Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Marija Katić

Konformna preslikavanja u kompleksnoj ravnini

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Marija Katić

Konformna preslikavanja u kompleksnoj ravnini

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod

Osnovna tema ovog rada konformna su preslikavanja, kao kompleksne funkcije kompleksne varijable.
U prvom se poglavlju promatra karakterizacija konformnog preslikavanja te preslikavanja osnovnim funkcijama kao što su translacija, rotacija, inverzija te afina (linearna) funkcija. Uz to u prvom poglavlju promatra se i preslikavanje drugim elementarnim funkcijama kao što su $w = z^2$, $w = \sqrt{z}$ i $w = e^z$.
U drugom poglavlju razmatra se Möbiusova transformacija, nazvana po njemačkom matematičaru Augustu Ferdinandu Möbiusu (1790. - 1860.). Promatra se Möbiusova transformacija i njezina inverzna funkcija kao preslikavanja u kompleksnoj ravnini. Dokazuje se da je Möbiusova transformacija konformno preslikavanje te pokazuje da se Möbiusova transformacija može prikazati kao kompozicija rotacije, translacije, inverzije te homotetije. Navodimo više primjera za Möbiusove transformacije i na kraju rada navode se primjene Möbiusovih transformacija u nekim područjima znanosti.

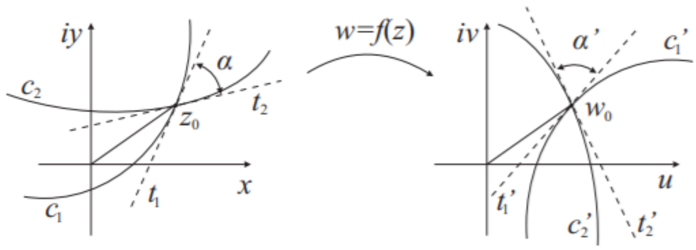
1 Konformna preslikavanja

Konformno preslikavanje je bitno za rješavanje raznih problema koji su prikazani kompleksnom funkcijom. Konformnim se preslikavanjem često problem može svesti na jednostavniji koji znamo riješiti.

1.1 Karakterizacija konformnog preslikavanja

Neka je preslikavanje kompleksna funkcija $w = f(z) = u + iv$ dana s funkcijama $u, v : D \to \mathbb{R}$ gdje je $z = x + iy \in \mathbb{C}, D \subset \mathbb{R}^2$ te $u = u(x, y), v = v(x, y)$. Pri tome se kompleksni broj $z = x + iy \in \mathbb{C}$ u kompleksnoj z-ravnini identificira s točkom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u xy-ravnini.

Definicija 1.1 *Neka je zadano preslikavanje $u = u(x, y), v = v(x, y)$ koje točku (x_0, y_0) iz (x, y)-ravnine preslika u (u_0, v_0) u (u, v)-ravnini, a krivulje C_1 i C_2 koje se sijeku u (x_0, y_0) preslika u C_1', C_2' koje se sijeku u (u_0, v_0). Ako je kut između krivulja C_1 i C_2 jednak kutu između krivulja C_1' i C_2' po iznosu i smjeru onda je* ***preslikavanje f konformno u točki*** *(x_0, y_0).*



Slika 1. Očuvanje kutova pri konformnom preslikavanju (vidjeti [2])

Definicija 1.2 *Za funkciju $f : D \to \mathbb{C}$ kažemo da je diferencijabilna u točki z_0 otvorenog skupa $D \subseteq \mathbb{C}$, ako funkcija*

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ima limes u točki z_0. Tada se taj limes označava se sa $f'(z_0)$ i naziva se derivacija funkcije f u točki z_0. Slijedi,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Definicija 1.3 *Ako je funkcija $f' : D \to \mathbb{C}$ neprekidna na $D \subseteq \mathbb{C}$ onda je f analitička funkcija na D.*

Teorem 1.1 *(vidjeti [2]) Neka se krivulja C kroz točku z_0 preslika u krivulju C' kroz točku $w_0 = f(z_0)$. Tada tangenta na krivulju C' u točki $w_0 = f(z_0)$ zarotirana je za kut $alpha = Arg(f'(z_0))$ u odnosu na tangentu na krivulju C u točki z_0.*

Dokaz: Neka krivulja C koja prolazi kroz točku z_0 ima parametrizaciju

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \qquad t \in [a, b]$$

$$z_0 = z(t_0), \qquad t_0 \in [a, b],$$

a njena slika C' parametrizaciju

$$w = w(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)).$$

Na krivulji C u točki z_0 dan je vektor tangente s $z'(t_0)$. Zatim računamo $w'(t)$ vektor tangente na C' kao

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t).$$

Uz pretpostavku da je f analitička funkcija i $f'(z_0) \neq 0$ vrijedi

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0),$$

pri čemu je $z_0 = z(t_0)$ i $w_0 = w(t_0)$.
U polarnom zapisu imamo

$$Argw'(t_0) = Argf'(z_0) + Argz'(t_0).$$

Iz ovoga slijedi da preslikavanje $w = f(z)$ rotira promatranu tangentu za kut $Argf'(z_0)$. $\square$

Teorem 1.2 *(vidjeti [2]) Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ analitička na $D \subset \mathbb{C}$ te neka $f'(z_0) \neq 0$ u točki $z_0 \in D$. Tada je preslikavanje $w = f(z)$ konformno u točki z_0.*

Dokaz: Prema prethodnoj definiciji, trebamo dokazati da pri preslikavanju kut između krivulja C_1 i C_2 koje se sijeku u točki z_0 ostaje jednak po iznosu i po smjeru. Prema prethodnom teoremu, zaključujemo da se tangente rotiraju za isti kut $\alpha = Argf'(z_0) \neq 0$ u istom smjeru. Odatle slijedi da je preslikavanje konformno u točki z_0. $\square$

Primjer 1.1 *(vidjeti [2]) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = cos\ z$ konformno u točkama $z = \frac{1}{2}, 2\pi, \pi + i$ te odredite kuteve u tim točkama.*

Rješenje:
Deriviranjem analitičke funkcije $f(z) = cos\ z$ dobivamo $f'(z) = -sin\ z$. Preslikavanje je konformno u točkama u kojima je $f'(z) = -sin(z) \neq 0$. Stoga, preslikavanje je konformno osim u točkama $z =$kπ , $k \in \mathbb{Z}$. Slijedi da je preslikavanje konformno u točkama $z = i, 1, \pi + i$. Kut preslikavanja u točki z_0 jednak je $Argf'(z_0)$.

Za z = i: $f'(i) = -sin\ i = -i\ sinh\ 1$, $Argf'(i) = \dfrac{3\pi}{2}$.

Za z = 1: $f'(1) = -sin\ 1$, $Argf'(1) = \pi$.

Za $z = \pi + i$: $f'(\pi + i) = i\ sinh\ 1$, $Argf'(\pi + i) = \dfrac{\pi}{2}$.

Iz teorema 1.2 dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 1.3 *(vidjeti [2]) Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ analitička na području $D \subset \mathbb{C}$ i ako je $f'(z) \neq 0$ na području D, onda je preslikavanje $w = f(z)$ konformno u svim točkama područja D.*

Primjer 1.2 *(vidjeti [2])*

(a) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = z^n$, $n = 2, 3, ...$ konformno na $\mathbb{C}$ osim u točki $z_0 = 0$.

(b) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = e^z$, konformno na $\mathbb{C}$.

(c) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = sin\ z$, konformno na $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

(d) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, konformno na $\mathbb{C} \setminus \left\{1\right\}$.

Rješenje:
Preslikavanje je konformno u onim točkama u kojima je $f'(z) \neq 0$.

(a) Deriviranjem funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$.
Preslikavanje je konformno za $z \neq 0$.

(b) Deriviranjem funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = e^z \neq 0$.
Preslikavanje je konformno $\forall z \in \mathbb{C}$.

(c) Deriviranjem funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = cos\ z \neq 0$.
Preslikavanje je konformno $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

(d) Deriviranjem funkcije dobivamo uvjet $f'(z) = -\frac{2}{(z-1)^2} \neq 0, z \neq 1$.
Preslikavanje je konformno $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{1\right\}$.

Napomena:
Neka je f analitička funkcija na području D i neka vrijedi $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$. Analitička funkcija u točki z_0 male udaljenosti oko z_0 preslika u male udaljenosti oko w_0, a faktor uvećanja (rastezanja ili stezanja) je

$$\lambda = |f'(z_0)|$$

jer vrijedi

$$|w - w_0| = |f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)||z - z_0|.$$

Ako je $\lambda > 1$, element luka krivulje se rasteže, a ako je $\lambda < 1$, element luka krivulje se steže pri preslikavanju funkcijom f.

Primjer 1.3 *(vidjeti [2])*

(a) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = z^2$ konformno u točki $z_0 = 1 + i$.

(b) Izračunajte faktor uvećanja u okolini točke z_0.

(c) Izračunajte kut rotacije u točki z_0.

Rješenje:

(a) Deriviranjem funkcije dobivamo $f'(z) = 2z$. Za točku $z_0 = 1 + i$ imamo $f'(1 + i) = 2 + 2i \neq 0$. Slijedi da je preslikavanje konformno u točki z_0.

(b) Faktor uvećanja ćemo izračunati prema prethodnoj napomeni. Za okolinu točke $z_0 = 1 + i$ faktor uvećanja je $\lambda = |f'(z_0)| = 2\sqrt{2}$. Element luka krivulje se rastegne za faktor $\lambda > 1$.

(c) Kut rotacije računamo kao $Arg f'(z_0) = \frac{\pi}{4}$. Element luka krivulje se zarotira za kut $\frac{\pi}{4}$.

Primjer 1.4 *(vidjeti [9]) Koji se dijelovi kompleksne ravnine stežu, a koji rastežu pri preslikavanju funkcijama*

(a) $w = z^2 - 4z$

(b) $w = e^z$

(c) $w = \frac{1}{z}$.

Rješenje:

(a) Deriviranjem funkcije dobivamo $w' = 2z - 4$. Faktor uvećanja jednak je $\lambda = |2z - 4|$. Iz uvjeta $\lambda < 1$ slijedi

$$|z - 2| < \frac{1}{2}.$$

Unutrašnjost kruga $|z - 2| < \frac{1}{2}$ se steže, a vanjski dio rasteže pri preslikavanju funkcijom w.

(b) Deriviranjem funkcije dobivamo $w' = e^z$. Faktor uvećanja jednak je

$$\lambda = |w'| = |e^{x+iy}| = e^x.$$

Uvjet $\lambda < 1$ vrijedi za $x < 0$. Poluravnina se steže za Re $z < 0$, a rasteže za Re $z > 0$.

(c) Deriviranjem funkcije dobivamo $w' = \frac{-1}{z^2}$. Faktor uvećanja jednak je

$$\lambda = |w'| = \frac{1}{z^2}.$$

Uvjet $\lambda < 1$ vrijedi za $|z| > 1$. Vanjski dio jediničnog kruga se steže, unutrašnjost rasteže.

Napomena:
Neka je $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija u točki z_0. Ako je

$$f'(z_0) = 0$$
$$f''(z_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$
$$f^n(z_0) \neq 0,$$

onda preslikavanje $w = f(z)$ uvećava n puta kut između krivulja koje se sijeku u točki z_0. Navedena tvrdnja može se vidjeti u [2].

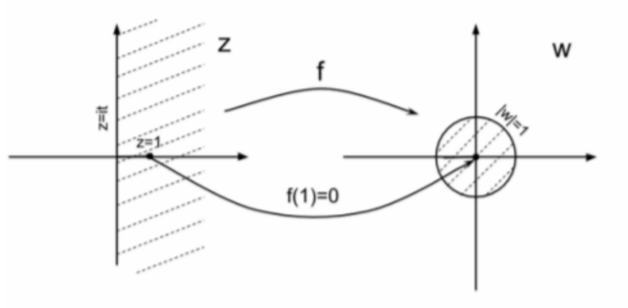
Primjer 1.5 *(vidjeti [2]) Pokažite da preslikavanje $f(z) = z^2$ nije konformno u točki $z_0 = 0$. Kako se ponaša preslikavanje u $z = 0$ s obzirom na kut između krivulja koje se sijeku u z_0.*

Rješenje: Deriviranjem funkcije dobivamo $f'(z) = 2z$. U točki $z = 0$ preslikavanje nije konformno. Prema prethodnoj napomeni $f''(0) = 2 \neq 0$ što znači da se kutevi u $z_0 = 0$ povećavaju dva puta.

Definicija 1.4 *Jednostruko povezano područje D u R^2 je područje koje ima svojstvo da se svaka zatvorena krivulja u D može bez prekidanja stegnuti na točku ne izlazeći iz D.*

Za jednostruko povezano područje vrijedi sljedeći teorem. Vidi [7].

Teorem 1.4 (Riemannov) *Svako jednostruko povezano područje $D \neq \mathbb{C}$ čiji rub se ne sastoji samo od jedne točke može se konformno preslikati na otvoreni jedinični krug $K(0, 1)$.*



Slika 2. Preslikavanje poluravnine $x > 0$ na $K(0, 1)$

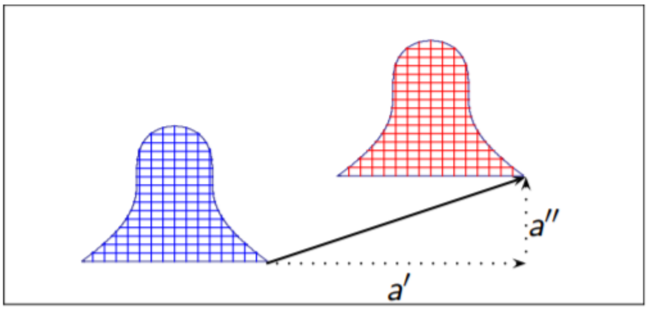
1.2 Preslikavanje osnovnim funkcijama

U ovom poglavlju ćemo navesti najosnovnije primjere konformnih preslikavanja. Složenija konformna preslikavanja mogu se dobiti kompozicijom osnovnih.

1.2.1 Translacija

Jedno od najosnovnijih konformnih preslikavanja je **translacija**. Translacija je preslikavanje oblika

$$w = f(z) = z + a, \quad a \in \mathbb{C}.$$



Slika 3. Translacija (vidi [1])

Translacijom se svaka točka u kompleksnoj ravnini preslikava u točku pomaknutu za kompleksni broj a.

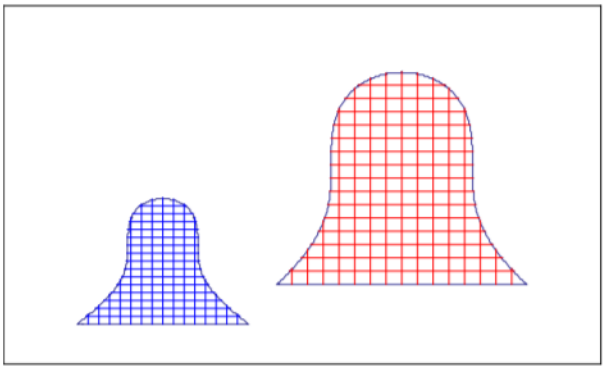
Napomena: Translacija svaku kružnicu preslika u kružnicu istog polumjera te pravac preslika u paralelni pravac.

1.2.2 Afina (linearna) funkcija

Promotrimo konformno preslikavanje koje je **linearna (afina) funkcija**. Linearna funkcija je preslikavanje oblika

$$w = f(z) = bz + a,$$

pri čemu je $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ovakvim preslikavanjem svaka točka množi se skalarom $b \neq 0$ i dolazi još do pomaka za kompleksni broj a te u svakoj točki u kompleksnoj ravnini faktor uvećanja jest $|b|$.



Slika 4. Linearna funkcija (vidi [1])

1.2.3 Rotacija

Preslikavanje oblika

$$w = f(z) = e^{i\theta_0} z$$

nazivamo **rotacija**. Ako ga zapišemo u trigonometrijskom obliku dobit ćemo

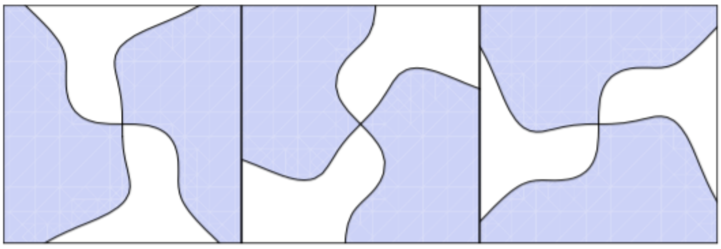
$$w = (cos\theta_0 + i\, sin\theta_0) z. \tag{1}$$

Možemo i z zapisati u trigonometrijskom obliku

$$z = r(cos\varphi + i\, sin\varphi). \tag{2}$$

Uvrštavanjem (2) u (1) dobivamo

$$w = r(cos\theta_0 + i\, sin\theta_0)(cos\varphi + i\, sin\varphi) = r(cos(\theta_0 + \varphi) + i\, sin(\theta_0 + \varphi)).$$



Slika 5. Rotacija za kut φ

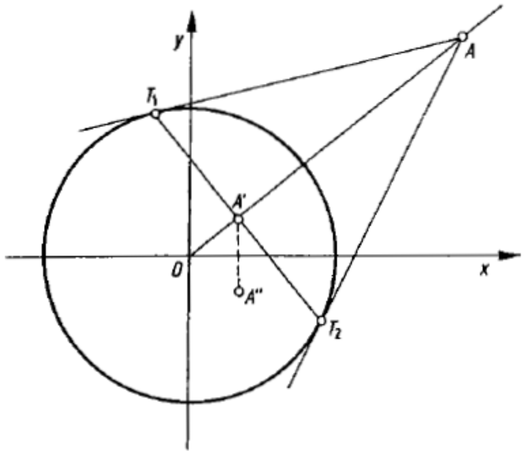
Ovim preslikavanjem - rotacijom svaka se točka kompleksne ravnine zakrene za kut φ u pozitivnom smjeru.
Primjerice, na slici 5. (vidi [1]) slika u sredini dobiva se preslikavanjem $w = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ iz lijeve slike. Slika na desnoj strani se dobiva iz slike s lijeve strane preslikavanjem $w = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

1.2.4 Inverzija

Posebno je zanimljiva funkcija

$$w = f(z) = \frac{1}{z}$$

koja preslikava ∞ u 0 te 0 u ∞, a za fiksne točke ima -1 i 1. To preslikavanje naziva se inverzija te je vezano za simetriju u odnosu na kružnicu.



Slika 6. Inverzija

Na slici 6. (vidi [6]) može se vidjeti kružnica Γ sa središtem u točki O. Točke A i A' simetrične su u odnosu na kružnicu Γ ako leže na istom pravcu iz točke O te ako vrijedi da je $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2$. Središte i točku ∞ smatramo simetričnim u odnosu na Γ, ako Γ leži u kompleksnoj ravnini.
Iz definicije slijedi da je točka $A \in \Gamma$ sama sebi simetrična te da ako je točka A izvan Γ, onda je točka A' unutar Γ, odnosno, ako je točka A unutar Γ, onda je točka A' izvan Γ. Ako povučemo iz A (A izvan Γ) dvije tangente na Γ, onda one u točkama T_1 i T_2 diraju Γ. Sjecište dužina OA i T_1T_2 označimo s A'. Iz sličnosti trokuta $\overline{OA} : \overline{OT_1} = \overline{OT_1} : \overline{OA'}$, slijedi $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OT_1^2} = R^2$, odnosno slijedi da su točke A i A' simetrične u odnosu na Γ.
Neka je Γ jedinična kružnica u kompleksnoj ravnini sa središtem u nuli. Ako kompleksan broj $z = re^{i\phi}$, $r > 0, \phi \in \mathbb{R}$, pripada točki A, onda točki A' pripada broj

$$\frac{1}{r}e^{i\phi} = \frac{1}{re^{-i\phi}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Točki A' simetrična je točka A^* u odnosu na x - os, kojoj pripada broj

$$z^* = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{1}{z} = w.$$

Slijedi, preslikavanje $w = f(z) = \frac{1}{z}$ je kompozicija simetrije u odnosu na kružnicu $|z| = 1$ te simetrije u odnosu na os x. Iz tog je preslikavanja $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ što povlači da je $f'(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Stoga, na području $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ inverzija je konformno preslikavanje.

1.3 Preslikavanje nekim drugim elementarnim funkcijama

U ovom ćemo poglavlju opisati preslikavanja još nekoliko elementarnih funkcija.

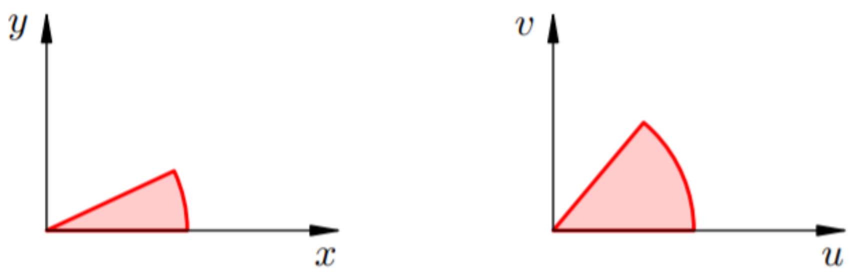
1.3.1 Funkcija $w(z) = z^2$

Funkcija

$$w(z) = z^2$$

je jednoznačna funkcija u kompleksnoj ravnini.
Ako z prikažemo u trigonometrijskom obliku imamo $z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$, (gdje $r = |z|$), onda primjenom funkcije w dobivamo

$$z^2 = r^2(cos2\varphi + i\ sin2\varphi).$$

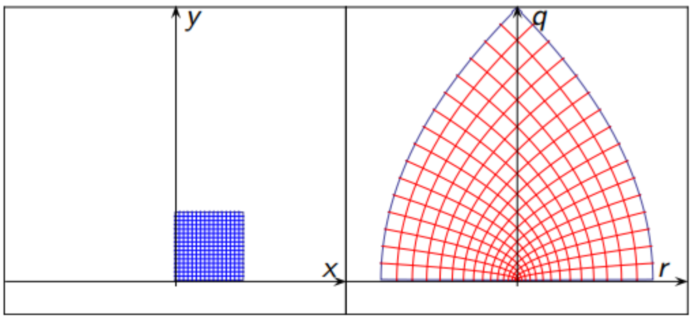


Slika 7. Preslikavanje $w(z) = z^2$

Iz prethodnog raspisa i slike 7. zaključujemo da se kružni isječak kojemu jedan krak leži na x-osi preslika u kružni isječak dvostrukog kuta i kvadrata radijusa.

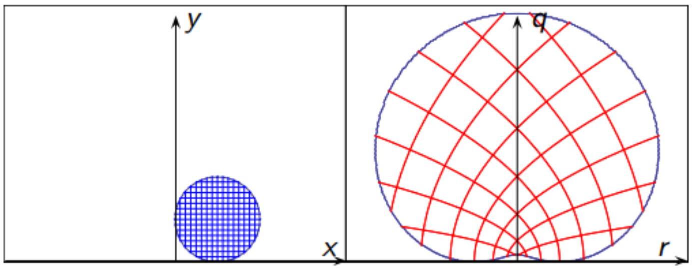
Primjer 1.6 *(vidjeti [7]) Preslikajte gornju poluravninu funkcijom $w(z) = z^2$.*

Rješenje:
Gornja poluravnina specijalni je oblik kružnog isječka, pri čemu je kut $\varphi \in [0, \pi]$ te radijus $r = |z| \in [0, \infty >$. Odatle i iz gornjeg izraza za ovu funkciju u trigonometrijskom obliku, slijedi da se gornja poluravnina preslika u cijelu kompleksnu ravninu.
Na slici 8. (vidi [1]) prikazano je geometrijski kako se dani kvadrat u I.kvadrantu preslikava tom funkcijom $w(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + y^2 - i2xy$.



Slika 8. Konformno preslikavanje kvadrata funkcijom $w(z) = z^2$

Analogno kao kod slike gornje poluravnine od ovog preslikavanja, može se vidjeti da se I. kvadrant (gdje $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$) preslikava na I. i II. kvadrant, odnosno u gornju poluravninu. Pri tome, pozitivni dio imaginarne osi ($w(yi) = -y^2$) preslikava se u negativni dio realne osi. Donja i lijeva stranica kvadrata prikazanog na slici 8. preslikaju se na segment na realnoj osi u kompleksnoj ravnini.
Na slici 9. (vidi [1]) možemo vidjeti geometrijski kako se preslikavanjem $w(z) = z^2$, krug iz I. kvadranta pretvara u lepezu u I. i II. kvadrantu.



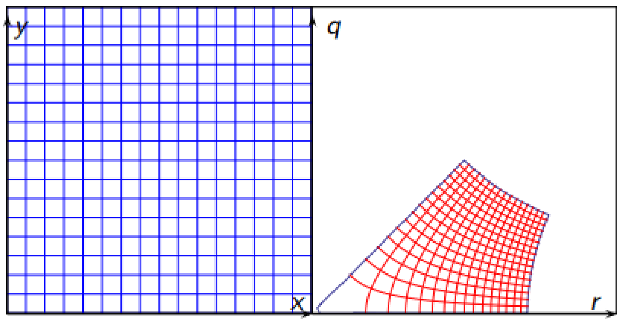
Slika 9. Konformno preslikavanje kruga funkcijom $w(z) = z^2$

1.3.2 Funkcija $w(z) = \sqrt{z}$

Na primjeru konformnog preslikavanja

$$w(z) = \sqrt{z}$$

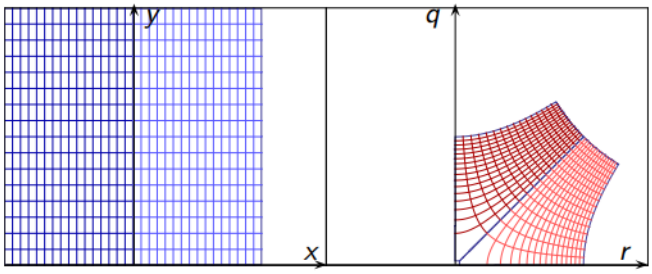
možemo promotriti kako se kvadrat u I. kvadrantu preslikava u kompleksnoj w-ravnini.



Slika 10. Konformno preslikavanje kvadrata funkcijom $w(z) = \sqrt{z}$

Na slici 10. (vidi [1]) prikazano je da ovom funkcijom slika lijeve stranice kvadrata se naginje pod 45° u w-ravnini, jer vidimo (za kvadrat duljine stranice a) za $y \in [0, a]$ da $w(iy) = \sqrt{iy} = \sqrt{y}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$.

Na slici 11. (vidi [1]) prikazana je slika kvadrata koji se nalazi u I. i II. kvadrantu i koji je simetričan oko y-osi.



Slika 11. Konformno preslikavanje kvadrata funkcijom $w(z) = \sqrt{z}$

Ispod pravca $q = r$ gdje nam je $r = u(x, y)$ realni dio kompleksne funkcije $f(z)$, a $q = v(x, y)$ imaginarni dio kompleksne funkcije $f(z)$, nalaze se slike točke za koje je $x > 0$, a iznad se nalaze slike točaka za koje je $x < 0$. Negativna strana realne osi preslikava se u pozitivnu stranu imaginarne osi. Imaginarna os se preslikava u pravac $q = r$ u kompleksnoj w-ravnini.

1.3.3 Funkcija $w(z) = e^z$

Eksponencijalna funkcija

$$w(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

konformno je preslikavanje na $\mathbb{C}$.

Za eksponencijalnu funkciju vrijede sljedeća svojstva:

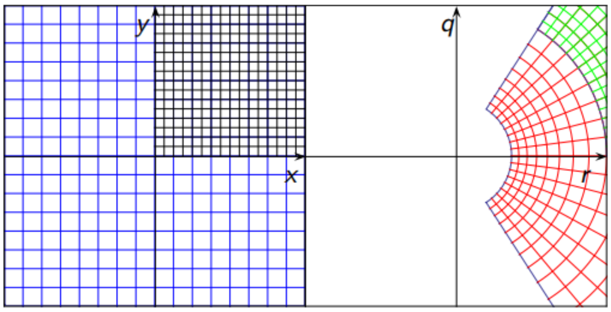
1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ za svaki $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ za svaki $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

3) Eksponencijalna funkcija je periodična s periodom $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(cos(y+2\pi) + isin(y+2\pi)) = e^x(cosy + isiny) = e^z$$

za svaki $z \in \mathbb{C}$.



Slika 12. Konformno preslikavanje kvadrata funkcijom $w(z) = e^z$

Ova funkcija preslikava jedinični kvadrat iz I. kvadranta u z-ravnini, u kružni odsječak u w-ravnini (slika 12. (vidi [1])), jer:

1) donji rub jediničnog kvadrata - segment za koji je $x \in [0,1]$, $y = 0$ preslika se u $w = e^x \in [1, e]$

2) desni rub jediničnog kvadrata - segment za koji je $x = 1$, $y \in [0,1]$, preslika se u kružni luk $w = e(\cos y + i \sin y)$

3) gornji rub jediničnog kvadrata - segment za koji je $x \in [0,1]$, $y = 1$, preslika se u $w = e^x(\cos 1 + i \sin 1)$

4) lijevi rub jediničnog kvadrata - segment za koji je $x = 0$, $y \in [0,1]$, preslika se u kružni luk $w = \cos y + i \sin y$.

2 Möbiusova transformacija

Definicija 2.1 *Funkcija*

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{3}$$

za koju je $ad - bc \neq 0$ naziva se ***Möbiusova transformacija****. Pri tome su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ (parametri transformacije f) zadani kompleksni brojevi.*

Iz (1) dobivamo

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0. \tag{4}$$

pa bi $ad - bc = 0$ povlačilo da je f konstanta. Iz tog je razloga u (3) stavljen uvjet $ad - bc \neq 0$.
Riješimo li (3) po z dobivamo

$$z = g(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}, \tag{5}$$

što s $(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$ pokazuje da je inverzno preslikavanje Möbiusove transformacije upravo Möbiusova transformacija.
U slučaju da je c=0 funkcije (3) i (4) su afina preslikavanja

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \qquad g(w) = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a}. \tag{6}$$

Afina preslikavanja mogu se proširiti do bijekcija $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, s fiksnom točkom koju označavamo s ∞.

Ako nam je $c \neq 0$, onda je (3) bijekcija sa $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ na $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ te je funkcija g njoj inverzna bijekcija sa $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ na $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$.
Kako je

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

$$\lim_{z\to\frac{-d}{c}} f(z) = \lim_{z\to\frac{-d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b}{c\left(\frac{-d}{c}\right)+d} = \frac{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b}{-d+d} = \frac{\frac{-ad}{c}+b}{0} = \infty$$

$$\lim_{w\to\infty} g(w) = \lim_{w\to\infty} \frac{-dw+b}{cw-a} = \lim_{w\to\infty} \frac{-d+\frac{b}{w}}{c-\frac{a}{w}} = \frac{-d}{c}$$

$$\lim_{w\to\frac{a}{c}} g(w) = \lim_{w\to\frac{a}{c}} \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-d\left(\frac{a}{c}\right)+b}{c\left(\frac{a}{c}\right)-a} = \frac{-d\left(\frac{a}{c}\right)+b}{a-a} = \frac{\frac{-ad}{c}+b}{0} = \infty$$

funkcije f i g proširuju se do međusobno inverznih bijekcija

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$$

$$g(\infty) = \frac{-d}{c}, \quad g\left(\frac{a}{c}\right) = \infty.$$

Gore definirane funkcije zovu se meromorfne funkcije, jer su proširene na $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Posebno zanimljiva Möbiusova transformacija je

$$w = f(z) = \frac{1}{z}. \tag{7}$$

Preslikavanje (7) vezano je za simetriju u odnosu na kružnicu te se naziva inverzija, što smo opisali u poglavlju 1.

Teorem 2.1 *(vidjeti [6]) Neka su $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tri međusobno različite točke te $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ također međusobno različite. Tada postoji jedinstvena Möbiusova transformacija f takva da je*

$$w_i = f(z_i), \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

koja je zadana implicitno formulom:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \tag{9}$$

Dokaz:

Neka Möbiusove transformacije f_1 i f_2 zadovoljavaju (8). Tada se Möbiusova transformacija $f_2^{-1} \circ f_1$ sastoji od tri fiksne točke z_1,z_2 i z_3 pa je i ona identiteta, tj. $f_2^{-1}(f_1(z)) = z$ za svako z. Slijedi, $f_2(z) = f_1(z)$ tj. $f_1 = f_2$. Time smo dokazali jedinstvenost Möbiusove transformacije sa svojstvom (8). Riješimo li (9) po w, vidimo da je sa (9) dana Möbiusova transformacija koja ima svojstvo (8) . Kako bi izbjegli taj račun, uočimo Möbiusove transformacije

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad f_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Stoga je i $f = f_2^{-1} \circ f_1$ Möbiusova transformacija.

Kako je

$$f_1(z_1) = 0, \quad f_1(z_2) = \infty, \quad f_1(z_3) = 1$$
$$f_2(w_1) = 0, \quad f_2(w_2) = \infty, \quad f_2(w_3) = 1$$

slijedi da je ispunjeno (8) te iz $f_2 \circ f = f_1$ slijedi (9). □

Teorem 2.2 *(vidjeti [4]) Möbiusova transformacija zadana s $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pri čemu su a,b,c,d $\in \mathbb{C}$ takvi da je $ad \neq bc$ je bijekcija iz skupa $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ u skup $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ i njezino inverzno preslikavanje je također Möbiusova transformacija dana formulom $g(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$.*

Dokaz:

Da bismo dokazali tvrdnju dovoljno je pokazati da vrijedi

$$(f \circ g)(w) = w, \quad i \quad (g \circ f)(z) = z$$

za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ i za sve $w \in \mathbb{C}\{\frac{a}{c}\}$.

$$(f \circ g)(w) = \frac{a\left(\frac{-dw+b}{cw-a}\right) + b}{c\left(\frac{-dq+b}{cw-a}\right) + d} = \frac{\frac{-adw+ab+bcw-ab}{cw-a}}{\frac{-cdw+cb+cdw-ad}{cw-a}} = \frac{\frac{w(-ad+bc)}{cw-a}}{\frac{cb-ad}{cw-a}} = w,$$

odnosno

$$(f \circ g)(w) = w.$$

Vrijedi

$$(g \circ f)(z) = \frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - a} = \frac{\frac{-adz-bd+bcz+bd}{cz+d}}{\frac{acz+bc-acz-ad}{cz+d}} = \frac{\frac{z(bc-ad)}{cz+d}}{\frac{bc-ad}{cz+d}} = z,$$

odnosno

$$(g \circ f)(z) = z.$$

□

Primjer 2.1 *(vidjeti [6]) Nađimo Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke 0,1, ∞ redom u točke ∞ , 0, 1. Uzimajući u obzir $w_1 = \infty$ i $z_3 = \infty$ iz (9) dobivamo*

$$\frac{w_3 - w_2}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

što povlači da je

$$\frac{1}{w} = \frac{z}{z-1}$$

iz čega slijedi da je

$$w = 1 - \frac{1}{z}.$$

Primjer 2.2 *(preslikavanje kruga na krug)*

Neka su Γ_1 i Γ_2 dvije kružnice u ravnini $\mathbb{C}$. Uzmemo li tri točke z_1, z_2, z_3 na Γ_1 te tri točke w_1, w_2, w_3 na Γ_2, Möbiusova transformacija f za koju je $w_i = f(z_i)$ (gdje je i=1,2,3) preslikava kružnicu Γ_1 na kružnicu Γ_1^*. Budući da kružnice Γ_1^* i Γ_2 imaju tri različite w_1, w_2 te w_3 zajedničke, one su jednake.
Nadalje, može se pokazati (vidi [6]) da ako točke w_1, w_2 te w_3 na Γ_2 daju istu orijentaciju kao i točke z_1, z_2 te z_3, onda f preslikava krug D_1 na krug D_2, a ako točke w_1, w_2 te w_3 daju na Γ_2 suprotnu orijentaciju od one koju daje točke z_1, z_2 te z_3 na Γ_1, onda f preslikava krug D_1 na vanjsko područje E_2 kružnice Γ_2 te f ima pol u D_1.

2.1 Svojstva Möbiusove transformacije

Propozicija 2.3 *(vidjeti [4]) Möbiusova transformacija je konformno preslikavanje.*

Dokaz: Preslikavanje $f = f(z)$ gdje je

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}; \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, & z \in \mathbf{C}, c = 0; \\ \frac{a}{c}, & z = \infty, c \neq 0; \\ \infty, & z = \frac{-d}{c}, c \neq 0. \end{cases}$$

je konformno ako čuva veličinu i smjer kuteva što je upravo osobina analitičkih preslikavanja. Kako je

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$$

preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je konformno.

Kada je $z = \frac{-d}{c}$, $f(z) = \infty$ pa $f'(z)$ ne postoji. Stoga se ovdje na funkciju f može primijeniti prošireni pojam konformnog preslikavanja u točki $z = -d/c$. Promotrimo tada preslikavanje $F_1(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$. Konformnost preslikavanja $F_1(z)$ u točki $z = \frac{-d}{c}$ povlači tada konformnost preslikavanja $f(z)$:

$$F_1'(z) = \left(\frac{cz+d}{az+b}\right)' = \frac{c(az+b) - (cz+d)a}{(az+b)^2} = \frac{acz + bc - acz - ad}{(az+b)^2} = \frac{bc-ad}{(az+b)^2}$$

$$F_1'\left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{bc-ad}{(\frac{ad}{c}+b)^2} = \frac{bc-ad}{(\frac{bc-ad}{c})^2} = \frac{c^2(bc-ad)}{(bc-ad)^2} = \frac{c^2}{bc-ad}$$

Zaključujemo da je F_1 analitička ako i samo ako je $c \neq 0$ i $bc - ad \neq 0$.
Konačno za $z = \infty$ promotrimo preslikavanje $F_2(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Primjenom proširenog pojma konformnog preslikavanja u točki $z = \infty$, dobivamo da iz konformnosti preslikavanja $F_2(z)$ u $z = 0$ slijedi konformnost preslikavanja funkcije f u $z = \infty$:

$$F_2(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} = \frac{\frac{a+bz}{z}}{\frac{c+zd}{z}} = \frac{bz+a}{dz+c}$$

$$F_2'(z) = \left(\frac{bz+a}{dz+c}\right)' = \frac{b(zd+c) - (bz+a)d}{(dz+c)^2} = \frac{bdz + bc - bdz - ad}{(dz+c)^2} = \frac{bc-ad}{(dz+c)^2}$$

$$F_2'(0) = \frac{bc-ad}{c^2}, \quad c \neq 0, \quad bc - ad \neq 0,$$

iz čega slijedi tvrdnja. □

Propozicija 2.4 *(vidjeti [4]) Möbiusova transformacija se može prikazati kao kompozicija translacije, rotacije, homotetije i inverzije.*

Dokaz: Imamo $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbiusovu transformaciju te nam je $c \neq 0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} w = \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{\frac{az}{c} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{az}{c} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} - \frac{a}{c} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{az + \frac{ad}{c} - az - b}{c\left(z + \frac{d}{c}\right)} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{\frac{ad-bc}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

pa možemo zapisati w kao kompoziciju idućih transformacija na način:

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_3(z) = \left|\frac{-ad+bc}{c^2}\right| z, \quad f_4(z) = \frac{\frac{-ad+bc}{c^2}}{\left|\frac{-ad+bc}{c^2}\right|} z = e^{iarg\left(\frac{-ad+bc}{c^2}\right)} z, \quad f_5(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Stoga nam vrijedi

$$f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

iz čega slijedi da je Möbiusova transformacija $f(z)$ kompozicija translacije, inverzije, homotetije, rotacije te opet translacije. Ako je $c = 0$, funkciju $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ tada možemo zapisati kao kompoziciju funkcija:

$$f_1(z) = \left|\frac{a}{d}\right| z, \quad f_2(z) = \frac{\frac{a}{d}}{\left|\frac{a}{d}\right|} z, \quad f_3(z) = z + \frac{b}{d},$$

odnosno kao kompoziciju homotetije, rotacije te translacije. Vrijedi

$$f(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z).$$

$\square$

Propozicija 2.5 *(vidjeti [4]) Kompozicija Möbiusovih transformacija Möbiusova je transformacija.*

Dokaz: Neka su nam $f_1 = \frac{az+b}{cz+d}$ i $f_2 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ Möbiusove transformacije. Slijedi,

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{a\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)+b}{c\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right)+d} = \frac{\frac{aa_1z+b_1a+c_1zb+d_1b}{c_1z+d_1}}{\frac{ca_1z+cb_1+c_1zd+d_1d}{c_1z+d_1}} = \frac{z(aa_1+c_1b)+b_1a+d_1b}{z(ca_1+c_1d)+cb_1+d_1d}.$$

Neka su $e = aa_1 + c_1b$, $f = b_1a + d_1b$, $g = ca_1 + c_1d$, $h = cb_1 + d_1d \in \mathbb{C}$. Tada je

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$$

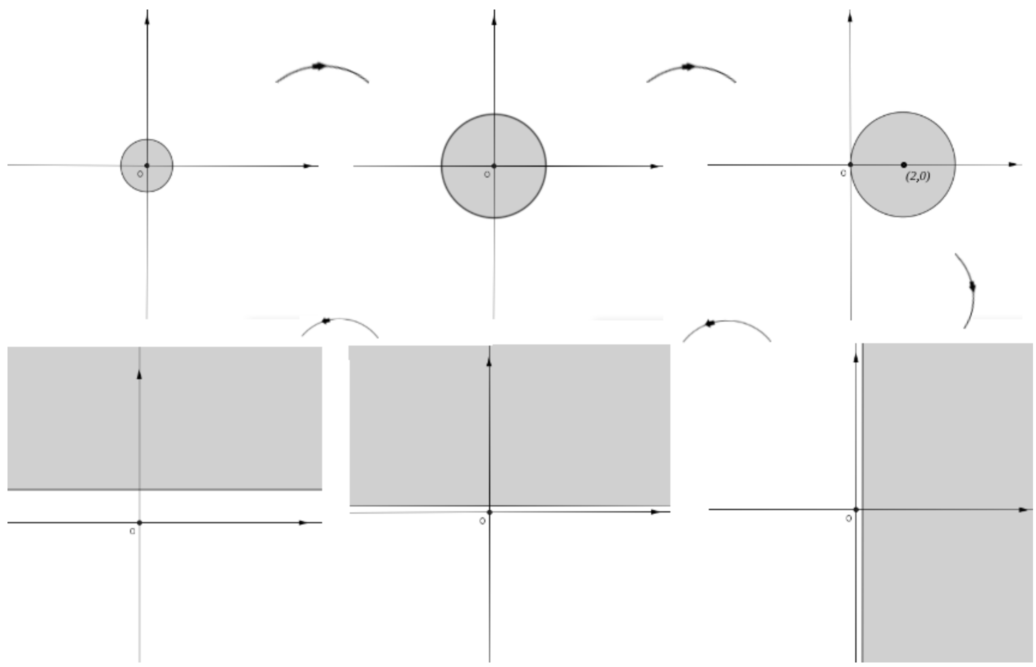
Möbiusova transformacija. Analogno pokazujemo i za $(f_2 \circ f_1)(z)$. $\square$

Primjer 2.3 *(vidjeti [4]) Rastavite Möbiusovu transformaciju $f(z) = \frac{2iz+3i}{2z+2}$ na elementarne funkcije te preslikajte jedinični krug pomoću zadane funkcije.*

Rješenje:

$$f(z) = \frac{2iz+3i}{2z+2} = \frac{2z+3}{2z+2}i = \frac{2z+2+1}{2z+2}i = i + \frac{i}{2z+2}$$

$f_1(z) = 2z$ je homotetija za faktor 2, $f_2(z) = z+2$ je translacija za 2, $f_3(z) = \frac{1}{z}$ je inverzija, $f_4(z) = iz_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}z$ je rotacija za $\frac{\pi}{2}$ te $f_5(z) = z+i$ translacija za i. Slijedi nam, $f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$. Na slici 13. primjećujemo u što će se uz zadanu Möbiusovu transformaciju jedinični krug preslikati.



Slika 13. Preslikavanje jediničnog kruga Möbiusovom transformacijom

2.2 Neke primjene Möbiusove transformacije

2.2.1 Aerodinamika

Razmatrat ćemo primjenu konformnog preslikavanja u aerodinamici zvanu Joukowsky preslikavanje. Dano je izrazom

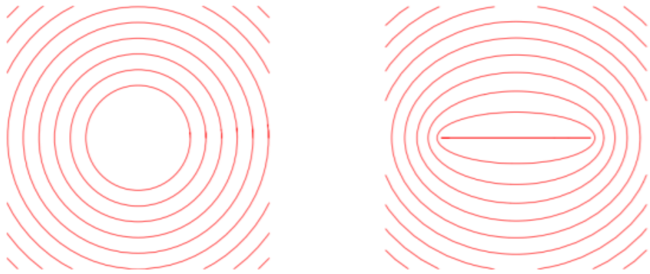
$$w = f(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$

Nikolay Zhukovsky (Joukowski), ruski znanstvenik, prvi je koristio ovo preslikavanje za proučavanje toka fluida oko krila zrakoplova te je prvi primjenjivao teoriju funkcija kompleksne varijable u aerodinamici i hidromehanici. Joukowsky preslikavanje konformno je u svakoj točki osim u $z_1 = -1$ i $z_2 = 1$, jer je

$$g'(z) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big) = 0$$

ako i samo ako

$$z \in \{-1, 1\}.$$



Slika 14. Joukowski preslikavanje

Na slici 14. (vidi [5]) možemo vidjeti da Joukowski preslikavanje jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu preslikava u segment $[-1, 1]$. Ako bi promatrali kružnicu s proizvoljnim polumjerom te središtem u ishodištu, Joukowski preslikavanje bi takvu kružnicu $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ preslikalo u elipsu. Uporabom eksponencijalnog oblika kompleksnog broja $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, dobiva se

$$f(z) = f(Re^{i\varphi}) = 1/2\Big(Re^{i\varphi} + \frac{1}{Re^{i\varphi}}\Big) = 1/2(R + 1/R)\cos\varphi + i \cdot 1/2(R - 1/R)\sin\varphi.$$

2.2.2 Mapiranje mozga

Konformno se preslikavanje primjenjuje i u medicini kod "mapiranja mozga" na sljedeći način:

1) Moždana se mreža preslikava na sferu.

2) Stereografska projekcija preslikava sferu na kompleksnu ravninu.

3) Möbiusova transformacija čuva kuteve prilikom preslikavanja sfere na kompleksnu ravninu.

4) Stereografska projekcija zatim preslikava konačnu sliku natrag na površinu sfere.

Slika 15. Rekonstrukcija mozga na sferu (vidi [10])

Ovisno o Möbiusovoj transformaciji, konformno preslikavanje mozga koristi se za detaljnu analizu različitih dijelova mozga.

2.2.3 Pomorska plovidba

Konformna se preslikavanja mogu koristiti i u kartografiji, posebice kod Mercatorova preslikavanja te stereografskih preslikavanja. Ova preslikavanja posebno su nam korisna za upotrebu u pomorskoj plovidbi zbog svog jedinstvenog svojstva da zadržavaju stalni smjer kretanja. Takav smjer, poznat kao romb, poželjan je u pomorskoj plovidbi jer brodovi mogu ploviti u konstantnom smjeru kompasa.

Literatura

[1] I. Batistić, Uporaba konformnog preslikavanja u problemima strujanja idealne tekućine, PMF - fizički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2008.

[2] V. Čuljak, Primijenjena matematika, Skripta, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011.

[3] A. Fiedorowic, T. Remkiewicz i Z. Flanagan: Möbius Transformations, 2020.

[4] I. Grubišić, Möbiusove transformacije, Diplomski rad, Zagreb, 2021.

[5] K. Kalmar, Primjena konformnih preslikavanja u aerodinamici, Završni rad, Osijek, 2019.

[6] S. Kurepa, H. Kraljević, Matematička analiza 4, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[7] E. Shikin, M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko: Mathematical analysis for Engineers, Vol.2, 1990.

[8] Š. Ungar, Kompleksna analiza, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

[9] M. Vuković, Lj. Jarnjak, A. Rašidagić-Finci, Zbirka zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive, 1975.

[10] Y. Wang, T. F. Chan, P. Thompson, X. D. Gu, S. T. Yau, Genus Zero Surface Conformal Mapping and Its Application to Brain Surface Mapping, 2004.

Sažetak

U radu se razmatraju kompleksne funkcije koja su konformna preslikavanja. Posebno se promatra Möbiusova transformacija, koja kao kompleksna funkcija jeste konformno preslikavanje, a znamo da ono čuva orijentaciju i kuteve što smo prikazali na primjerima. Neki od osnovnih primjera Möbiusove transformacije su translacija, afina (linearna) funkcija i rotacija. Möbiusova transformacija je bijekcija te je prikazujemo kao kompoziciju homotetije, translacije, inverzije te rotacije. Dokazali smo i da je kompozicija Möbiusovih transformacija Möbiusova transformacija. Tvrdnje smo ilustrirali na primjerima. Naveli smo i neka druga svojstva Möbiusove transformacije, kao primjerice svojstvo da je Möbiusova transformacija jednoznačno određena sa svojim vrijednostima u tri točke. Primjena Möbiusove transformacije važna je i u mnogim područjima znanosti, jer se temelji na preslikavanju sfere na kompleksnu ravninu. U radu smo opisali neka područja u kojima je koristimo.

Summary

In this work complex functions that are conformal mappings are considered. The Mobius transformation is conformal mapping such that preserves the orientation and angles which is shown by the examples. Some of examples explained in this work are translation, linear function and rotation. The Mobius transformation is bijection and we can present it as a composition of homothety, translation, inversion and rotation. It is proved that the composition of Mobius transformation is also a Mobius transformation through examples. Some other properties of the Mobius transformation are also mentioned. For example, the Mobius transformation is uniquely determined with its values at 3 points. The application of the Mobius transformation is also important in many fields of science since it is based on the mapping of a sphere to a complex plane. Applications in some fields of science are described in this work.

Životopis

Rođena sam 19. veljače 1995. godine u Vinkovcima. Nakon završene Osnovne škole August Cesarec u Ivankovu, upisujem gimnaziju u Vinkovcima. 2014. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Preddiplomski studij završila sam 2018. godine uz završni rad na temu Laplaceova transformacija. Iste godine upisujem diplomski studij Financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku.