Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Kelava

Primjena matematike u renesansnoj likovnoj umjetnosti i nekim drugim razdobljima

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Kelava

Primjena matematike u renesansnoj likovnoj umjetnosti i nekim drugim razdobljima

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Matematika i likovna umjetnost su uvelike povezane još davnih povijesnih vremena. Kao što je već i poznato, likovna umjetnost je važan element ljudske civilizacije još od prapovijesti kada su ljudi prikazivali scene iz svakodnevnog života pomoću crteža na zidovima pećina, a razvojem matematike, posebice geometrije, počinje i primjena matematike u likovnoj umjetnosti. Kao širi pojam, matematika je znanost o geometrijskim oblicima i brojevima, a kao takva je odlično pomoćno sredstvo projektiranja i komponiranja likovnih i arhitektonskih djela.
Ovaj diplomski rad bavi se proučavanjem povezanosti matematike i likovne umjetnosti kroz povijest, a posebice u, za matematičare, ali i umjetnike posebno plodonosnom razdoblju, renesansi. Renesansa (franc. renaissance: obnova, preporod), naziv za razdoblje u europskoj kulturi XV.–XVI. st. koje općenito odlikuje obnavljanje antičkih kulturnih zasada, razvoj novih umjetničkih oblika te postupna afirmacija individualizma ostvarena u koncepciji velikog umjetnika, odnosno svestrana, intelektualno radoznala, čovjeka (tal. uomo universale). Bilo je to posebno zanimljivo i plodno razdoblje za sve umjetnike i znanstvenike, posebice nakon manje dinamičnog srednjeg vijeka. Naziv se prvi put javio u djelu G. Vasarija Životi najvrsnijih talijanskih arhitekata, slikara i kipara (1550.–1568). Nadalje, pojasnit ćemo pojmove Fibonaccijevog niza i zlatnog reza koji su, za razdoblje renesanse predstavljali izuzetno bitan čimbenik pri stvaranju umjetničkih djela, a osim u slikarstvu imali su velik utjecaj i u arhitekturi, kiparstvu pa i glazbi tog razdoblja.
Osim povijesnog pregleda u ovom radu proučavat ćemo utjecaj matematike na stvaranje likovnih djela razlažući djela na njihove važne komponente, kao što su ritam i simetrija te konstrukcijom slike u linearnoj perspektivi koja je najviše korištena upravo tokom razdoblja renesanse. Također, zanimljivo je kako utjecaj matematike nije prestao nakon renesanse te se isti može uočiti i u slikama nastalim i nakon renesanse, a u ovom radu ćemo u posljednjim poglavljima proučavati utjecaj matematike u kubizmu i matematičkom neoplasticizmu i, najnovijoj grani likovne umjetnosti, fraktalnoj umjetnosti.

1 Matematika i likovna umjetnost

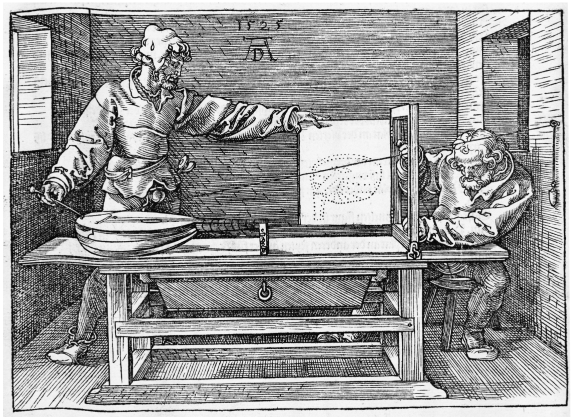
Kao što je već rečeno, matematika i likovna umjetnost su usko povezani od povijesnih vremena, ali primjena matematike nije jednaka u svim pravcima likovne umjetnosti koji su se razvijali kroz povijest. Počevši od antičkog doba uočavamo kako su umjetnici pokušavali dvodimenzionalno, ali realistično prikazati trodimenzionalne objekte, ali na žalost ne postoji nikakav dokaz kako su umjetnici iz tog razdoblja razumjeli ili razradili matematičke zakone pravilnog perspektivnog crtanja. Prva je i osobito zamjetna intenzivna primjena konkretnih matematičkih zakona pravilnog perspektivnog crtanja u sklopu umjetničkih djela nastalih u renesansi jer je tada pozornost bila znatno usmjerena na proučavanje i primjenu zlatnog reza. Tu je bitno izdvojiti Giotta koji u 13. stoljeću razrađuje niz matematički preciznih pravila prilikom konstruiranja slike u linearnoj perspektivi. Unatoč tomu, prvu preciznu formulaciju pravila linearne perspektive daje arhitekt Filippo Brunelleschi oko 1420. godine, no niti on nije zapisao navedena pravila. Prvi koji precizno zapisuje ta pravila je Leone Alberti u svojim djelima *De pictura* (na latinskom) te u *Della pittura* (na talijanskom). Bitno je naglasiti da se ne radi o prijevodu istog djela na talijanski jezik, već o dva različita djela s istom tematikom. Sama linearna perspektiva je detaljnije pojašnjena u zasebnom poglavlju. Od renesansnih matematičara i umjetnika je također bitno izdvojiti i Pierra della Francescu koji je djelovao u 15. stoljeću i njegovo djelo *Trattato d'abaco*. U spomenutom djelu postoje prikazi Arhimedovih tijela i njihove pravilne perspektivne slike.

U svom drugom djelu, *De prospectiva pingendi* objašnjava teoreme o perspektivi ravninskih likova, perspektivni prikaz prizmi i perspektivni prikaz kompliciranijih objekata korištenjem koordinatnog sustava. Nadalje, najvažnija matematička ličnost renesanse je svakako fra Luca Pacioli koji je na osnovi della Francescinih djela napisao vlastiti prikaz pravila linearne perspektive u svom djelu *De divina proportione* iz 1509. godine. Navedeno djelo ilustrirao je upravo Leonardo da Vinci. Zanimljivo je napomenuti kako da Vincijeve ilustracije pravilnih poliedara prvi puta, za razliku od prethodnih ilustracija, nisu prikazivale pune poliedre već samo njihove bridove te je na taj način osigurana zornost prikaza čitatelju. Ne može se sa sigurnošću reći je li Leonardo da Vinci na taj način crtao poliedre koristeći vlastitu maštu ili je, pak, do takve ideje došao promatrajući drvene modele poliedara koji su tada bili dostupni.

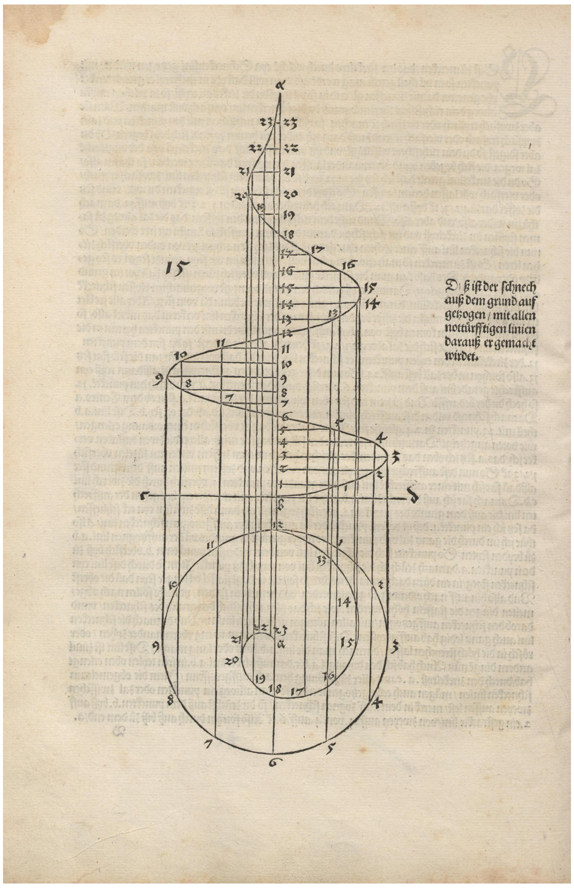
U djelu De divina proportione Pacioli se bavi primjenama zlatnog reza na umjetnost te je upravo zbog naslova njegove knjige omjer zlatnog reza i nazvan „božanskim omjerom“. U razdoblju renesanse također je bitan doprinos konstrukciji slike u linearnoj perspektivi te matematičkoj pozadini slikarstva dao njemački slikar Albrecht Dürer. Proučavajući Paciolijeva djela postaje svjestan važnosti matematike u slikarstvu te počinje proučavati brojna matematička djela pa se u njegovim slikama može uočiti značajan matematički utjecaj. Najpoznatija Dürerova slika jest *Melankolija I* i ona donosi prvi magični kvadrat u Europi, kojemu je godina nastanka (1514.) unesena kao brojevi 15 i 14 u donjem redu.

Slika 1. Melankolija I

Osim toga, Dürer 1525. objavljuje djelo *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen* koje je zapravo detaljan prikaz teorije sjena i perspektive u kojem se Dürer bavi i krivuljama, između ostalog i Arhimedovom spiralom i konhoidom te po njemu nazvanim Dürerovim krivuljama. Također u navedenom djelu navodi i pravila za konstrukciju slike u linearnoj perspektivi koristeći se mehaničkim pomagalima za konstrukcije.



Slika 2. Dürerov bakrorez s prikazom perspektivnog crtanja



Slika 3. Ilustracija iz Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen

Nastankom moderne umjetnosti, odnosno ekspresionizma i impresionizma, matematika gubi primjenu i značaj zbog naglaska na slobodnoj kompoziciji. Pojavom kubizma preuzimaju se geometrijski modeli, ali u poprilično metaforičkoj, pjesničkoj formi s ciljem da se kroz geometrijske oblike stvori novo perceptivno iskustvo. Iz kubizma se izdvojila pariška grupa Section d'Or čiji je cilj bio stvaranje slikarstva zasnovanog na harmonijskim odnosima boja i mjere. Zanimanje za primjenu matematike u likovnoj umjetnosti se produbljuje nastankom konstruktivizma, gdje se posebno izdvajaju Bauhaus, De Stijl i sovjetski konstruktivizam. U sklopu konstruktivizma matematika se može promatrati kao model koji pruža metode konstruiranja egzaktnih likovnih struktura, no i kao simbol novog industrijskog duha. U modernizmu (geometrijska apstrakcija), neoavangardi (neokonstruktivizam, fluksus[1]), postavangardi (minimalna, postminimalna i konceptualna umjetnost) i postmodernoj umjetnosti (postmoderna računalna umjetnost, umjetnost fraktala), matematika je sredstvo formuliranja zamisli i koncepta o strukturi umjetničkog djela, dakle umjetnik se sada poistovjećuje s inženjerom-projektantom čije umjetničko djelo nastaje nizom geometrijskih konstrukcija i mjerenja. Također, matematika je i skup metoda i znanja pomoću kojih je moguće konstruirati vizualne efekte kao što je optička iluzija. Fluksus umjetnik Henry Flint kojeg se smatra tvorcem konceptualne umjetnosti, smatra da jezik i matematika stvaraju umjetnost koncepta. U minimalizmu i postminimalizmu ne postoji interes za matematiku kao znanost već se vode mišlju da ako se upotrebljene riječi koje proizlaze iz ideje o umjetnosti smatraju umjetnošću, a ne literaturom, tada brojevi nisu matematika. Douglas Huebler[2] je, koristeći nacrtnu geometriju, pokazao da crtež točke na površini papira istovremeno može biti i projekcija točke koja se nalazi u ravnini daleko iza ravnine crteža. U računalnoj umjetnosti, kao što su stripovi, animacije i grafika, vrlo se lako i brzo obrađuju računalno nastale slike, ali i skenirane fotografije. Jedan od najnovijih pravaca u likovnoj umjetnosti jest fraktalna umjetnost. Ona je posebno zanimljiva jer je ona i nova matematička deskriptivna disciplina koja se bavi opisivanjem i modeliranjem složenih, dinamički transformacijskih i nepravilnih pojava. Fraktalni oblici nastaju računalnim vizualizacijama, animacijom i video prezentacijom.

[1]Fluksus (od latinske riječi flux – tok) je ime međunarodnog neoavangardističkog umjetničkog pokreta osnovanog 1962, čiji je cilj povezivanje pripadnika ekstremne avangarde u Europi i SAD.

[2]Douglas Huebler (October 27, 1924 – July 12, 1997) američki konceptualni umjetnik.

2 Zlatni rez u renesansi

Nakon Fibonaccija, odnosno Leonarda iz Pize pojavljuje se Leonardo da Vinci, poznati renesansni umjetnik, najpoznatiji po slici Mona Lise. On je, kao i brojni renesansni umjetnici, ali i arhitekti, neke svoje slike temeljio na čuvenom omjeru koji je poznat pod nazivom zlatni rez. Kažemo da su dvije stranice prvokutnika u omjeru zlatnog reza ako se, po duljini, manja stranica naprema većoj odnosi kao veća prema zbroju njihovih duljina. Ako je zadan opseg pravokutnika kao

$$2a = 2(x + y),$$

pri čemu su x i y duljine stranica tog pravokutnika te, bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo kako je x dulja stranica, onda prema definiciji zlatnog reza treba vrijediti:

$$y : x = x : (x + y) = x : a,$$

a kako je $y = a - x$, slijedi:

$$(a - x) : x = x : a.$$

Odnosno, kvadratna jednadžba $x^2 + ax - a^2 = 0$. Njena rješenja su dana s:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}a.$$

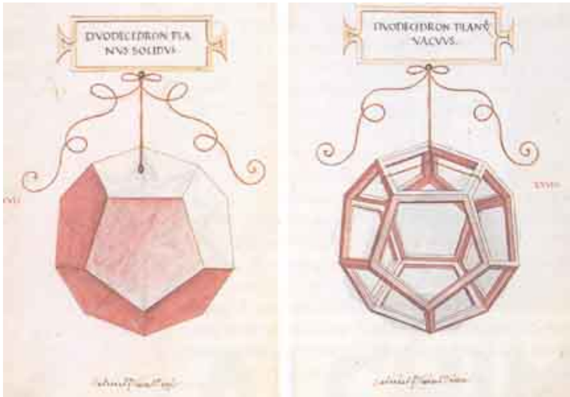
Kako je $5 > 4$, to je $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ pa je rješenje s minusom negativno te ga odbacujemo jer želimo da x predstavlja duljinu.
Zaključujemo da je $x : a$ (tj. omjer dulje stranice prema poluopsegu pravokutnika za pravokutnik kojemu su stranice u omjeru zlatnog reza) jednak:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

Zanimljivo je svojstvo ovog broja da kad ga oduzmemo od njemu recipročnog dobijemo točno 1, tj. $\frac{1}{\varphi} - \varphi = 1$ te se često i njemu recipročni broj:

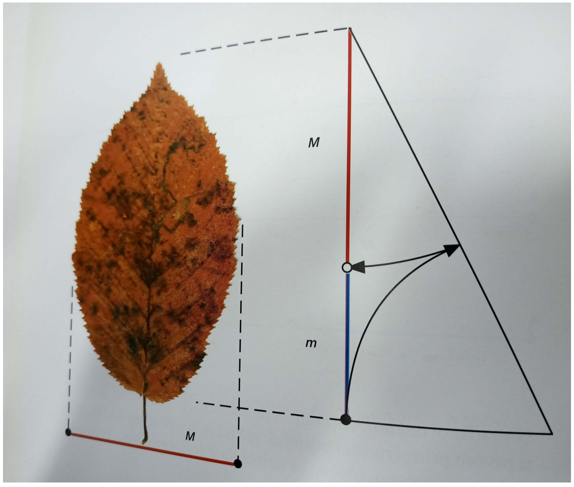
$$\varphi' = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$$

zove omjer zlatnog reza.
Zamislimo, primjerice, da želimo napraviti prozor pravokutnog oblika čije će visina i širina biti u omjeru zlatnog reza (što je bila uobičajena praksa u arhitekturi renesanse). Ukoliko je visina toga prozora $x = 50cm$ tada bi širina prozora trebala iznositi:
$y = x \cdot \varphi \approx 30,9cm.$
Luca Pacioli, važna renesansna ličnost i u matematici, ali i u umjetnosti te veliki da Vincijev prijatelj u svome je djelu *De divina proportione* pripisao pet božanskih osobina zlatnom rezu. Prve četiri osobine bile su jedinstvo i jedinstvenost, nemogućnost definiranja ljudskim pojmovima i nepromjenjivost. Peto je obilježje usporedio s „petom esencijom“ kojom Bog unosi život u svemir, u četiri zemaljska elementa i sve u prirodi te da tako i zlatni rez unosi život u dodekaedar koji je jedno od pet Platonovih geometrijskih tijela. Dodekaedar je pravilni poliedar sastavljen od dvanaest peterokuta te je još za Platona predstavljao svemir.



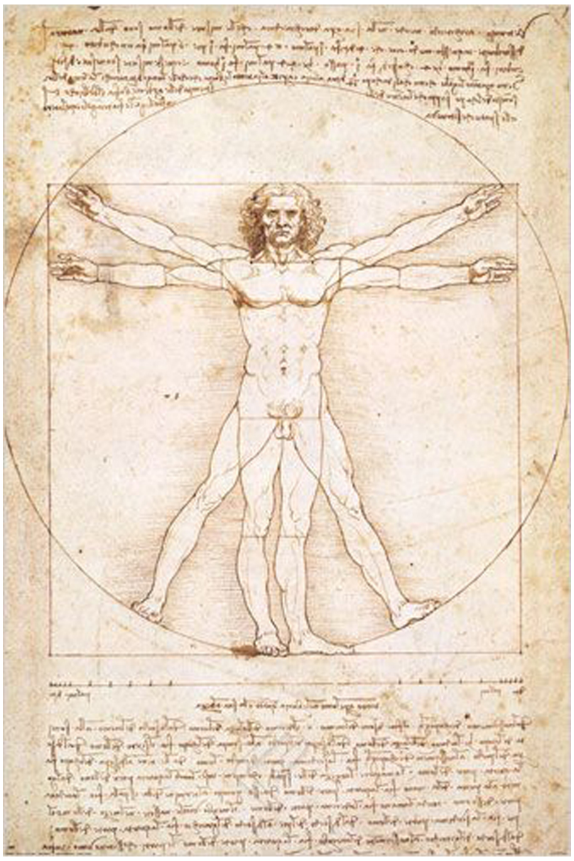
Slika 5. Dodekaedar, Ilustracija L. da Vincija, De divina proportione

Dakle, zlatni rez je geometrijska proporcija ili razmjer koji zadanu dužinu dijeli tako da se njen manji odsječak odnosi prema većem kao što se ovaj veći odnosi prema cijeloj dužini. Veći odsječak zlatne podjele na dužini nazivamo maior (M), a manji minor (m). Pogledajmo primjer omjera dužine u zlatnom rezu iz svakodnevnog života, odnosno prirode:



Slika 6. Zlatni rez u prirodi

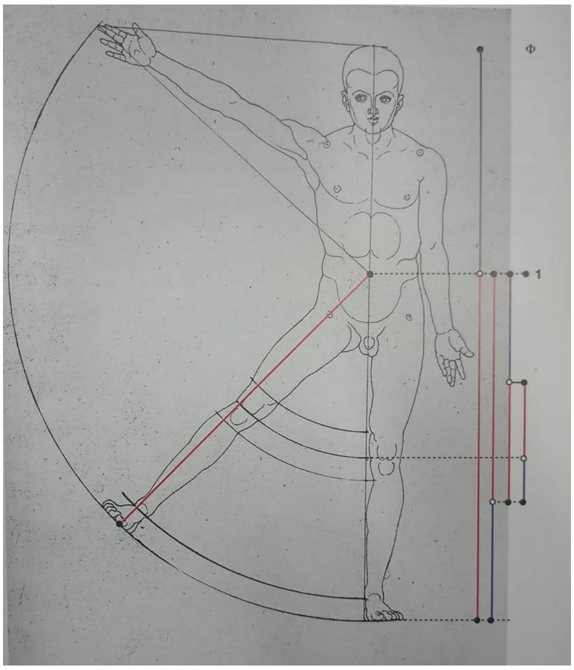
Može se uočiti kako i u prirodi postoji određeni omjer veličina koje aproksimativno predstavljaju omjer zlatnog reza kao što je prikazano na gornjoj slici lista.
Posebno zanimljiva je primjena zlatnog reza u studijama ljudskog tijela od kojih je najpoznatija ona Leonarda da Vincija, lik muškarca upisan u kvadrat i kružnicu. On se smatra jednim od najpoznatijih crteža u cjelokupnoj povijesti europske umjetnosti.



Slika 7. Vitruvijev čovjek, L. da Vinci

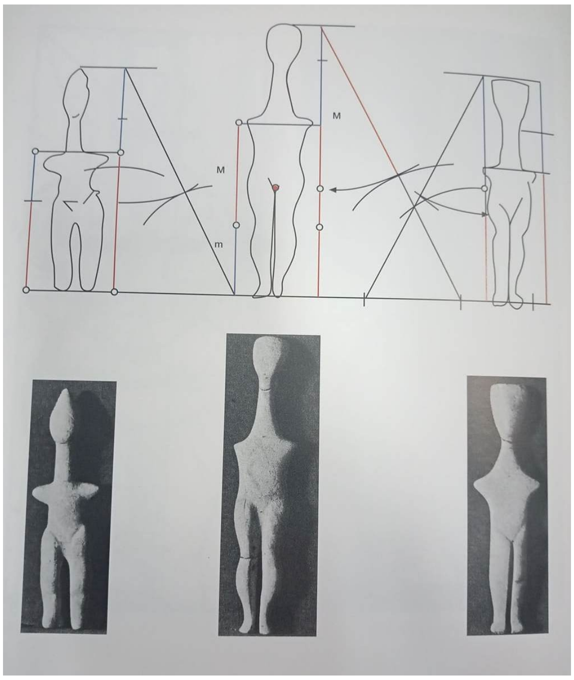
Prilikom konstrukcije crteža Leonardo se oslanja na Vitruvijevu tvrdnju : „ Ako se naime od dna nogu do vrha glave uzme mjera, pa se ona prenese na raširene ruke , vidjet ćemo da je širina jednaka visini, kako je to i kod površina, koje su prema uglomjeru kvadrat...Kad bi, na primjer, čovjek legao na leđa, raširio ruke i noge, i kad bismo vrh šestara postavili na njegov pupak i opisali kružnicu, to bi ona dirala prste ruku i nogu.“, ali on ipak proširuje vitruvijevska pitanja i daje preciznija objašnjenja oslanjajući se na umjetniku prilagođenu mjernu skalu. Leonardo je odredio veličinu stranice čovjeku opisanog kvadrata u skali od 24 dlana, a time je visina figure u kvadratu četiri lakta ili šest stopa. Dlan se dijeli, prema Leonardovoj skali, na četiri digita-palca te ih je 16 u stopi, 24 u laktu, a 26 u visini čovjeka. No, unatoč tome, Leonardova mjerna skala pod crtežom se ne treba shvaćati potpuno mehanički jer je Leonardo samo na početku i na kraju dužine označio lakat, pedlje i digite kako bi mogao izmjeriti podjele na figuri dobivene geometrijskom konstrukcijom, no točnija izmjera pokazuje kako sredina skale, koja nije razmjerna pedljima, ne odgovara posve veličini od dva lakta već je nešto kraća.

Zlatna podjela vertikalne stranice kvadrata određuje visinu pupka figure te ta točka daje minor i maior kružnice. Mjereći maior od stopala u visinu određuje se položaj pupka. Mjerenjem maiora s visine kvadrata ili figure prema dolje dobivamo visinu prstiju spuštene ruke. Od poda do prstiju je minor. Odnosi zlatnih podjela navedenih likova nalazimo i na statičkoj i pokrenutoj ljudskoj figuri, a moguće ih je izmjeriti na mjerilu pod crtežom i odrediti njihove aproksimacije u cijelim brojevima mjerila. Po uzoru na Leonarda da Vincija i Dürer crta i određuje odnose među veličinama idealnog tipa ljudske figure kao što je i vidljivo na slici 9. No, on visinu figure mjeri s osam veličina glave, a podjela lica mu nije strogo vitruvijanska te ispituje i proporcije individualnih likova: viših i nižih, mršavijih i debljih, muških i ženskih, malene ili veće glave i djece.



Slika 9. Muški lik pokretom ruke iscrtava kružnicu kojoj je polumjer maior visine figure, A. Dürer

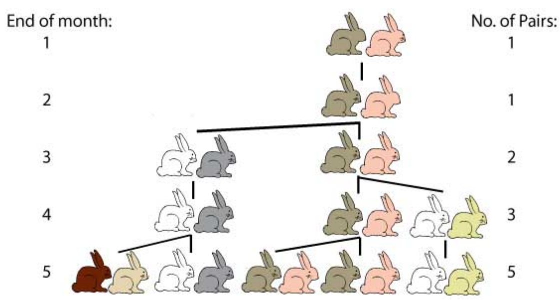
Zanimljivo jest kako se omjer zlatnog reza može pronaći i u ranijim prikazima ljudskog tijela koji datiraju još iz metalnog doba ili antike što ukazuje na antropološku težnju čovjeka prema, kako će se kasnije tokom renesanse koristiti termin, „božanski lijepom“.
Slika 10. prikazuje figure ženskih likova (idola) iz Ciklada, grčke skupine otoka u Egejskom moru, mjesta gdje su pronađene.



Slika 10. Figure ženskih idola iz Ciklada

2.1 Fibonaccijev niz

Leonardo iz Pise, odnosno Fibonacci ili filius Bonacci (Bonaccijev sin) jest veliki srednjovjekovni matematičar koji je živio na prijelazu 12. i 13. stoljeća. U Europu je, svojom knjigom objavljenom 1202. Liber abaci (Knjiga o računanju) uveo indijski način računanja i indijsko-arapske brojke i decimalni sustav što je zbog praktičnosti znatan napredak obzirom da se do tada u Europi koristio zapis rimskim brojkama. Upravo u toj knjizi je postavio i riješio poznati zadatak sa zečevima. Taj zadatak glasi ovako: Neki je čovjek imao par zečeva u zatvorenom prostoru. Želimo znati koliko će zečeva imati na kraju godine, znajući da je u njihovoj prirodi da svaki mjesec okote novi par, a da oni koji se okote prvi par dobiju u drugom mjesecu života. Podrazumijeva se da izoliramo parove, tj. da se čim se okoti svaki par izolira od ostalih. Podrazumijeva se i da nijedan zec ne ugiba prije godine dana starosti. Rješenje problema pojasnio je na način da na početku imamo jedan par. On ovaj mjesec okoti drugi par što znači da u prvom mjesecu imamo dva para zečeva. Sada, u drugom mjesecu, prvotni par ponovno dobiva mlade dok je drugi par još premlad za dobivanje potomstva pa u drugom mjesecu imamo ukupno tri para. U trećem mjesecu prvotni par i njegovi prvi potomci dobiju po jedan novi par mladih, a u prethodnom mjesecu okoćeni mladunci prvotnog para još nemaju mladih pa ih je u trećem mjesecu ukupno $3 + 2 = 5$ parova. U četvrtom mjesecu imamo svih 5 parova iz prošlog mjeseca te 3 nova para što je ukupno $3 + 5 = 8$ parova zečeva. Uočavamo da svaki sljedeći mjesec imamo onoliko parova koliko ih je bilo prošli i pretprošli mjesec, odnosno svaki Fibonaccijev broj je zbroj svaka prethodna dva. Takvom računicom dobijemo kako čovjek s početka zadatka na kraju godine ima 377 pari zečeva.



Slika 4. Fibonaccijev niz u prirodi-shematski prikaz broja parova zečeva po mjesecima za prvih pet mjeseci

Pojasnimo Fibonaccijev niz matematički. Označimo s (F_n) Fibonaccijev niz. Znamo da vrijedi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \tag{1}$$

$$F_0 = F_1 = 1.$$

To je rekurzivna relacija, što znači da ako želimo naći n-ti član Fibonaccijevog niza, moramo znati i sve prethodne članove (njih $n-1$). To za velike n predstavlja problem pa se pitamo možemo li odrediti formulu pomoću koje bismo izračunali F_n. Promotrimo sljedeći teorem:

Teorem 2.1.1.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$$

Dokaz. Potražimo rješenje Fibonaccijeve rekurzivne formule

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$$

(zanemarujući na trenutak početne vrijedosti F_0, F_1) u obliku

$$F_n = q^n, \quad q \neq 0.$$

Kako je $q \neq 0$, dobivamo:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

stoga su

$$f_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

$$g_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

rješenja Fibonaccijeve rekurzivne formule. No, ako su f_n, g_n rješenja Fibonaccijeve rekurzivne relacije, onda je i njihova linearna kombinacija

$$F_n := \lambda f_n + \mu g_n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

također rješenje. Zaista, budući da je

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$
$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2},$$

tada množenjem prve relacije s λ, a druge s μ i njihovim zbrajanjem dobijamo spomenutu tvrdnju. Dakle,

$$F_n = \lambda(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \mu(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

je rješenje od 2.1. Nepoznate koeficijente λ i μ dobit ćemo uvrštavanjem početnih vrijednosti $F_0 = F_1 = 1$ u prethodnu jednakost. Dobivamo sustav:

$$\lambda + \mu = 1$$

$$\lambda(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \mu(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$$

čije rješenje glasi:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$
$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}).$$

Time je teorem dokazan. □

Iako navedeni problem jeste teorijski postavljen model, ipak je isti poslužio za uvođenje točnog matematičkog modela biološkog problema te se pojavljuje u mnogim stvarno primijenjenim situacijama pa je zbog toga Fibonacci ipak poznatiji po

tom nizu nego po, primjerice, uvođenju razlomačke crte.
Također, bitno je napomenuti da je zlatni rez svakako povezan s Fibonaccijevim nizom, no njega su znatno ranije definirali pitagorejci. Povezanost zlatnog reza s Fibonaccijevim brojevima jest u tome da su kvocijenti po dva uzastopna člana Fibonaccijeva niza (zaokruženi na tri decimale), $\frac{F_{n+1}}{F_n}, n \geq 0$:
$1; 1.5; 1.667; 1.6; 1.625; 1.615; 1.619; 1.618...$ Odnosno, svaki sljedeći kvocijent ima više decimala istih kao omjer zlatnog reza pa možemo reći kako kvocijenti uzastopnih članova Fibonaccijevog niza konvergiraju prema omjeru zlatnog reza. Dokažimo to.
Lako je provjeriti da je zlatni rez $\varphi' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ rješenje jednadžbe:

$$\varphi' = 1 + \frac{1}{\varphi'}$$

odakle iteriranjem dobivamo:

$$\varphi' = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi'}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi'}}} = ...$$

Ako promatramo niz kvocijenata (a_n) susjednih Fibonaccijevih brojeva vidimo da su njegovi članovi naizmjence veći, odnosno manji od zlatnog reza i da se ta razlika sve više smanjuje što je indeks člana u nizu veći. Naslućujemo da bi moglo vrijediti:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

gdje je:

$$a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

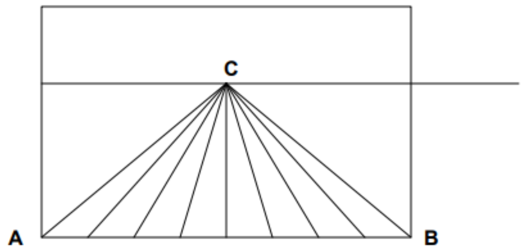
Stoga, promotrimo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}} \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{n} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})^{2}} \\
= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 0}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

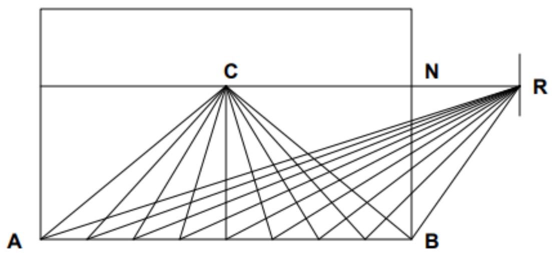
3 Konstrukcija slike u linearnoj perspektivi u renesansi

Kao što je već ranije rečeno, posebno značajnu primjenu matematike možemo uočiti i u konstrukciji slike u linearnoj perspektivi. Naime, linearna perspektiva u slikarstvu je usko povezana s nacrtnom geometrijom. Pomoću linearne perspektive se ravnim linijama stvara dojam prostora. Giotto u 13. stoljeću navodi pravila za slikanje slike u linearnoj perspektivi koja glase: pravci iznad horizonta, odnosno pravci u visini očiju koji se na slici nalaze paralelno s tlom, na slici idu prema dolje, a pravci koji se nalaze ispod horizonta idu prema gore. Pravci koji se nalaze lijevo ili desno od točke pogleda, a to je točka na horizontu koja se nalazi nasuprot oka promatrača, idu prema točki pogleda. Unatoč tomu što je prvi dao pravila linearne perspektive, Giottova pravila nisu bila posve matematički konstruirana te prvu preciznu formulaciju zakona linearne perspektive daje arhitekt Filippo Brunelleschi koji do zaključaka o konstrukciji slike u linearnoj perspektivi dolazi koristeći zrcala. Oko 1420. on izriče pravila linearne perspektive, a ona glase: svi pravci danog smjera u nekoj ravnini (koja nije ravnina slike) „konvergiraju" istoj izbježnoj točki. Ovako formulirano pravilo koristeći termin izbježne točke smatra se početkom nacrtne geometrije jer se izbježnom točkom može smatrati beskonačno daleka točka danog smjera. Kako Brunelleschi ipak nije nikada zapisao objašnjenje pravila linearne perspektive, najstarijim sačuvanim zapisom o konstrukciji slike u linearnoj perspektivi smatramo djelo „De pictura", autora Leona Battista Albertija u kojemu on detaljno objašnjava kako konstrirati pravilne perspektivne slike raznih objekata kao što su pod ili krug.

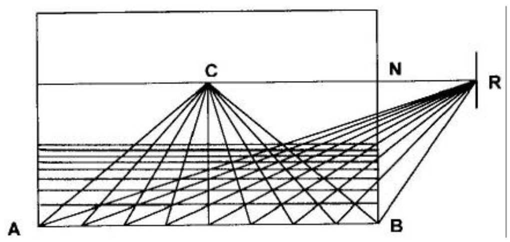
Primjerice za konstrukciju perspektivne slike popločanog poda prvo, odaberemo na plohi točku C koja se nalazi točno nasuprot slikareva oka. Promatramo ravninu određenu točkama A, B, C i nju smatramo ravninom podloge za konstrukciju popločanog poda. Dužinu $\bar{AB}$ podjelimo na jednake dijelove i svaku diobenu točku spojimo s točkom C dužinama koje nazivamo ortogonalama. U stvarnosti to su paralelni pravci koji prate bridove ploča, a na slici konvergiraju prema točki C koju smatramo točkom konvergencije ili točkom nedogleda. Horizontom smatramo pravac kroz C koji je paralelan s $\bar{AB}$.



Na horizontu odaberemo neku točku R na način da je duljina dužine NR udaljenost slikara od slike i tu udaljenost nazivamo udaljenost promatranja i ona predstavlja potrebnu udaljenost promatrača kako bi imao najvjerniji doživljaj prostora. Tu točku R nazivamo lijevom ili desnom dijagonalnom točkom nedogleda.

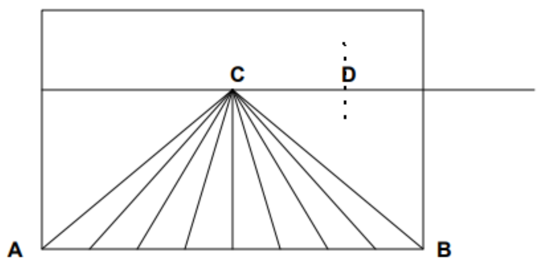


Spojimo dužinama točku R i diobene točke dužine AB. Kroz sjecišta tih dužina i ortogonala povučemo dužine paralelne s dužinom AB i na taj način dobijamo sliku popločanog poda u linearnoj perspektivi.

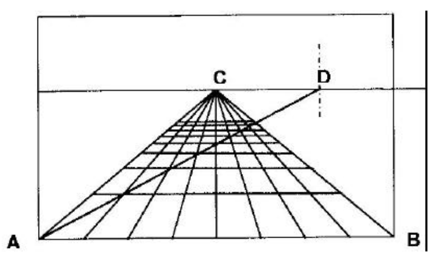


Upravo ta slika popločanog poda Albertiju je služila kao postavljanje i razmještanje likova na podu te mjerenje njihove visine u skladu s pravilima linearne perspektive.

Osim Albertijeve konstrukcije slike u linearnoj perspektivi, prema povijesnim zapisima, postojalo je još metoda za konstrukciju slike u linearnoj perspektivi, a jedna od njih je bila i metoda konstrukcije udaljene točke. Tu metodu je 1505. opisao Jean Pelerin, poznatiji kao Viator u svom djelu De Artificiali Perspectiva. Opisana metoda daje isti rezultat kao i Albertijeva metoda, no na drugačiji način dolazimo do konstrukcije slike. Kao i kod Albertijeve metode konstrukciju slike započinjemo na način da odaberemo točku C koja se nalazi nasuprot slikarevu oku. Ponovno ravninom podloge smatramo ravninu određenu točkama A, B, C. Dužinu $\bar{AB}$ podijelimo na jednake dijelove te svaku diobenu točku spojimo dužinama točkom C i te dužine nazivamo ortogonalama.



Odaberemo točku D koju smatramo udaljenom točkom pri čemu je dužina $\bar{CD}$ udaljenost gledišta. Povlačimo dužinu $\bar{AD}$ koja presijeca sve ortogonale te koristimo točke sjecišta kako bismo konstruirali dužine paralelne s dužinom $\bar{AB}$ i dobivamo sliku popločanog poda u linearnoj perspektivi.



Primjećujemo kako je razlika između konstrukcije slike u linearnoj perspektivi Albertijevom metodom i metodom udaljene točke upravo u odabiru točke nedogleda ili udaljenosti.

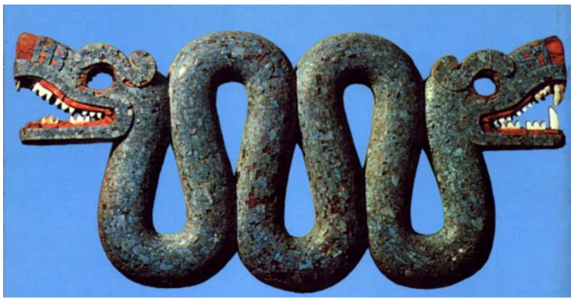
Također, bilo bi bitno spomenuti i Leonarda da Vincija zbog njegova doprinosa vezanih uz perspektivna pravila pri konstrukciji slike. On se je bavio inverznim problemom perspektivne konstrukcije, odnosno kako za predočenu sliku odrediti gdje se nalazi oko promatrača ako je prikaz perspektivno korektan i precizan.

Linearna perspektiva je posebno korištena u razdoblju renesanse, pa i kasnije, kako bi se stvorila iluzija prostora.

Slika 13. Bičevanje Krista, Piero della Francesca, primjer linearne perspektive

4 O simetriji u likovno umjetničkom djelu

Jedni od najbitnijih pojmova u likovnoj umjetnosti, koji predstavljaju samu srž svakog likovnog djela jesu simetrija i ritam. U likovnoj umjetnosti ritam je periodicitet, redoslijed pojavljivanja i nestajanja ili ponavljanja. Simetriju i ritam u smislu likovne umjetnosti ne promatramo kao apstraktne matematičke pojmove već simetriju kao mjeru prostora, a ritam kao mjeru vremena. Kod simetrije se posebno ističe zrcaljenje. U terminima matematike, zrcaljenje jest osna simetrija i njezina primjena je najviše uočljiva u kiparstvu.



Slika 11. Meksička skulptura dvoglave zmije

Na slici 11. prikazana je meksička skulptura dvoglave zmije na kojoj je jasno vidljiva primjena osne simetrije. Upravo zbog toga, prilikom promatranja, pogled se zadržava na središnjem području. Zbog zbijenosti, može se promatrati i rotacija s dvostrukim pomakom, lijevo – desno i gore – dolje. Prostor je oblikovan izjednačenim usmjerenjima lijevo – desno i međusobnom simetrijom početka i kraja čime se postiže nepomičnost, a pravilnim izmjenjivanjem gore – dolje se postiže dojam brzine. Na taj način je postignut dojam kao da je zmija „progutala“ prostor te je on zato „mali“.

Slika 12. Beskonačni stup, Constantin Brancusi

Slika 12. prikazuje Brancusievu[3] skulpturu Beskonačni stup kod koje je pomoću translacije postignut dojam beskraja. Naravno, stup nije beskrajan, ali nizom translacija za istu udaljenost, početni i krajnji dio su previše udaljeni da bi ih se obuhvatilo jednim pogledom pa se dobija upravo takav dojam. Općenito, položaje kod crteža istražujemo tako da crtež smjestimo u koordinatni sustav i promatramo ga po dijelovima uočavajući translacije, simetrije i rotacije.

[3]Constantin Brâncuşi (rođ. 19. veljače 1876., Hobiţa, Rumunjska - 16. ožujka 1957, Pariz, Francuska) je bio rumunjski kipar koji je djelovao u Francuskoj i Rumunjskoj.

5 Primjena matematike u likovnoj umjetnosti u nekim drugim razdobljima

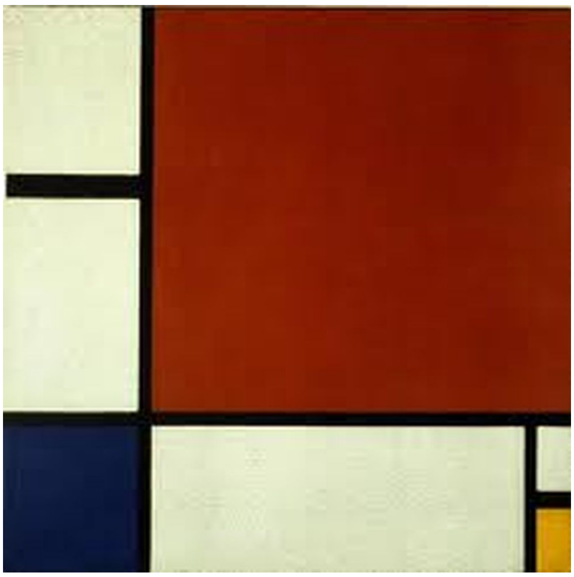
5.1 Matematički pogled na kubizam

Još jedan matematički zanimljiv pravac u likovnoj umjetnosti jest kubizam. Perspektiva korištena u kubizmu je poliperspektiva, odnosno svi objekti su prikazani istovremeno gledani iz više kutova. Polazište poliperspektive je iz Einsteinove teorije relativnosti koja tvrdi kako su sva stajališta važna i točna istovremeno, a prostor i vrijeme su jedinstvena kategorija. Jedan od glavnih predstavnika kubizma je Picasso na čijim se portretima jasno može vidjeti poliperspektiva.

Slika 14. Portrait of woman in d‘hermine pass (Olga), Pablo Picasso

5.2 Matematički neoplasticizam

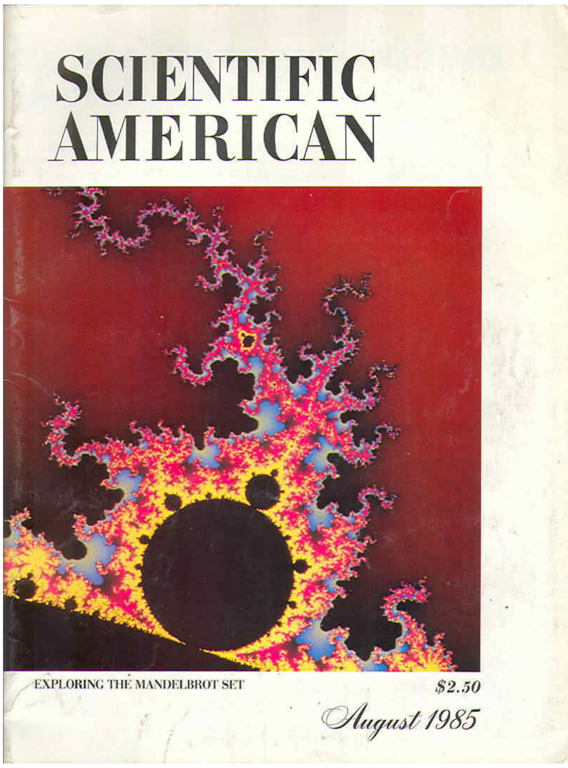
Svakako je u kontekstu matematičkog pristupa likovnoj umjetnosti bitno spomenuti i konstruktivizam i neke od njegovih najistaknutijih predstavnika, Pieta Mondriana i Kazimira Malevicha. Mondrian je htio nacrtati unutrašnju konstrukciju stvarnosti, odnosno izbaciti fikciju iz umjetnosti. Upravo zbog toga i svodi oblike na konflikt najosnovnijih vizualnih suprotnosti, na tri čiste osnovne boje (denaturalizacija materije), akromatske boje (crna-bijela-siva) i vertikalne i horizontalne linije, slikajući tako Kartezijevu mrežu kojom poništava fikciju u umjetničkom djelu i stvara potpuno apstraktnu sliku. Zbog toga se laiku čini kako je Mondrian cijeli život slikao samo jednu sliku, uz eventualne izmjene boja ili pokoje linije. Mondrian je smatrao da je stara umjetnost morfoplastična i ne daje univerzalnu vrijednost, on svojoj jednostavnošću i temeljitosti želi doći do čiste realnosti koristeći čistu plastiku (odnos boja i oblika). Upravo zbog toga, Mondrian unutar konstruktivizma pokreće novi pravac, neoplasticizam. Neoplasticizam vuče korijene iz ideje kubizma, ali Mondrian s vremenom uočava da kubizam nije došao do logičkog zaključka, a to je potpuna apstrakcija kao izraz čiste realnosti. Mondrian i Malevich, obojica pioniri geometrijske apstrakcije, bili su majstori u pronalaženju harmoničnih odnosa geometrijskih oblika, boje i linije, a njihova djela su u potpunosti lišena bilo kakve asocijativnosti.



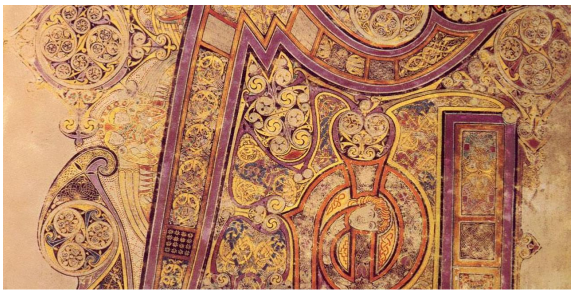
Slika 15. Kompozicija II u crvenom, plavom i žutom, Piet Mondrian

5.3 Fraktalna umjetnost

Razvojem računalne znanosti, pojavljuje se težnja za primjenom iste u stvaranju likovnih djela. Naime, računalna znanost je već široko primijenjena u obradi fotografija ili u dizajnu, ali primjena računalne znanosti u samom stvaranju likovnog djela je već nešto drugo. Upravo to je glavni poticaj za nastanak mladog i još neafirmiranog pravca u likovnoj umjetnosti, fraktalne umjetnosti. Za početak, fraktal se može opisati i kao geometrijski oblik koji se sastoji od umanjenih kopija samog sebe. Fraktali se često pojavljuju u prirodi, ali kako je umjetnost zapravo "imitacija prirode" svakako nije teško za pretpostaviti da se iste može pronaći i u likovnim djelima. Termin fraktal uvodi, 1975. godine, matematičar Benoit B. Mandelbrot, a fraktalna umjetnost se počinje razvijati tek od 1980. Jedno od prvih djela fraktalne umjetnosti pojavilo se na naslovnici časopisa *Scientific American*, 1985. godine i prikazivala je Mandelbrotov skup. Kao "mlada umjetnost" koja se temelji na matematičkim formulama, fraktalna umjetnost se još nije afirmirala u umjetničkim krugovima, ali je našla svoju primjenu u računalnoj animaciji (primjerice simulacija rasta biljaka). Najveća zamjerka fraktalnoj umjetnosti jest ta da ju ne stvara čovjek već računalo, ali isto tako, glavni kontraargument tome jest taj da upravo čovjek upravlja računalom pa se računalo može smatrati samo alatom umjetnika, kao što je to i paleta i kist. Prvi računalni program koji se koristio za stvaranje fraktalnih slika jest *Fractint*, dok ih danas postoji nekolicina, kao primjerice *Ultra Fractal, Bryce, Sterling.*



Slika 16. Scientific American, 1985.



Slika 17. Knjga Kellsa (engleski: The Book of Kells)

Iako je, kako je već nekoliko puta naglašeno, fraktalna umjetnost mlada umjetnost, ipak se njezini začeci mogu pronaći još u umjetnosti drevnih naroda kao što su Kelti, Asteci, Maye, Inke koji su na taj način vježbali ponavljanje istog oblika i njegovih varijacija. Posebno je povijesno zanimljiv prikaz fraktalne umjetnosti prikazan na slici 17. iz Knjige Kellsa. Knjiga Kellsa jest oslikani rukopis Evanđelja na latinskom jeziku pronađen u samostanu u mjestu Kells u Irskoj. Pretpostavlja se da je nastao između 8. i 9. stoljeća na otoku Ioni u Škotskoj. Sastoji se od 340 stranica bogato ukrašenog teksta. Svi su fraktali, kojima je tekst u knjizi ukrašen, crtani rukom što je zahtijevalo izniman trud i napor te veliku količinu vremena. Upravo zbog toga se smatra jednim od najvećih blaga srednjovjekovnih europskih vremena.

5.4 Maurits Cornelis Escher- grafike

Posebno zanimljiv matematičarima je nizozemski grafičar Maurits Cornelis Escher. On u svojim, na matematičkim načelima zasnovanim, grafikama eksperimentira sa zakonima perspektive. Također, često u svojim prikazima metamorfoza ponavlja osnovne likove u pravilnim razmacima tvoreći tako mozaikalne uzorke. Njegova djela intrigiraju matematičare jer su nastala potaknuta matematičkom intuicijom te je zbog toga matematičarima lako u njima prepoznati apstraktni svijet koji proučavaju.
Escher se u svojim grafikama poigrava paradoksima predodžaba trodimenzionalnog prostora u ravnini. To je najbolje vidljivo u njegovim djelima *Vodopad* i *Vidikovac* te *Möbiusova traka* vidljivi na slikama 18., 19. i 20.

Slika 18. Vodopad, Escher

Slika 19. Vidikovac, Escher

Slika 20. Möbiusova traka, Escher

Upravo promatrajući njegovo djelo Möbiusova traka uočavamo koliko je Escher zapravo blizak svijetu matematike. Inače, Möbiusova traka (ili vrpca) je površina koja nastaje od pravokutne trake tako što se jedna stranica zarotira za 180 stupnjeva i zalijepi sa suprotnom stranicom. Zanimljivo je napomenuti kako je upravo Escherova grafika Möbiusove trake poslužila kao inspiracija za simbol za recikliranje na ambalažama s kojim se često susrećemo u svakodnevnom životu. Gledajući geometrijske aspekte njegovih djela, uočavamo da se u stvaranju likovno umjetničkog djela koristi rotacijama, translacijama i centralnom i osnom simetrijom što zapravo njegova djela čini izuzetno zanimljivima i privlačnima oku promatrača.

Zaključak

Uzevši u obzir činjenicu kako je likovna umjetnost izrazito širok pojam te da postoji velik broj različitih pravaca i razdoblja u likovnoj umjetnosti, a matematika je, s druge strane, egzaktna znanost, zanimljivo je koliko su zapravo matematika i likovna umjetnost povezane. Kao što je već spomenuto, njihova povezanost, odnosno primjena matematike u likovnoj umjetnosti, najbolje je vidljiva u razdoblju renesanse kada je primjena zlatnog reza bila neizostavan element velikog broja umjetničkih djela iz tog razdoblja.

No, ne treba zanemariti ulogu matematike niti u drugim razdobljima u razvoju likovne umjetnosti. Tako je, primjerice, jasno vidljiva primjena matematike u Escherovim grafikama u kojima su matematički motivi česta inspiracija. Osim toga, razvojem računalne znanosti dolazi do razvoja fraktalne umjetnosti u kojoj likovna umjetnička djela nastaju unošenjem određene matematičke formule u računalo te se pomoću te formule stvara slika različitih fraktala.

Također, kada promatramo neko likovno umjetničko djelo kroz njegove komponente, kao što su perspektiva i simetrija, uočavamo kako je neizbježna uporaba matematike, posebice geometrije. Nemoguće je naslikati sliku u, primjerice, linearnoj perspektivi bez ikakvog znanja o nacrtnoj geometriji.

Dolazimo do zaključka kako je umjetniku gotovo nemoguće prikazati prostor ili objekt bez barem intuitivnog znanja matematike. Osim toga, apstrakcija, koja je ključni dio matematike kao znanosti, je isto tako ključan dio svakog likovnog umjetničkog djela te je samim time neizbježno ispreplitanje matematike i likovne umjetnosti.

Literatura

[1] F. H. Bool, B. Ernst, J. R. Kist, J. L. Locher, F. Wierda *Escher, The Complete Graphic Work*, Thames Hudson, Amsterdam, 1992.

[2] S. Braić, L. T. Burić, K. Sablić, *Linearna perspektiva i optičke iluzije*, Zbornik Sveučilišta u Dubrovniku,(2015)

[3] F. M. Brueckler, *Fibonaccijev niz.*, Priroda.,**100**(2010)

[4] F. M. Brueckler, *Povijest matematike I*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku,(2014)

[5] J. Damjanov, *Vizualni jezik i likovna umjetnost*, Školska knjiga,(1991)

[6] P. J. Davis, *Doživljaj matematike* , Golden marketing-Tehnička knjiga, (2004)

[7] P. Hemenway *Tajni kod:zlatni red-tajanstvena formula koja vlada umjetnošću, prirodom i znanošću*, V.B.Z.,(2009)

[8] A. Krajina, *Neka svojstva Fibonaccijevog niza*, Osječka matematička škola.,**2**(2002)

[9] V. Mišljenović, *Fraktali i umjetnost*, Matka:časopis za mlade matematičare,**20**(2012)

[10] D. Murovec, *Male tajne Fibonaccijevih brojeva*, Matematičko fizički list,**56**(2000)

[11] M. Pejaković , *Zlatni rez*, Art studio Azinović,(2001)

[12] K. Rukavina, *Picassov »pogled«. Gledanje, viđenje i vidljivo u Picassovom kubizmu*, Filozofska istraživanja, **33**(2013)

[13] M. Šuvaković, *Pojmovnik teorije umetnosti*, Orion art, Beograd, 2011. Zagreb, 1997.

[14] `http://https://www.njitalianheritage.org/wp-content/uploads/2015/12/Fibonacci-and-His-Impact-on-Art-and-Architecture.pdf`

[15] `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Pacioli.html`

[16] https://www.ams.org/journals/bull/2010-47-03/S0273-0979-10-01308-X/S0273-0979-10-01308-X.pdf

[17] http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/kh2-urops.pdf

[18] https://www.ams.org/notices/201210/rtx121001435p.pdf

[19] http://www.likovnakultura.com/umjetnost-novosti/mondrijan-matematicki-racionalizam-geometrijske-apstrakcije

Sažetak

Proučavajući različite pravce likovne umjetnosti kroz povijest uočavamo veliku primjenu matematike u većini razdoblja likovne umjetnosti. Primjena matematike je najviše izražena u razdoblju renesanse kada je većina likovno umjetničkih djela imala u svojoj strukturi primjenu zlatnog reza. I danas postoje brojna istraživanja koja potvrđuju kako će osoba privlačnim percipirati sve što je u omjeru zlatnog reza. Također, u razdoblju renesanse je često korištena linearna perspektiva kako bi se prikazao prostor na slici, a za slikanje objekta u linearnoj perspektivi potrebno je poznavati načela projektivne geometrije te je i tu vidljivo kako je matematika ipak bila neizostavna za stvaranje likovno umjetničkog djela.

No, bitno je i naglasiti kako je primjena matematike vidljiva i u kiparstvu gdje se ponavljanjem određenih elemenata, rotacijama i translacijama postiže dojam beskonačnosti kod promatrača.

Daljnjim razvojem likovne umjetnosti dolazi do potpune apstrakcije u djelima te matematika nema više toliki značaj u najstajnju likovno umjetničkog djela, no razvojem tehnologije i računalne znanosti ona sve više dobija na značaju pa tako imamo djela fraktalne umjetnosti koja nastaju uz pomoć računala unošenjem određene matematičke formule.

Osim toga, javljaju se i matematički motivi u raznim grafikama od kojih treba izdvojiti one nizozemskog grafičara Mauritsa Cornelisa Eschera koji, bez ikakve dvojbe, znatno primjenjuje znanje s područja matematike prilikom izrade svojih grafika.

Ključne riječi: matematika, likovno umjetničko djelo, renesansa, geometrija, zlatni rez, razdoblja likovne umjetnosti, grafika

Summary

Studying different directions of fine arts throughout history, we notice a great application of mathematics in most periods of fine arts. The application of mathematics was most pronounced in the Renaissance period when most works of art had the application of the golden ratio in their structure. Even today, there are numerous studies that confirm how attractive a person will perceive everything that is in the ratio of the golden ratio. Also, in the Renaissance, a linear perspective was often used to show the space in the painting and, to paint an object from a linear perspective, it is necessary to know the principles of projective geometry.
However, it is important to emphasize that the application of mathematics is also visible in sculpture, where the repetition of certain elements, rotations, and translations creates the impression of infinity in the observer.
With the further development of fine arts, there is a complete abstraction in the works and mathematics is no longer so important in the artwork, but with the development of technology and computer science it is gaining in importance, so we have works of fractal art created by computers by entering a mathematical formula.
In addition, there are mathematical motifs in various graphics, of which those of the Dutch graphic artist Maurice Cornelis Escher should be singled out, who, without any doubt, significantly applies knowledge in the field of mathematics when creating his graphics.

Key words: mathematics, fine art, renaissance, geometry, golden ratio, periods of fine art, graphics

Životopis

Moje ime je Ivana Kelava. Rođena sam u Osijeku, 13. kolovoza 1993. godine. Nakon završene osnovne škole upisujem I. gimnaziju u Osijeku koju završavam s odličnim uspjehom te upisujem nastavnički smjer na Odjelu za matematiku u Osijeku.
Iako mi je matematika oduvijek bila jedan od najdražih predmeta, ipak sam uživala i učeći strane jezike te sam upravo zbog toga i tijekom studiranja radila kao simultana prevoditeljica za engleski jezik. Radeći kao prevoditeljica stekla sam brojna poznanstva s turistima iz raznih krajeva svijeta i na taj način izuzetno proširila svoje kulturološke vidike. Osim toga, često sam volonterski radila s djecom kao animatorica.
Zadnje dvije godine povremeno sam radila kao zamjena u školama za matematiku i informatiku te mogu uistinu reći da se pronalazim u poslu za koji sam se i školovala. Oduvijek obožavam proučavati likovno umjetnička djela te često posjećujem razne izložbe zbog čega sam se i odlučila upravo za ovu temu diplomskoga rada.