$ slijedi da su $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A_2. Ako je $n > 2$, uzmimo λ_2 i pripadni svojstveni vektor u_2 tako da je $A_2 u_2 = \lambda_2 u_2, \; \|u_2\|_2 = 1$. Kao i s λ_1, u_2 dopunimo do unitarne matrice $U_2 = (u_2, \widehat{U_2}) \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, te izračunamo da je

$$U_2^* A_2 U_2 = \begin{bmatrix} u_2^* \\ \widehat{U_2^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 u_2 & A_2\widehat{U_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & u_2^* A_2 \widehat{U_2} \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \widehat{U_2^*} A_2 \widehat{U_2}.$$

Ako ova dva koraka napravimo zajedno, imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{U_2^*} \end{bmatrix} U_1^* A \underbrace{U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{U_2} \end{bmatrix}}_{unitarna} = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & \multicolumn{2}{c}{u_1^* A \widehat{U_1}} \\ \hline 0 & \lambda_2 & u_2^* A_2 \widehat{U_2} \\ \hline 0 & 0 & A_3 \end{array} \right].$$

Kao i ranije, zaključujemo da su svojstvene vrijednosti matrice A_3 upravo $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Sada je jasno da formalni dokaz završavamo matematičkom indukcijom po n.

Nadalje, ako je matrica A realna i ako su joj sve svojstvene vrijednosti realne, onda je jasno da u prethodnom induktivnom dokazu u svakom koraku možemo odabrati realan svojstveni vektor i sve matrice transformacija realne ortogonalne. $\square$

Iz prethodnog teorema lako se uočava sljedeće:

Napomena 4. *a) Ortognalni stupci matrice U svojstveni su vektori matrice A, a dijagonalni elementi od matrice Dsu odgovarajuće svojstvene vrijednosti.*

b) Hermitske matrice imaju realne svojstvene vrijednosti.
To se lako može pokazati:

Neka je matrica $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitska, tj. vrijedi $A = A^*$. Neka je $x \in \mathbb{C}^n$ svojstveni vektor od A sa svojstvenom vrijednošću λ, tj.vrijedi da $\exists x \neq 0$ takav da $Ax = \lambda x$.
Tada imamo:

$$\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \tag{5}$$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^* x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \tag{6}$$

Izjednačimo li lijeve i desne strane (5) i (6) dobivamo:

$$\lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

$$\lambda \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = 0$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\neq 0} = 0$$

Jer je x svojstveni vektor znamo da vrijedi $x \neq 0$, dakle slijedi

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0$$

tj.

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

a to može biti samo u slučaju ako je $\lambda \in \mathbb{R}$ i time je dokazana tvrdnja.
$\square$

c) Svaka simetrična matrica je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici.

Primjer 2. *Pronađite Schurovu dekompoziciju matrice* $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$.

Rješenje:
Najprije trebamo odrediti svojstvene vrijednosti matrice A koje smo ranije pokazali da su nultočke karakterističnog polinoma:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 12 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Prema tome, svojstvene vrijednosti matrice A su: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Sada tražimo pripadni svojstveni vektor za λ_1.

$$A - \lambda I = A - 3I = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadalje računamo:

$$(A - \lambda I)u_1 = 0$$
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$2a_1 - a_2 = 0$$
$$2a_1 = a_2$$

Dobivamo da je jedan svojstveni vektor $u_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, tj. dobivamo $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Normaliziramo li taj vektor dobivamo $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Nadalje pronalazimo ortonormiranu bazu $\{v_2\}$ koja je okomita na

$$[\{u_1\}]^{\perp} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}\right]^{\perp} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right].$$

Odaberimo $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Na taj način smo dobili ortonormiranu matricu U:

$$U = [u_1 \quad u_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada pogledamo zapis matrice A u bazi u_1, v_2:

$$U^{-1}AU = U^TAU = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da je matrica A dimenzije 2×2, možemo uzeti da je $u_2 = v_2$, stoga je Schurova dekompozicija matrice A dana izrazom: $A = UTU^*$, gdje je:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gornjetrokutasta matrica sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali, a

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

je unitarna matrica.

3 Iterativne metode za računanje simetričnog svojstvenog problema

Iterativnim metodama za rješavanje svojstvenog problema ćemo dobiti određene aproksimacije svojstvenog para. Najpoznatije iterativne metode za računanje simetričnog svojstvenog probema su metoda potencija, inverzna metoda potencija te inverzna metoda potencija s pomakom.

3.1 Metoda potencija

Metoda potencija je najjednostavnija iterativna metoda i pogodna je za računanje aproksimacije po modulu najveće svojstvene vrijednosti, te njoj odgovarajućeg svojstvenog vektora. Naravno, uz određene modifikacije je moguće odrediti i ostale svojstvene vrijednosti.

Tekst u nastavku je nastao po uzoru na [1].
Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ simetrična matrica, neka su $x_1, \dots, x_n$ ortogonalni sustav svojstvenih vektora i $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ odgovarajuće svojstvene vrijednosti takve da zadovoljavaju nejednakosti $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

Algoritam metode potencija
Ulaz: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ simetrična sa $|\lambda_1| > |\lambda_2|$
Izlaz: $z^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^{(k)} \in \mathbb{R}$ gdje je $z^{(k)} \approx x_1$ i $\lambda^{(k)} \approx \lambda_1$
1: odaberite $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\|z^{(0)}\|_2 = 1$
2: **for** $k = 1, 2, 3, \dots$ **do**
3: $w^{(k)} = Az^{(k-1)}$
4: $z^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$
5: $\lambda^{(k)} = \langle z^{(k)}, Az^{(k)} \rangle$
6: **if** $\frac{\|Az^{(k)} - \lambda^{(k)} z^{(k)}\|}{\|\lambda^{(k)}\|} <$ tol **stop**
7: **end for**

U nastavku ćemo koristiti pojam Reyleighjevog kvocijenta te navodimo definiciju i teorem koji će nam kasnije biti potreban.

Definicija 10. *Reyleigh-jev kvocijent matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definira se sa $r_A(x) = \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}$ za sve $x \in \mathbb{C}^n$.*

Teorem 4. *(vidi,[1, Teorem 8.4]) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična i $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Tada je x svojstveni vektor od A s pripadnom svojstvenom vrijednosti λ ako i samo ako je $\nabla r_A(x) = 0$ i $r_A(x) = \lambda$.*

Napomena 5

1. Algoritam računa k-tu aproksimaciju svojstvenog vektora $z^{(k)} = A^k z^{(0)}/\|A^k z^{(0)}\|_2$ i k-tu aproksimaciju svojstvene vrijednosti $\lambda^{(k)} = r_A(z^{(k)})$.
   Kako bismo izbjegli overflow/underflow pogreške, vektor $z^{(k)}$ se u svakom koraku iteracija normalizira.

2. Metoda se temelji na sljedećoj ideji:
   Skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormiranih vektora čini bazu za $\mathbb{C}^n$ pa se svaki vektor $z^{(0)}$ može napisati kao njihova linearna kombinacija, tj.

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad za \quad \alpha_i \in \mathbb{C},$$

   pa vrijedi i da je

$$\begin{aligned} A^k z^{(0)} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^k x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i \\ &= \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n \right). \end{aligned}$$

   Kako $\forall i > 1$ vrijedi da je $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$ kada $k \to \infty$ i vidimo da $A^k z^{(0)}$ sve više naginje u smjeru vektora x_1 pod uvjetom da je $\alpha_1 \neq 0$. Za dovoljno veliki k dobivamo odgovarajuću svojstvenu vrijednost s najvećim modulom.

Teorem 5. *(vidi [1, Teorem 8.5]) Neka je $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ i $\langle z^{(0)}, x_1\rangle \neq 0$. Tada postoji niz $(\sigma^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gdje je $\sigma^{(k)} \in \{-1, +1\}$ za sve $k \in \mathbb{N}$ tako da nizovi $(z^{(k)})$ i $(\lambda^{(k)})$ dobiveni algoritmom metode potencija zadovoljavaju*

$$\|z^{(k)} - \sigma^{(k)} x_1\|_2 = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \right) \tag{7}$$

i

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right). \tag{8}$$

Dokaz:

Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormalan sustav svojstvenih vektora sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i

$$z^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Budući da smo pretpostavili da je $\alpha_1 = \langle z^{(0)}, x_1 \rangle \neq 0$, tj. $\alpha_1 \neq 0$ imamo

$$A^k z^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k x_i = \alpha_1 \lambda_1^k \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k x_i \right),$$

pa prema Pitagorinom teoremu slijedi

$$\begin{aligned} \|A^k z^{(0)}\|_2^2 &= |\alpha_1 \lambda_1^k|^2 \left(\|x_1\|_2^2 + \left\| \sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k x_i \right\|_2^2 \right) \\ &= |\alpha_1 \lambda_1^k|^2 \left(1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2 \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^{2k} \right) \\ &\leq |\alpha_1 \lambda_1^k|^2 \left(1 + \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

Ako iskoristimo Taylorovu aproksimaciju $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + x^2/2$, možemo zaključiti

$$\|A^k z^{(0)}\|_2 = |\alpha_1 \lambda_1^k| \left(1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right) \right).$$

Definirajmo $\sigma^{(k)} = \mathrm{sign}(\alpha_1 \lambda_1^k)$. Tada je

$$\left\| \frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} - \sigma^{(k)} x_1 \right\|_2^2 = \left\| \frac{A^k z^{(0)}}{\alpha_1 \lambda_1^k} - x_1 \right\|_2^2 = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2 \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^{2k} = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)$$

i stoga je

$$
\begin{aligned}
\|z^{(k)} - \sigma^{(k)} x_1\|_2 &\leq \left\| \frac{A^k z^{(0)}}{\|A^k z^{(0)}\|_2} - \frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \right\|_2 + \left\| \frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} - \sigma^{(k)} x_1 \right\|_2 \\
&\leq \left\| \frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)} - 1 \right\|_2 + \left\| \frac{A^k z^{(0)}}{|\alpha_1 \lambda_1^k|} - \sigma^{(k)} x_1 \right\|_2 \\
&= \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right) + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)
\end{aligned}
$$

što dokazuje tvrdnju (7).
Nadalje, iz teorema 4 znamo da je $r_A(\sigma^{(k)} x_1) = \lambda_1$ i $\nabla r_A(\sigma^{(k)} x_1) = 0$.
Taylorov razvoj r_A oko $\sigma^{(k)} x_1$ daje nam

$$
\begin{aligned}
r_A(z) &= r_A(\sigma^{(k)} x_1) + \langle \nabla r_A(\sigma^{(k)} x_1), z - \sigma^{(k)} x_1 \rangle + \mathcal{O}(\|z - \sigma^{(k)} x_1\|_2^2) \\
&= \lambda_1 + 0 + \mathcal{O}(\|z - \sigma^{(k)} x_1\|_2^2).
\end{aligned}
$$

Koristeći (7) slijedi

$$
|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = |r_A(z^{(k)}) - \lambda_1| = \mathcal{O}(\|z^{(k)} - \sigma^{(k)} x_1\|_2^2) = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)
$$

čime smo dokazali i relaciju (8). □

Napomena 6

Brzina konvergencije metode potencija određena je kvocijentom $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.

3.2 Inverzna metoda potencija

Kao što smo rekli prije, metoda potencija se može modificirati tako da dobijemo i ostale svojstvene vrijednosti te pripadne svojstvene vektore.

Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti takve da vrijedi

$$
|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.
$$

Primjena metode potencija na A^{-1} matricu s ciljem dobivanja najmanje svojstvene vrijednsti i pripadnog svojstvenog vektora, tj. (λ_n, x_n), zove se metoda inverznih iteracija.
Svojstvene vrijednosti matrice A^{-1} su $\frac{1}{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$ te vrijedi

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| > \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \geq \dots \geq \left|\frac{1}{\lambda_1}\right|.$$

Kako bismo izračunali traženi svojstveni par iskoristiti ćemo

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad A \quad \text{dijagonalizabilna}$$

i

$$A^{-1}x_i = \frac{1}{\lambda_i}x_i.$$

Budući da je $\frac{1}{\lambda_n}$ po modulu najveća svojstvena vrijednost matrice A^{-1} primjenom metode potencija na nju možemo aproksimirati traženi svojstveni par (λ_n, x_n). Brzina konvergencije biti će određena kvocijentom $\frac{|\lambda_n|}{|\lambda_{n-1}|}$.

3.3 Inverzna metoda potencija s pomakom

Za pronalak različitih svojstvenih vrijednosti može se prilagoditi inverzna metoda potencija. Pogledajmo sljedeće transformacije matrica:

$$(A - \sigma I)x_i = (\lambda_i - \sigma)x_i$$

i

$$(A - \sigma I)^{-1}x_i = \frac{1}{\lambda_i - \sigma}x_i, \quad \sigma \notin \Lambda(A).$$

Primjenom inverzne metode potencija na $A - \sigma I$ možemo izračunati svojstvenu vrijednost koja je po vrijednosti najbliža σ. Za tu metodu dana je brzina konvergencije:

$$\gamma(\sigma) = \left|\frac{\lambda_n - \sigma}{\lambda_{n-1} - \sigma}\right|.$$

Ako je σ puno bliže λ_n nego bilo kojoj drugoj svojstvenoj vrijednosti, onda je $\gamma(\sigma) \ll 1$ i postiže se brža konvergencija. Ako se σ puno bliže λ_j nego bilo kojoj drugoj svojstvenoj vrijednosti, onda je $\lambda_j - \sigma$ najmanja po modulu svojstvena vrijednost, pa će inverzne iteracije konvergirati ka x_j, a pripadni Rayleighev kvocijent ka λ_j.

Algoritam inverzne metode potencija s pomakom

Ulaz: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična sa $\lambda \in \mathbb{R}$

Izlaz: $z^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^{(k)} \in \mathbb{R}$ gdje je $z^{(k)} \approx x_j$ i $\lambda^{(k)} \approx \lambda_j$, λ_j je svojstvena vrijednost najbliža λ

1: odaberite $z^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\|z^{(0)}\|_2 = 1$

2: **for** $k = 1, 2, 3, \ldots$ **do**

3: $v = \frac{z^{(k-1)}}{\|z^{(k-1)}\|_2}$

4: riješi $(A - \lambda I)z^{(k)} = v$

5: $\mu^{(k)} = \langle v^*, z^{(k)}\rangle$

6: **if** $\|z^{(k)} - \mu^{(k)}v\|_2 \leq tol,$ **stop**

7: **end for**

8. vrati $\lambda^{(k)} = \lambda + \frac{1}{\mu^{(k)}}$.

Primjer 3. *Neka je zadana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{bmatrix}.$$

Koristeći inverznu metodu potencija s pomakom odredite prve dvije aproksimacije najveće svojstvene vrijednosti i pripadnog svojstvenog vektora matrice A. Za početnu aproksimaciju svojstvenog vektora uzmite $z^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *a za pomak uzmite da je za* 0.2 *veći od svojstvene vrijednosti.*

Rješenje:

Preko karakterističnog polinoma matrice A dobiju se svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$. U ovom primjeru želimo dobiti aproksimaciju najveće svojstvene vrijednosti i pripadnog svojstvenog vektora ako za početnu aproksimaciju svojstvene vrijednosti uzmemo $\lambda = 4.2$, a za aproksimciju svojstvenog vektora uzmemo $z^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Najprije izračunamo

$$v^{(0)} = \frac{z^{(0)}}{\|z^{(0)}\|_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Zatim rješavamo sustav $(A-\lambda I)z^{(0)} = v^{(0)}$, tj.

$$\begin{bmatrix} -4.2 & 11 & -5 \\ -2 & 12.8 & -7 \\ -4 & 26 & -14.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Dobivamo $z^{(1)} = \begin{bmatrix} -5.5111 \\ -8.1354 \\ -13.3840 \end{bmatrix}$. Prateći nastavak algoritma rješavamo

$\mu^{(1)} = \langle v^{(0)*}, z^{(1)} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3} z_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} z_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} z_3 = -15.606.$

Zatim je $\lambda^{(1)} = 4.2 + \frac{1}{-15.606} = 4.1359$. Ponavljamo postupak kako bismo dobili drugu aproksimaciju:

$$v^{(1)} = \frac{z^{(1)}}{\|z^{(1)}\|_2} = \begin{bmatrix} -5.5111 \\ -8.1354 \\ -13.3840 \end{bmatrix} \frac{1}{16.6039} = \begin{bmatrix} -0.3319 \\ -0.4899 \\ -0.8061 \end{bmatrix}.$$

Rješavamo sustav $(A - \lambda^{(1)} I)z^{(2)} = v^{(1)}$, te dobivamo

$$z^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.549 \\ 3.81957 \\ 6.3611 \end{bmatrix}.$$

U nastavku rješavamo $\mu^{(2)} = \langle v^{(1)*}, z^{(2)} \rangle = -0.3319 * 2.549 - 0.4899 * 3.81957 - 0.8061 * 6.3611 = -7.8449$.

Na kraju dobivamo i drugu aproksimaciju $\lambda^{(2)} = 4.1359 + \frac{1}{-7.8449} = 4.0084$.

$\square$

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] Z.Drmač, *Numerička Analiza 1,* 2008.
Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/ drmac/NA1-2.pdf`

[3] M.Frankland, *Abstract Linear Algebra-Schur decomposition,* 2011.
Dostupno na: `https://www.home.uni-osnabrueck.de/mfrankland/Math416/Math41SchurDecomposition.pdf`

[4] Gene H. Golub, C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Jonhs Hopkings University, 2013., 4th edition

[5] M.M.Pandur, M. Pilj, *Osječki matematički list*, Vol.18, No.1, 2018.

[6] Beresford N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue problem*, University of California, Berkeley, California, 1987.

[7] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2010.